ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

VI

Л.Д. ЛАНДАУ
Е.М. ЛИФШИЦ

ГИДРОДИНАМИКА

Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В ДЕСЯТИ ТОМАХ

МОСКВА

Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ

ТОМ VI

ГИДРОДИНАМИКА

МОСКВА

2000

УДК 530.1(075.8)
Л22
ББК 22.31

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. **Теоретическая физика**: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VI. **Гидродинамика**. — 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 736 с. — ISBN 5-9221-0121-8 (Т. VI).

Гидродинамика излагается как часть теоретической физики, чем и определяется характер ее содержания, отличающийся от других курсов. Авторы стремились с возможной полнотой разобрать все представляющие физический интерес вопросы, создать по возможности более ясную картину явлений и их взаимоотношений. При подготовке нового издания практически во все главы добавлен новый материал, особенно в главы о турбулентности и ударных волнах, однако переработка не изменила характера книги, выходившей как первая часть «Механики сплошных сред» в 1953 г.

4-е изд. — 1988 г.

Для студентов старших курсов физических специальностей вузов, а также аспирантов и научных работников соответствующих специальностей.

Ил. 136.

Ответственный редактор курса «Теоретическая физика» академик РАН, доктор физико-математических наук *Л. П. Питаевский*

ISBN 5-9221-0121-8 (Т. VI)
ISBN 5-9221-0053-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В двух предыдущих изданиях (1944 и 1953 гг.) «Гидродинамика» составляла первую часть «Механики сплошных сред»; теперь она выделена в отдельный том.

Характер содержания и изложения в этой книге определен в воспроизводимом ниже предисловии к предыдущему изданию. Моей основной заботой при переработке и дополнении было не изменить этот характер.

Несмотря на протекшие 30 лет материал, содержавшийся во втором издании, фактически не устарел — за очень незначительными исключениями. Этот материал подвергся лишь сравнительно небольшим добавлениям и изменениям. В то же время добавлен ряд новых параграфов — около пятнадцати по всей книге.

За последние десятилетия гидродинамика развивалась чрезвычайно интенсивно и соответственно необычайно расширилась литература по этой науке. Но ее развитие в значительной степени шло по прикладным направлениям, а также в направлении усложнения доступных теоретическому расчету (в том числе с использованием ЭВМ) задач. К последним относятся, в частности, разнообразные задачи о неустойчивостях и их развитии, в том числе в нелинейном режиме. Все эти вопросы лежат вне рамок данной книги; в частности вопросы устойчивости излагаются (как и в предыдущих изданиях), в основном, результативным образом.

Не включена в книгу также и теория нелинейных волн в диспергирующих средах, составляющая в настоящее время значительную главу математической физики. Чисто гидродинамическим объектом этой теории являются волны большой амплитуды на поверхности жидкости. Основные же ее физические применения связаны с физикой плазмы, нелинейной оптикой, различными электродинамическими задачами и др.; в этом смысле она относится к другим томам.

Существенные изменения произошли в понимании механизма возникновения турбулентности. Хотя последовательная теория турбулентности принадлежит еще будущему, есть основания полагать, что ее развитие вышло, наконец, на правильный путь. Относящиеся сюда основные существующие к настоящему

времени идеи и результаты изложены в трех параграфах (§ 30–32), написанных мной совместно с М. И. Рабиновичем; я глубоко благодарен ему за оказанную таким образом большую помощь. В механике сплошных сред возникла в последние десятилетия новая область — механика жидких кристаллов. Она несет в себе одновременно черты, свойственные механикам жидких и упругих сред. Изложение ее основ предполагается включить в новое издание «Теории упругости».

Среди книг, которые мне довелось написать совместно с Львом Давидовичем Ландау, эта книга занимает особое место. Он вложил в нее часть своей души. Новая для Льва Давидовича в то время область теоретической физики увлекла его, и — как это было для него характерно — он принялся заново продумывать и выводить для себя ее основные результаты. Отсюда родился ряд его оригинальных работ, опубликованных в различных журналах. Но ряд принадлежащих Льву Давидовичу и вошедших в книгу оригинальных результатов или точек зрения не были опубликованы отдельно, а в некоторых случаях даже его приоритет выяснился лишь позднее. В новом издании книги во всех известных мне подобных случаях я добавил соответствующие указания на его авторство.

При переработке этого, как и других томов «Теоретической физики», меня поддерживали помощь и советы многих моих друзей и товарищей по работе. Я хотел бы в первую очередь упомянуть многочисленные обсуждения с Г. И. Баренблаттом, Я. Б. Зельдовичем, Л. П. Питаевским, Я. Г. Синаем. Ряд полезных указаний я получил от А. А. Андронова, С. И. Анисимова, В. А. Белоконя, В. П. Крайнова, А. Г. Куликовского, М. А. Либермана, Р. В. Половина, А. В. Тимофеева, А. Л. Фабриканта. Всем им я хочу выразить здесь свою искреннюю благодарность.

Е. М. Лифшиц

Институт физических проблем АН СССР
Август 1984 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ «МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД»

Предлагаемая книга посвящена изложению механики сплошных сред, т. е. теории движения жидкостей и газов (гидродинамике) и твердых тел (теории упругости). Являясь по существу областями физики, эти теории благодаря ряду своих специфических особенностей превратились в самостоятельные науки.

В теории упругости существенную роль играет решение математически четко поставленных задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных; поэтому теория упругости содержит в себе много элементов так называемой математической физики.

Гидродинамика имеет существенно иной характер. Ее уравнения нелинейны, и потому прямое их исследование и решение возможны лишь в сравнительно редких случаях. Благодаря этому развитие современной гидродинамики возможно лишь в непрерывной связи с экспериментом. Это обстоятельство сильно сближает ее с другими областями физики.

Несмотря на свое практическое обособление от других областей физики, гидродинамика и теория упругости тем не менее имеют большое значение как части теоретической физики. С одной стороны, они являются областями применения общих методов и законов теоретической физики, и ясное понимание их невозможно без знания основ других разделов последней. С другой стороны, сама механика сплошных сред необходима для решения задач из совершенно других областей теоретической физики.

Мы хотели бы сделать здесь некоторые замечания о характере изложения гидродинамики в предлагаемой книге. Эта книга излагает гидродинамику как часть теоретической физики, и этим в значительной мере определяется характер ее содержания, существенно отличающийся от других курсов гидродинамики. Мы стремились с возможной полнотой разобрать все представляющие физический интерес вопросы. При этом мы старались построить изложение таким образом, чтобы создать по возможности более ясную картину явлений и их взаимоотношений. В соответствии с таким характером книги мы не излагаем в ней как приближенных методов гидродинамических расчетов, так и

тех из эмпирических теорий, которые не имеют более глубокого физического обоснования. В то же время здесь излагаются такие предметы, как теория теплопередачи и диффузия в жидкостях, акустика и теория горения, которые обычно выпадают из курсов гидродинамики.

В настоящем, втором, издании книга подвергнута большой переработке. Добавлено значительное количество нового материала, в особенности в газодинамике, почти полностью написанной заново. В частности, добавлено изложение теории околозвукового движения. Этот вопрос имеет важнейшее принципиальное значение для всей газодинамики, так как изучение особенностей, возникающих при переходе через звуковую скорость, должно дать возможность выяснения основных качественных свойств стационарного обтекания твердых тел сжимаемым газом. В этой области до настоящего времени еще сравнительно мало сделано; многие важные вопросы могут быть еще только поставлены. Имея в виду необходимость их дальнейшей разработки, мы даем подробное изложение применяемого здесь математического аппарата.

Добавлены две новые главы, посвященные релятивистской гидродинамике и гидродинамике сверхтекучей жидкости. Релятивистские гидродинамические уравнения (глава XV) могут найти применение в различных астрофизических вопросах, например при изучении объектов, в которых существенную роль играет излучение; своеобразное поле применения этих уравнений открывается также и в совершенно другой области физики, например, в теории множественного образования частиц при столкновениях. Излагаемая в главе XVI «двухскоростная» гидродинамика дает макроскопическое описание движения сверхтекучей жидкости, каковой является жидкий гелий при температурах, близких к абсолютному нулю...

Мы хотели бы выразить искреннюю благодарность Я. Б. Зельдовичу и Л. И. Седову за ценное для нас обсуждение ряда гидродинамических вопросов. Мы благодарим также Д. В. Сивухина, прочитавшего книгу в рукописи и сделавшего ряд замечаний, использованных нами при подготовке второго издания книги.

Л. Ландау, Е. Лифшиц

1952 г.

ГЛАВА I

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 1. Уравнение непрерывности

Изучение движения жидкостей (и газов) представляет собой содержание *гидродинамики.* Поскольку явления, рассматриваемые в гидродинамике, имеют макроскопический характер, то в гидродинамике жидкость [1]) рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объема жидкости считается все-таки настолько большим, что содержит еще очень большое число молекул. Соответственно этому, когда мы будем говорить о бесконечно малых элементах объема, то всегда при этом будет подразумеваться «физически» бесконечно малый объем, т. е. объем, достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями. В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражения «жидкая частица», «точка жидкости». Если, например, говорят о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом идет речь не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка.

Математическое описание состояния движущейся жидкости осуществляется с помощью функций, определяющих распределение скорости жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ и каких-либо ее двух термодинамических величин, например давления $p(x, y, z, t)$ и плотности $\rho(x, y, z, t)$. Как известно, все термодинамические величины определяются по значениям каких-либо двух из них с помощью уравнения состояния вещества; поэтому задание пяти величин: трех компонент скорости $\mathbf{v}$, давления p и плотности ρ, полностью определяет состояние движущейся жидкости.

Все эти величины являются, вообще говоря, функциями координат x, y, z и времени t. Подчеркнем, что $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ есть скорость жидкости в каждой данной точке x, y, z пространства в момент времени t, т. е. относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам жидкости, передвигающимся со временем в пространстве; то же самое относится к величинам ρ, p.

---

[1]) Мы говорим здесь и ниже для краткости только о жидкости, имея при этом в виду как жидкости, так и газы.

Начнем вывод основных гидродинамических уравнений с вывода уравнения, выражающего собой закон сохранения вещества в гидродинамике.

Рассмотрим некоторый объем V_0 пространства. Количество (масса) жидкости в этом объеме есть $\int \rho\, dV$, где ρ есть плотность жидкости, а интегрирование производится по объему V_0. Через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, в единицу времени протекает количество $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$ жидкости; вектор $d\mathbf{f}$ по абсолютной величине равен площади элемента поверхности и направлен по нормали к ней. Условимся направлять $d\mathbf{f}$ по внешней нормали. Тогда $\rho\mathbf{v}d\mathbf{f}$ положительно, если жидкость вытекает из объема, и отрицательно, если жидкость втекает в него. Полное количество жидкости, вытекающей в единицу времени из объема V_0, есть, следовательно,

$$\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f},$$

где интегрирование производится по всей замкнутой поверхности, охватывающей рассматриваемый объем.

С другой стороны, уменьшение количества жидкости в объеме V_0 можно написать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV.$$

Приравнивая оба выражения, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}. \qquad (1.1)$$

Интеграл по поверхности преобразуем в интеграл по объему

$$\oint \rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \rho\mathbf{v}\, dV.$$

Таким образом,

$$\int \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v}\right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место для любого объема, то должно быть равным нулю подынтегральное выражение, т. е.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0. \qquad (1.2)$$

Это — так называемое *уравнение непрерывности.*

Раскрыв выражение $\operatorname{div} \rho\mathbf{v}$, (1.2) можно написать также в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = 0. \qquad (1.3)$$

Вектор

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \tag{1.4}$$

называют *плотностью потока жидкости*. Его направление совпадает с направлением движения жидкости, а абсолютная величина определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площади, расположенной перпендикулярно к скорости.

§ 2. Уравнение Эйлера

Выделим в жидкости некоторый объем. Полная сила, действующая на выделенный объем жидкости, равна интегралу

$$-\oint p\,d\mathbf{f},$$

взятому по поверхности рассматриваемого объема. Преобразуя его в интеграл по объему, имеем

$$-\oint p\,d\mathbf{f} = -\int \operatorname{grad} p\,dV.$$

Отсюда видно, что на каждый элемент объема dV жидкости действует со стороны окружающей его жидкости сила $-dV \operatorname{grad} p$. Другими словами, можно сказать, что на единицу объема жидкости действует сила $-\operatorname{grad} p$.

Мы можем теперь написать уравнение движения элемента объема жидкости, приравняв силу $-\operatorname{grad} p$ произведению массы ρ единицы объема жидкости на ее ускорение $d\mathbf{v}/dt$:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p. \tag{2.1}$$

Стоящая здесь производная $d\mathbf{v}/dt$ определяет не изменение скорости жидкости в данной неподвижной точке пространства, а изменение скорости определенной передвигающейся в пространстве частицы жидкости. Эту производную надо выразить через величины, относящиеся к неподвижным в пространстве точкам. Для этого заметим, что изменение $d\mathbf{v}$ скорости данной частицы жидкости в течение времени dt складывается из двух частей: из изменения скорости в данной точке пространства в течение времени dt и из разности скоростей (в один и тот же момент времени) в двух точках, разделенных расстоянием $d\mathbf{r}$, пройденным рассматриваемой частицей жидкости в течение времени dt. Первая из этих частей равна

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\,dt,$$

где теперь производная $\partial\mathbf{v}/\partial t$ берется при постоянных x, y, z, т. е. в заданной точке пространства. Вторая часть изменения

скорости равна

$$dx\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v}.$$

Таким образом,

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\,dt + (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v}$$

или, разделив обе части равенства на dt [1]),

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}. \qquad (2.2)$$

Подставив полученное соотношение в (2.1), находим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p. \qquad (2.3)$$

Это и есть искомое уравнение движения жидкости, установленное впервые *Л. Эйлером* в 1755 г. Оно называется *уравнением Эйлера* и является одним из основных уравнений гидродинамики.

Если жидкость находится в поле тяжести, то на каждую единицу ее объема действует еще сила $\rho\mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ есть ускорение свободного падения. Эта сила должна быть прибавлена к правой части уравнения (2.1), так что (2.3) приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}. \qquad (2.4)$$

При выводе уравнений движения мы совершенно не учитывали процессов диссипации энергии, которые могут иметь место в текущей жидкости вследствие внутреннего трения (вязкости) в жидкости и теплообмена между различными ее участками. Поэтому все излагаемое здесь и в следующих параграфах этой главы относится только к таким движениям жидкостей и газов, при которых несущественны процессы теплопроводности и вязкости; о таком движении говорят как о движении *идеальной жидкости.*

Отсутствие теплообмена между отдельными участками жидкости (а также, конечно, и между жидкостью и соприкасающимися с нею окружающими телами) означает, что движение происходит адиабатически, причем адиабатически в каждом из участков жидкости. Таким образом, движение идеальной жидкости следует рассматривать как адиабатическое.

При адиабатическом движении энтропия каждого участка жидкости остается постоянной при перемещении последнего в

[1]) Определенную таким образом производную d/dt называют *субстанциональной*, подчеркивая тем самым ее связь с перемещающимся веществом.

пространстве. Обозначая буквой s энтропию, отнесенную к единице массы жидкости, мы можем выразить адиабатичность движения уравнением

$$\frac{ds}{dt} = 0, \tag{2.5}$$

где полная производная по времени означает, как и в (2.1), изменение энтропии заданного перемещающегося участка жидкости. Эту производную можно написать в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} s = 0. \tag{2.6}$$

Это есть общее уравнение, выражающее собой адиабатичность движения идеальной жидкости. С помощью (1.2) его можно написать в виде «уравнения непрерывности» для энтропии

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0. \tag{2.7}$$

Произведение $\rho s \mathbf{v}$ представляет собой *плотность потока энтропии*.

Обычно уравнение адиабатичности принимает гораздо более простую форму. Если, как это обычно имеет место, в некоторый начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках объема жидкости, то она останется везде одинаковой и неизменной со временем и при дальнейшем движении жидкости. В этих случаях можно, следовательно, писать уравнение адиабатичности просто в виде

$$s = \text{const}, \tag{2.8}$$

что мы и будем обычно делать в дальнейшем. Такое движение называют *изэнтропическим*.

Изэнтропичностью движения можно воспользоваться для того, чтобы представить уравнение движения (2.3) в несколько ином виде. Для этого воспользуемся известным термодинамическим соотношением

$$dw = T\,ds + V\,dp,$$

где w — тепловая функция единицы массы жидкости, $V = 1/\rho$ — удельный объем, а T — температура. Поскольку $s = \text{const}$, имеем

$$dw = V\,dp = \frac{1}{\rho}\,dp,$$

и поэтому

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla w.$$

Уравнение (2.3) можно, следовательно, написать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\operatorname{grad} w. \tag{2.9}$$

Полезно заметить еще одну форму уравнения Эйлера, в котором оно содержит только скорость. Воспользовавшись известной формулой векторного анализа

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 = [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v},$$

можно написать (2.9) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] = -\operatorname{grad}\left(w + \frac{v^2}{2}\right). \tag{2.10}$$

Применив к обеим частям этого уравнения операцию rot, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}], \tag{2.11}$$

содержащее только скорость.

К уравнениям движения надо добавить граничные условия, которые должны выполняться на ограничивающих жидкость стенках. Для идеальной жидкости это условие должно выражать собой просто тот факт, что жидкость не может проникнуть за твердую поверхность. Это значит, что на неподвижных стенках должна обращаться в нуль нормальная к поверхности стенки компонента скорости жидкости:

$$v_n = 0 \tag{2.12}$$

(в общем же случае движущейся поверхности v_n должно быть равно соответствующей компоненте скорости поверхности).

На границе между двумя несмешивающимися жидкостями должны выполняться условие равенства давлений и условие равенства нормальных к поверхности раздела компонент скорости обеих жидкостей (причем каждая из этих скоростей равна скорости нормального перемещения самой поверхности раздела).

Как уже было указано в начале § 1, состояние движущейся жидкости определяется пятью величинами: тремя компонентами скорости **v** и, например, давлением p и плотностью ρ. Соответственно этому полная система гидродинамических уравнений должна содержать пять уравнений. Для идеальной жидкости этими уравнениями являются уравнения Эйлера, уравнение непрерывности и уравнение, выражающее адиабатичность движения.

Задача

Написать уравнения одномерного течения идеальной жидкости в переменных a, t, где a есть x-координата частиц жидкости в некоторый момент времени $t = t_0$ (так называемая переменная Лагранжа) [1].

---

[1] Хотя эти переменные и принято называть лагранжевыми, но в действительности уравнения движения жидкости в этих координатах были впервые получены *Л. Эйлером* одновременно с основными уравнениями (2.3).

Р е ш е н и е. В указанных переменных координата x каждой частицы жидкости в произвольный момент времени рассматривается как функция t и ее же координаты a в начальный момент: $x = x(a, t)$. Условие сохранения массы элемента жидкости при его движении (уравнение непрерывности) напишется соответственно в виде $\rho\, dx = \rho_0\, da$, или

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t = \rho_0,$$

где $\rho_0(a)$ есть заданное начальное распределение плотности. Скорость жидкой частицы есть, по определению, $v = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a$, а производная $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a$ определяет изменение со временем скорости данной частицы по мере ее движения. Уравнение Эйлера напишется в виде

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t,$$

а уравнение адиабатичности:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_a = 0.$$

§ 3. Гидростатика

Для покоящейся жидкости, находящейся в однородном поле тяжести, уравнение Эйлера (2.4) принимает вид

$$\operatorname{grad} p = \rho \mathbf{g}. \tag{3.1}$$

Это уравнение описывает механическое равновесие жидкости. (Если внешние силы вообще отсутствуют, то уравнение равновесия гласит просто $\nabla p = 0$, т. е. $p = \mathrm{const}$, — давление одинаково во всех точках жидкости.)

Уравнение (3.1) непосредственно интегрируется, если плотность жидкости можно считать постоянной во всем ее объеме, т. е. если не происходит заметного сжатия жидкости под действием внешнего поля. Направляя ось z вертикально вверх, имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Отсюда

$$p = -\rho g z + \mathrm{const}.$$

Если покоящаяся жидкость имеет свободную поверхность (на высоте h), к которой приложено одинаковое во всех точках внешнее давление p_0, то эта поверхность должна быть горизонтальной плоскостью $z = h$. Из условия $p = p_0$ при $z = h$ имеем

$$\mathrm{const} = p_0 + \rho g h,$$

так что

$$p = p_0 + \rho g(h - z). \tag{3.2}$$

Для больших масс жидкости или газа плотность ρ нельзя, вообще говоря, считать постоянной; это в особенности относится к газам (например, к воздуху). Предположим, что жидкость находится не только в механическом, но и в тепловом равновесии. Тогда температура одинакова во всех точках жидкости, и уравнение (3.1) может быть проинтегрировано следующим образом. Воспользуемся известным термодинамическим соотношением

$$d\Phi = -s\,dT + V\,dp,$$

где Φ — термодинамический потенциал, отнесенный к единице массы жидкости. При постоянной температуре

$$d\Phi = V\,dp = \frac{1}{\rho}\,dp.$$

Отсюда видно, что выражение $\frac{1}{\rho}\nabla p$ можно написать в рассматриваемом случае как $\nabla\Phi$, так что уравнение равновесия (3.1) принимает вид

$$\nabla\Phi = \mathbf{g}.$$

Для постоянного вектора $\mathbf{g}$, направленного вдоль оси z (в отрицательном ее направлении), имеет место тождество

$$\mathbf{g} = -\nabla(gz).$$

Таким образом,

$$\nabla(\Phi + gz) = 0,$$

откуда находим, что вдоль всего объема жидкости должна быть постоянной сумма

$$\Phi + gz = \text{const}; \tag{3.3}$$

gz представляет собой потенциальную энергию единицы массы жидкости в поле тяжести. Условие (3.3) известно уже из статистической физики как условие термодинамического равновесия системы, находящейся во внешнем поле.

Отметим здесь еще следующее простое следствие из уравнения (3.1). Если жидкость или газ (например, воздух) находятся в механическом равновесии в поле тяжести, то давление в них может быть функцией только от высоты z (если бы на данной высоте давление было различно в различных местах, то возникло бы движение). Тогда из (3.1) следует, что и плотность

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{3.4}$$

тоже является функцией только от z. Но давление и плотность однозначно определяют температуру в данной точке тела. Следовательно, и температура должна быть функцией только от z.

Таким образом, при механическом равновесии в поле тяжести распределение давления, плотности и температуры зависит только от высоты. Если же, например, температура различна в разных местах жидкости на одной и той же высоте, то механическое равновесие в ней невозможно.

Наконец, выведем уравнение равновесия очень большой массы жидкости, части которой удерживаются вместе силами гравитационного притяжения (звезда). Пусть φ — ньютоновский гравитационный потенциал создаваемого жидкостью поля. Он удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho, \tag{3.5}$$

где G — гравитационная постоянная. Напряженность гравитационного поля равна $\operatorname{grad}\varphi$, так что сила, действующая на массу ρ, есть $-\rho\operatorname{grad}\varphi$. Поэтому условие равновесия будет

$$\operatorname{grad} p = -\rho\operatorname{grad}\varphi.$$

Разделив это равенство на ρ, применив к обеим его частям операцию div и воспользовавшись уравнением (3.5), получим окончательное уравнение равновесия в виде

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\right) = -4\pi G\rho. \tag{3.6}$$

Подчеркнем, что здесь идет речь только о механическом равновесии; существование же полного теплового равновесия в уравнении (3.6) отнюдь не предполагается.

Если тело не вращается, то в равновесии оно будет иметь сферическую форму, а распределение плотности и давления в нем будет центрально-симметричным. Уравнение (3.6), написанное в сферических координатах, примет при этом вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho. \tag{3.7}$$

§ 4. Условие отсутствия конвекции

Жидкость может находиться в механическом равновесии (т. е. в ней может отсутствовать макроскопическое движение), не находясь при этом в тепловом равновесии. Уравнение (3.1), являющееся условием механического равновесия, может быть удовлетворено и при непостоянной температуре в жидкости. При этом, однако, возникает вопрос о том, будет ли такое равновесие устойчивым. Оказывается, что равновесие будет устойчивым лишь при выполнении определенного условия. Если это условие не выполняется, то равновесие неустойчиво, что приводит к появлению в жидкости беспорядочных течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась постоянная

температура. Такое движение носит название *конвекции*. Условие устойчивости механического равновесия является, другими словами, условием отсутствия конвекции. Оно может быть выведено следующим образом.

Рассмотрим элемент жидкости, находящийся на высоте z и обладающий удельным объемом $V(p,\, s)$, где p и s — равновесные давление и энтропия на этой высоте. Предположим, что этот элемент жидкости подвергается адиабатическому смещению на малый отрезок ξ вверх; его удельный объем станет при этом равным $V(p',\, s)$, где p' — давление на высоте $z+\xi$. Для устойчивости равновесия необходимо (хотя, вообще говоря, и не достаточно), чтобы возникающая при этом сила стремилась вернуть элемент в исходное положение. Это значит, что рассматриваемый элемент должен оказаться более тяжелым, чем «вытесненная» им в новом положении жидкость. Удельный объем последней есть $V(p',\, s')$, где s' — равновесная энтропия жидкости на высоте $z+\xi$. Таким образом, имеем условие устойчивости

$$V(p',\, s') - V(p', s) > 0.$$

Разлагая эту разность по степеням

$$s - s' = \frac{ds}{dz}\,\xi,$$

получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \tag{4.1}$$

Согласно термодинамическим формулам имеем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Теплоемкость c_p, как и температура T, есть величина всегда положительная; поэтому мы можем переписать (4.1) в виде

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \tag{4.2}$$

Большинство веществ расширяется при нагревании, т. е. $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p > 0$; тогда условие отсутствия конвекции сводится к неравенству

$$\frac{ds}{dz} > 0, \tag{4.3}$$

т. е. энтропия должна возрастать с высотой.

Отсюда легко найти условие, которому должен удовлетворять градиент температуры $\frac{dT}{dz}$. Раскрыв производную $\frac{ds}{dz}$, пишем

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0.$$

Наконец, подставив согласно (3.4)

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V},$$

получим

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g\beta T}{c_p}, \tag{4.4}$$

где $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — температурный коэффициент расширения. Если речь идет о равновесии столба газа, который можно считать идеальным (в термодинамическом смысле слова), то $\beta T = 1$ и условие (4.4) принимает вид

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p}. \tag{4.5}$$

Конвекция наступает при нарушении этих условий, т. е. если температура падает по направлению снизу вверх, причем ее градиент превышает по абсолютной величине указанное в (4.4), (4.5) значение [1]).

§ 5. Уравнение Бернулли

Уравнения гидродинамики заметно упрощаются в случае стационарного течения жидкости. Под *стационарным* (или *установившимся*) подразумевают такое течение, при котором в каждой точке пространства, занятого жидкостью, скорость течения остается постоянной во времени. Другими словами, $\mathbf{v}$ является функцией одних только координат, так что $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$. Уравнение (2.10) сводится теперь к равенству

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - [\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}] = -\operatorname{grad} w. \tag{5.1}$$

Введем понятие о *линиях тока* как линиях, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точке касания

[1]) Для воды при 20 °C значение в правой части (4.4) составляет около 1° на 6,7 км; для воздуха значение в правой части (4.5) составляет около 1° на 100 метров.

в данный момент времени; они определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \tag{5.2}$$

При стационарном движении жидкости линии тока остаются неизменными во времени и совпадают с траекториями частиц жидкости. При нестационарном течении такое совпадение, разумеется, не имеет места: касательные к линии тока дают направления скорости разных частиц жидкости в последовательных точках пространства в определенный момент времени, в то время как касательные к траектории дают направления скорости определенных частиц в последовательные моменты времени.

Умножим уравнение (5.1) на единичный вектор касательной к линии тока в каждой ее точке; этот единичный вектор обозначим $\mathbf{l}$. Проекция градиента на некоторое направление равна, как известно, производной, взятой по этому направлению. Поэтому искомая проекция от $\operatorname{grad} w$ есть $\partial w/\partial l$. Что касается вектора $[\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}]$, то он перпендикулярен к скорости $\mathbf{v}$, и потому его проекция на направление $\mathbf{l}$ равна нулю.

Таким образом, из уравнения (5.1) получаем

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) = 0.$$

Отсюда следует, что величина $\dfrac{v^2}{2} + w$ постоянна вдоль линии тока:

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const}. \tag{5.3}$$

Значение const, вообще говоря, различно для разных линий тока. Уравнение (5.3) называют *уравнением Бернулли* [1]).

Если течение жидкости происходит в поле тяжести, то к правой части уравнения (5.1) надо прибавить еще ускорение свободного падения $\mathbf{g}$. Выберем направление силы тяжести в качестве направления оси z, причем положительные значения z отсчитываются вверх. Тогда косинус угла между направлениями $\mathbf{g}$ и $\mathbf{l}$ равен производной $-dz/dl$, так что проекция $\mathbf{g}$ на $\mathbf{l}$ есть

$$-g\frac{dz}{dl}.$$

Соответственно этому будем иметь теперь

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + w + gz\right) = 0.$$

[1]) Оно было установлено для несжимаемой жидкости (см. § 10) *Д. Бернулли* в 1738 г.

Таким образом, уравнение Бернулли гласит, что вдоль линий тока остается постоянной сумма

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const}. \tag{5.4}$$

§ 6. Поток энергии

Выберем какой-нибудь неподвижный в пространстве элемент объема и определим, как меняется со временем энергия находящейся в этом объеме жидкости. Энергия единицы объема жидкости равна

$$\rho\frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon,$$

где первый член есть кинетическая энергия, а второй — внутренняя энергия (ε — внутренняя энергия единицы массы жидкости). Изменение этой энергии определяется частной производной

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right).$$

Для вычисления этой величины пишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$

или, воспользовавшись уравнением непрерывности (1.2) и уравнением движения (2.3),

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\frac{v^2}{2}\operatorname{div}\rho\mathbf{v} - \mathbf{v}\operatorname{grad}p - \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}.$$

В последнем члене заменяем $\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = (1/2)\mathbf{v}\nabla v^2$, а градиент давления согласно термодинамическому соотношению $dw = T\,ds + dp/\rho$ заменяем на $\rho\nabla w - \rho T\nabla s$ и получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\frac{v^2}{2}\operatorname{div}\rho\mathbf{v} - \rho\mathbf{v}\nabla\left(w + \frac{v^2}{2}\right) + \rho T\mathbf{v}\nabla s.$$

Для преобразования производной от $\rho\varepsilon$ воспользуемся термодинамическим соотношением

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho.$$

Имея в виду, что сумма $\varepsilon + p/\rho = \varepsilon + pV$ есть не что иное, как тепловая функция w единицы массы, находим

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = w\,d\rho + \rho T\,ds,$$

и потому

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = w\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -w\operatorname{div}\rho\mathbf{v} - \rho T\mathbf{v}\nabla s.$$

Здесь мы воспользовались также общим уравнением адиабатичности (2.6).

Собирая полученные выражения, находим для искомого изменения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\left(w+\frac{v^2}{2}\right)\operatorname{div}\rho\mathbf{v}-\rho(\mathbf{v}\nabla)\left(w+\frac{v^2}{2}\right),$$

или окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right\}. \tag{6.1}$$

Для того чтобы выяснить смысл полученного равенства, проинтегрируем его по некоторому объему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dV=-\int\operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right\}dV,$$

или, преобразовав стоящий справа объемный интеграл в интеграл по поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dV=-\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)d\mathbf{f}. \tag{6.2}$$

Слева стоит изменение в единицу времени энергии жидкости в некотором заданном объеме пространства. Стоящий справа интеграл по поверхности представляет собой, следовательно, количество энергии, вытекающей в единицу времени из рассматриваемого объема. Отсюда видно, что выражение

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right) \tag{6.3}$$

представляет собой вектор *плотности потока энергии*. Его абсолютная величина есть количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к направлению скорости.

Выражение (6.3) показывает, что каждая единица массы жидкости как бы переносит с собой при своем движении энергию $w+v^2/2$. Тот факт, что здесь стоит тепловая функция w, а не просто внутренняя энергия ε, имеет простой физический смысл. Подставив $w=\varepsilon+p/\rho$, напишем полный поток энергии через замкнутую поверхность в виде

$$-\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)d\mathbf{f}-\oint p\mathbf{v}\,d\mathbf{f}.$$

Первый член есть энергия (кинетическая и внутренняя), непосредственно переносимая (в единицу времени) проходящей через поверхность массой жидкости. Второй же член представляет собой работу, производимую силами давления над жидкостью, заключенной внутри поверхности.

§ 7. Поток импульса

Произведем теперь аналогичный вывод для импульса жидкости. Импульс единицы объема жидкости есть $\rho\mathbf{v}$. Определим скорость его изменения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v}.$$

Будем производить вычисления в тензорных обозначениях. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t}v_i.$$

Воспользуемся уравнением непрерывности (1.2), написав его в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

и уравнением Эйлера (2.3) в форме

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_i v_k.$$

Первый член справа напишем в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

и находим окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{7.1}$$

где тензор Π_{ik} определяется как

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \tag{7.2}$$

Он, очевидно, симметричен.

Для выяснения смысла тензора Π_{ik} проинтегрируем уравнение (7.1) по некоторому объему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i\, dV = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}\, dV.$$

Стоящий в правой части равенства интеграл преобразуем в

интеграл по поверхности [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i\, dV = -\oint \Pi_{ik}\, df_k. \qquad (7.3)$$

Интеграл слева есть изменение в единицу времени i-й компоненты импульса в рассматриваемом объеме. Поэтому стоящий справа интеграл по поверхности есть количество этого импульса, вытекающего в единицу времени через ограничивающую объем поверхность. Следовательно, $\Pi_{ik}df_k$ есть i-я компонента импульса, протекающего через элемент df поверхности. Если написать df_k в виде $n_k\,df$ (df — абсолютная величина элемента поверхности, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к нему), то мы найдем, что $\Pi_{ik}n_k$ есть поток i-й компоненты импульса, отнесенный к единице площади поверхности. Заметим, что согласно (7.2) $\Pi_{ik}n_k = pn_i + \rho v_i v_k n_k$; это выражение может быть написано в вектор- ном виде как

$$p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{n}). \qquad (7.4)$$

Таким образом, Π_{ik} есть i-я компонента количества импульса, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. Тензор Π_{ik} называют *тензором плотности потока импульса*. Поток энергии, являющейся скалярной величиной, определяется вектором; поток же импульса, который сам есть вектор, определяется тензором второго ранга.

Вектор (7.4) определяет поток вектора импульса в направлении $\mathbf{n}$, т. е. через поверхность, перпендикулярную к $\mathbf{n}$. В частности, выбирая направление единичного вектора $\mathbf{n}$ вдоль направления скорости жидкости, мы найдем, что в этом направлении переносится лишь продольная компонента импульса, причем плотность ее потока равна

$$p + \rho v^2.$$

В направлении же, перпендикулярном к скорости, переносится лишь поперечная (по отношению к $\mathbf{v}$) компонента импульса, а плотность ее потока равна просто p.

---

[1]) Правило преобразования интеграла по замкнутой поверхности в интеграл по охватываемому этой поверхностью объему можно сформулировать следующим образом: оно осуществляется заменой элемента поверхности df_i оператором $dV\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, который должен быть применен ко всему подынтегральному выражению

$$df_i \to dV\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

§ 8. Сохранение циркуляции скорости

Интеграл

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l},$$

взятый вдоль замкнутого контура, называют циркуляцией скорости вдоль этого контура.

Рассмотрим замкнутый контур, проведенный в жидкости в некоторый момент времени. Будем рассматривать его как «жидкий», т. е. как составленный из находящихся на нем частиц жидкости. С течением времени эти частицы передвигаются, а с ними перемещается и весь контур. Выясним, что происходит при этом с циркуляцией скорости вдоль контура. Другими словами, вычислим производную по времени

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l}.$$

Мы пишем здесь полную производную по времени соответственно тому, что ищем изменение циркуляции вдоль перемещающегося жидкого контура, а не вдоль контура, неподвижного в пространстве.

Во избежание путаницы будем временно обозначать дифференцирование по координатам знаком δ, оставив знак d для дифференцирования по времени. Кроме того, заметим, что элемент $d\mathbf{l}$ длины контура можно написать в виде разности $\delta\mathbf{r}$ радиус-векторов $\mathbf{r}$ точек двух концов этого элемента. Таким образом, напишем циркуляцию скорости в виде

$$\oint \mathbf{v}\delta\mathbf{r}.$$

При дифференцировании этого интеграла по времени надо иметь в виду, что меняется не только скорость, но и сам контур (т. е. его форма). Поэтому, внося знак дифференцирования по времени под знак интеграла, надо дифференцировать не только $\mathbf{v}$, но и $\delta\mathbf{r}$:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v}\delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{v}\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}.$$

Поскольку скорость $\mathbf{v}$ есть не что иное, как производная по времени от радиус-вектора $\mathbf{r}$, то

$$\mathbf{v}\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}\delta\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}\delta\mathbf{v} = \delta\frac{v^2}{2}.$$

Но интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю. Поэтому второй из написанных интегралов исчезает и остается

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v}\delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\delta\mathbf{r}.$$

Теперь остается подставить сюда для ускорения $d\mathbf{v}/dt$ его выражение согласно (2.9):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} w.$$

Применив формулу Стокса, получаем тогда (поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{grad} w \equiv 0$):

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\delta\mathbf{r} = \int \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{v}}{dt}\delta\mathbf{f} = 0.$$

Таким образом, переходя к прежним обозначениям, находим окончательно [1]:

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l} = 0,$$

или

$$\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l} = \text{const}. \tag{8.1}$$

Мы приходим к результату, что (в идеальной жидкости) циркуляция скорости вдоль замкнутого жидкого контура остается неизменной со временем. Это утверждение называют *теоремой Томсона* (*W. Thomson*, 1869) или *законом сохранения циркуляции скорости.* Подчеркнем, что он получен путем использования уравнения Эйлера в форме (2.9) и потому связан с предположением об изэнтропичности движения жидкости. Для неизэнтропического движения этот закон не имеет места [2].

Применив теорему Томсона к бесконечно малому замкнутому контуру δC и преобразовав интеграл по теореме Стокса, получим

$$\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot}\mathbf{v}\, d\mathbf{f} \approx \delta\mathbf{f}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} = \text{const}, \tag{8.2}$$

где $d\mathbf{f}$ — элемент жидкой поверхности, опирающийся на контур δC. Вектор $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ часто называют *завихренностью* [3] течения жидкости в данной ее точке. Постоянство произведения (8.2) можно наглядно истолковать, сказав, что завихренность переносится вместе с движущейся жидкостью.

З а д а ч а

Показать, что при неизэнтропическом течении для каждой перемещающейся частицы остается постоянным связанное с ней значение произведения $(\nabla s\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v})/\rho$ (*H. Ertel*, 1942).

---

[1] Этот результат сохраняет силу и в однородном поле тяжести, так как $\operatorname{rot}\mathbf{g} \equiv 0$.

[2] С математической точки зрения необходимо, чтобы между p и ρ существовала однозначная связь (при изэнтропическом движении она определяется уравнением $s(p, \rho) = \text{const}$). Тогда вектор $-\nabla p/\rho$ может быть написан в виде градиента некоторой функции, что и требуется для вывода теоремы Томсона.

[3] По английской терминологии — vorticity.

Р е ш е н и е. При неизэнтропическом движении правая часть уравнения Эйлера (2.3) не может быть заменена на $-\nabla w$ и вместо уравнения (2.11) получается

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{\rho^2}[\nabla\rho\cdot\nabla p]$$

(для краткости введено обозначение $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$). Умножим это равенство на ∇s; поскольку $s = s(p, \rho)$, то ∇s выражается линейно через ∇p и $\nabla\rho$ и произведение $\nabla s[\nabla\rho\cdot\nabla p] = 0$. После этого выражение в правой части уравнения преобразуем следующим образом:

$$\nabla s\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla s\cdot\operatorname{rot}[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] = -\operatorname{div}[\nabla s[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]] = -\operatorname{div}(\mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}\nabla s)) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}\nabla s)) =$$
$$= -(\boldsymbol{\omega}\nabla s)\operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\operatorname{grad}(\boldsymbol{\omega}\nabla s) + \boldsymbol{\omega}\operatorname{grad}(\mathbf{v}\nabla s).$$

Согласно (2.6) заменяем $(\mathbf{v}\nabla s) = -\partial s/\partial t$ и получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega}\nabla s) + \mathbf{v}\operatorname{grad}(\boldsymbol{\omega}\nabla s) + (\boldsymbol{\omega}\nabla s)\operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Первые два члена объединяются в $d(\boldsymbol{\omega}\nabla s)/dt$ (где $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)$), а в последнем заменяем согласно (1.3) $\rho\operatorname{div}\mathbf{v} = -d\rho/dt$. В результате получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{\omega}\nabla s}{\rho} = 0,$$

чем и выражается искомый закон сохранения.

§ 9. Потенциальное движение

Из закона сохранения циркуляции скорости можно вывести важное следствие. Будем считать сначала, что движение жидкости стационарно и рассмотрим линию тока, о которой известно, что в некоторой ее точке $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$. Проведем бесконечно малый контур, охватывающий линию тока вокруг этой точки; с течением времени он будет передвигаться вместе с жидкостью, все время охватывая собой ту же самую линию тока. Из постоянства произведения (8.2) следует поэтому, что $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ будет равен нулю вдоль всей линии тока.

Таким образом, если в какой-либо точке линии тока завихренность отсутствует, то она отсутствует и вдоль всей этой линии. Если движение жидкости не стационарно, то этот результат остается в силе, с той разницей, что надо говорить не о линии тока, а о траектории, описываемой с течением времени некоторой определенной жидкой частицей (напоминаем, что при нестационарном движении эти траектории не совпадают, вообще говоря, с линиями тока) [1].

[1]) Во избежание недоразумений отметим уже здесь, что этот результат теряет смысл при турбулентном движении. Отметим также, что завихренность может появиться на линии тока после пересечения ею так называемой ударной волны; мы увидим, что это связано с нарушением изэнтропичности течения (§ 114).

На первый взгляд отсюда можно было бы сделать следующий вывод. Рассмотрим стационарное обтекание какого-либо тела потоком жидкости. На бесконечности натекающий поток однороден; его скорость $\mathbf{v} = \mathrm{const}$, так что $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$ на всех линиях тока. Отсюда можно было бы заключить, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ будет равен нулю и вдоль всей длины всех линий тока, т. е. во всем пространстве.

Движение жидкости, при котором во всем пространстве $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$, называется *потенциальным* (или *безвихревым*) в противоположность вихревому движению, при котором ротор скорости отличен от нуля. Таким образом, мы пришли бы к результату, что стационарное обтекание всякого тела натекающим из бесконечности однородным потоком должно быть потенциальным.

Аналогичным образом из закона сохранения циркуляции скорости можно было бы сделать еще и следующий вывод. Предположим, что в некоторый момент времени движение жидкости (во всем ее объеме) потенциально. Тогда циркуляция скорости по любому замкнутому контуру в ней равна нулю [1]. В силу теоремы Томсона можно было бы заключить, что это будет иметь место и в течение всего дальнейшего времени, т. е. мы получили бы результат, что если движение жидкости потенциально в некоторый момент времени, то оно будет потенциальным и в дальнейшем (в частности, должно было бы быть потенциальным всякое движение, при котором в начальный момент времени жидкость вообще покоилась). Этому соответствует и тот факт, что уравнение (2.11) удовлетворяется при $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$ тождественно.

В действительности, однако, все эти заключения имеют лишь весьма ограниченную применимость. Дело в том, что приведенное выше доказательство сохранения равенства $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$ вдоль линии тока, строго говоря, неприменимо для линии, проходящей вдоль поверхности обтекаемого жидкостью твердого тела, уже просто потому, что ввиду наличия стенки нельзя провести в жидкости замкнутый контур, который охватывал бы собой такую линию тока. С этим обстоятельством связан тот факт, что уравнения движения идеальной жидкости допускают решения, в которых на поверхности обтекаемого жидкостью твердого тела происходит, как говорят, «отрыв струй»: линии тока, следовавшие вдоль поверхности, в некотором месте «отрываются» от нее, уходя в глубь жидкости. В результате возникает картина течения, характеризующаяся наличием отходящей от тела «поверхности тангенциального разрыва», на которой скорость жидкости (будучи направлена в каждой точке по касательной к поверх-

[1] Для простоты мы считаем здесь, что жидкость заполняет односвязную область пространства. Для многосвязной области получился бы тот же самый конечный результат, но при рассуждениях надо было бы делать специальные оговорки по поводу выбора контуров.

ности) терпит разрыв непрерывности. Другими словами, вдоль этой поверхности один слой жидкости как бы скользит по другому (на рис. 1 изображено обтекание с поверхностью разрыва, отделяющей движущуюся жидкость от образующейся позади тела «застойной» области неподвижной жидкости). С математической точки зрения скачок тангенциальной составляющей скорости представляет собой, как известно, поверхностный ротор скорости.

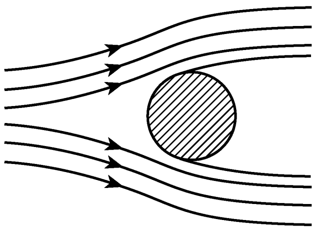


Рис. 1

При учете таких разрывных течений решение уравнений идеальной жидкости не однозначно: наряду с непрерывным решением они допускают также и бесчисленное множество решений с поверхностями тангенциальных разрывов, отходящими от любой наперед заданной линии на поверхности обтекаемого тела. Подчеркнем, однако, что все эти разрывные решения не имеют физического смысла, так как тангенциальные разрывы абсолютно неустойчивы, в результате чего движение жидкости становится в действительности турбулентным (см. об этом в гл. III).

Реальная физическая задача об обтекании заданного тела, разумеется, однозначна. Дело в том, что в действительности не существует строго идеальных жидкостей; всякая реальная жидкость обладает какой-то, хотя бы и малой, вязкостью. Эта вязкость может практически совсем не проявляться при движении жидкости почти во всем пространстве, но сколь бы она ни была мала, она будет играть существенную роль в тонком пристеночном слое жидкости. Именно свойства движения в этом (так называемом пограничном) слое и определят в действительности выбор одного из бесчисленного множества решений уравнений движения идеальной жидкости. При этом оказывается, что в общем случае обтекания тел произвольной формы отбираются именно решения с отрывом струй (что фактически приводит к возникновению турбулентности).

Несмотря на все изложенное, изучение решений уравнений движения, соответствующих непрерывному стационарному потенциальному обтеканию тел, имеет в некоторых случаях смысл. Между тем как в общем случае обтекания тел произвольной формы истинная картина течения практически ничего общего с картиной потенциального обтекания не имеет, в случае тел, имеющих некоторую особую («хорошо обтекаемую», см. § 46) форму, движение жидкости может очень мало отличаться от потенциального (точнее, оно будет не потенциальным лишь в тонком слое жидкости вблизи поверхности тела и в сравнительно узкой области «следа» позади тела).

Другим важным случаем, когда осуществляется потенциальное обтеканке, являются малые колебания погруженного в жидкость тела. Легко показать, что если амплитуда a колебаний мала по сравнению с линейными размерами l тела ($a \ll l$), то движение жидкости вокруг тела будет всегда потенциальным. Для этого оценим порядок величины различных членов в уравнении Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla w.$$

Скорость $\mathbf{v}$ испытывает заметное изменение (порядка скорости u колеблющегося тела) на протяжении расстояний порядка размеров тела l. Поэтому производные от $\mathbf{v}$ по координатам — порядка величины u/l. Порядок же величины самой скорости $\mathbf{v}$ определяется (на не слишком больших расстояниях от тела) скоростью u. Таким образом, имеем $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim u^2/l$. Производная же $\partial\mathbf{v}/\partial t$ — порядка величины ωu, где ω — частота колебаний. Поскольку $\omega \sim u/a$, то имеем $\partial\mathbf{v}/\partial t \sim u^2/a$. Из $a \ll l$ следует теперь, что член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ мал по сравнению с $\partial\mathbf{v}/\partial t$ и может быть опущен, так что уравнение движения жидкости приобретает вид $\partial\mathbf{v}/\partial t = -\nabla w$. Применив к обеим частям этого уравнения операцию rot, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

откуда $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \text{const}$. Но при колебательном движении среднее (по времени) значение скорости равно нулю; поэтому из $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \text{const}$ следует, что $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$. Таким образом, движение жидкости, совершающей малые колебания, является (в первом приближении) потенциальным.

Выясним теперь некоторые общие свойства потенциального движения жидкости. Прежде всего напомним, что вывод закона сохранения циркуляции, а с ним и всех дальнейших следствий, был основан на предположении об изэнтропичности течения. Если же движение не изэнтропично, то этот закон не имеет места; поэтому, даже если в некоторый момент времени движение является потенциальным, то в дальнейшем, вообще говоря, завихренность все же появится. Таким образом, фактически потенциальным может быть лишь изэнтропическое движение.

При потенциальном движении жидкости циркуляция скорости по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot}\mathbf{v}\, d\mathbf{f} = 0. \tag{9.1}$$

Из этого обстоятельства следует, в частности, что при потенциальном течении не могут существовать замкнутые линии

тока [1]). Действительно, поскольку направление линии тока совпадает в каждой точке с направлением скорости, циркуляция скорости вдоль такой линии во всяком случае была бы отличной от нуля.

При вихревом же движении циркуляция скорости, вообще говоря, отлична от нуля. В этом случае могут существовать замкнутые линии тока; надо, впрочем, подчеркнуть, что наличие замкнутых линий тока отнюдь не является необходимым свойством вихревого движения.

Как и всякое векторное поле с равным нулю ротором, скорость потенциально движущейся жидкости может быть выражена в виде градиента от некоторого скаляра. Этот скаляр называется *потенциалом скорости*; мы будем обозначать его через φ:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi. \tag{9.2}$$

Написав уравнение Эйлера в виде (2.10)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] = -\nabla w$$

и подставив в него $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, получаем

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w\right) = 0,$$

откуда находим следующее равенство:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = f(t), \tag{9.3}$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени. Это равенство представляет собой первый интеграл уравнений потенциального движения. Функция $f(t)$ в равенстве (9.3) может быть без ограничения общности положена равной нулю за счет неоднозначности в определении потенциала: поскольку скорость определяется производными от φ по координатам, можно прибавить к φ любую функцию времени.

При стационарном движении имеем (выбирая потенциал φ не зависящим от времени) $\partial\varphi/\partial t = 0$, $f(t) = \mathrm{const}$, и (9.3) переходит в уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + w = \mathrm{const}. \tag{9.4}$$

[1]) Этот результат, как и (9.1), может не иметь места при движении жидкости в многосвязной области пространства. При потенциальном течении в такой области циркуляция скорости может быть отличной от нуля, если замкнутый контур, вдоль которого она берется, не может быть стянут в точку так, чтобы нигде не пересечь границ области.

Необходимо подчеркнуть здесь следующее существенное отличие между уравнениями Бернулли в случае потенциального и непотенциального движений. В общем случае произвольного движения const в правой части этого уравнения есть величина, постоянная вдоль каждой данной линии тока, но, вообще говоря, различная для разных линий тока. При потенциальном же движении const в уравнении Бернулли есть величина, постоянная во всем объеме жидкости. Это обстоятельство в особенности повышает роль уравнения Бернулли при исследовании потенциального движения.

§ 10. Несжимаемая жидкость

В очень многих случаях течения жидкостей (и газов) их плотность можно считать неизменяющейся, т. е. постоянной вдоль всего объема жидкости в течение всего времени движения. Другими словами, в этих случаях при движении не происходит заметных сжатий или расширений жидкости. О таком движении говорят как о движении *несжимаемой жидкости.*

Общие уравнения гидродинамики сильно упрощаются при применении их к несжимаемой жидкости. Правда, уравнение Эйлера не меняет своего вида, если положить в нем $\rho = \mathrm{const}$, за исключением только того, что в уравнении (2.4) можно внести ρ под знак градиента:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \mathbf{g}. \tag{10.1}$$

Зато уравнение непрерывности принимает при $\rho = \mathrm{const}$ простой вид

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{10.2}$$

Поскольку плотность не является теперь неизвестной функцией, как это имеет место в общем случае, то в качестве основной системы уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости можно выбрать уравнения, содержащие только скорость. Такими уравнениями являются уравнение непрерывности (10.2) и уравнение (2.11):

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}]. \tag{10.3}$$

Уравнение Бернулли тоже может быть написано для несжимаемой жидкости в более простом виде. Уравнение (10.1) отличается от общего уравнения Эйлера (2.9) тем, что вместо ∇w в нем стоит $\nabla(p/\rho)$. Поэтому мы можем сразу написать уравнение Бернулли, заменив просто в (5.4) тепловую функцию

отношением p/ρ:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \tag{10.4}$$

Для несжимаемой жидкости можно писать p/ρ вместо w также и в выражении (6.3) для потока энергии, которое принимает тогда вид

$$\rho \mathbf{v}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right). \tag{10.5}$$

Действительно, согласно известному термодинамическому соотношению имеем для изменения внутренней энергии выражение $d\varepsilon = T\,ds - p\,dV$; при $s = \text{const}$ и $V = 1/\rho = \text{const}$ имеем $d\varepsilon = 0$, т. е. $\varepsilon = \text{const}$. Поскольку же постоянные члены в энергии несущественны, то можно опустить ε и в $w = \varepsilon + p/\rho$.

В особенности упрощаются уравнения для потенциального течения несжимаемой жидкости. Уравнение (10.3) удовлетворяется при $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ тождественно. Уравнение же (10.2) при подстановке $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$ превращается в

$$\Delta\varphi = 0, \tag{10.6}$$

т. е. в уравнение Лапласа для потенциала φ [1]. К этому уравнению должны быть добавлены граничные условия на поверхностях соприкосновения жидкости с твердыми телами: на неподвижных твердых поверхностях нормальная к поверхности компонента v_n скорости жидкости должна быть равна нулю, а в общем случае движущихся твердых тел v_n должна быть равна проекции скорости движения тела на направление той же нормали (эта скорость является заданной функцией времени). Скорость v_n равна, с другой стороны, производной от потенциала φ по направлению нормали: $v_n = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$. Таким образом, граничные условия в общем случае гласят, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ является на границах заданной функцией времени и координат.

При потенциальном движении скорость связана с давлением уравнением (9.3). В случае несжимаемой жидкости в этом уравнении можно писать p/ρ вместо w:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t). \tag{10.7}$$

Отметим здесь следующее важное свойство потенциального движения несжимаемой жидкости. Пусть через жидкость движется какое-нибудь твердое тело. Если возникающее при этом

[1] Потенциал скорости был впервые введен Эйлером. Им же было получено для этой величины уравнение вида (10.6), получившее впоследствии название уравнения Лапласа.

течение жидкости является потенциальным, то это течение зависит в каждый момент только от скорости движущегося тела в этот же момент времени, но, например, не от его ускорения. Действительно, самое уравнение (10.6) не содержит времени явно; время входит в решение лишь через граничные условия, содержащие только скорость движущегося в жидкости тела.

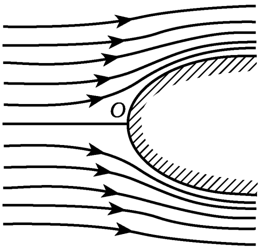


Рис. 2

Из уравнения Бернулли $v^2/2 + p/\rho = \mathrm{const}$ видно, что при стационарном движении несжимаемой жидкости (без поля тяжести) наибольшее значение давления достигается в точках, где скорость обращается в нуль. Такая точка обычно имеется на поверхности обтекаемого жидкостью тела (точка O на рис. 2) и называется *критической точкой*. Если u — скорость натекающего на тело потока жидкости (т. е. скорость жидкости на бесконечности), а p_0 — давление на бесконечности, то давление в критической точке равно

$$p_{\max} = p_0 + \frac{\rho u^2}{2}. \tag{10.8}$$

Если распределение скоростей в движущейся жидкости зависит только от двух координат, скажем от x и y, причем скорость параллельна везде плоскости xy, то о таком течении говорят как о *двумерном* или *плоском*. Для решения задач о двумерном течении несжимаемой жидкости иногда бывает удобным выражать скорость через так называемую функцию тока. Из уравнения непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

видно, что компоненты скорости могут быть написаны в виде производных

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10.9}$$

от некоторой функции $\psi(x, y)$, называемой *функцией тока*. Уравнение непрерывности при этом удовлетворяется автоматически. Уравнение же, которому должна удовлетворять функция тока, получается подстановкой (10.9) в уравнение (10.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} = 0. \tag{10.10}$$

Зная функцию тока, можно непосредственно определить форму линий тока для стационарного движения жидкости. Действи-

тельно, дифференциальное уравнение линий тока (при двумерном течении) есть

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

или $v_y\,dx - v_x\,dy = 0$; оно выражает собой тот факт, что направление касательной к линии тока в каждой точке совпадает с направлением скорости. Подставляя сюда (10.9), получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy = d\psi = 0,$$

откуда $\psi = \mathrm{const}$. Таким образом, линии тока представляют собой семейство кривых, получающихся приравниванием функции $\psi(x,\,y)$ произвольной постоянной.

Если между двумя точками *1* и *2* в плоскости xy провести кривую, то поток жидкости Q через эту кривую определится разностью значений функции тока в этих точках независимо от формы кривой. Действительно, если v_n — проекция скорости на нормаль к кривой в данной ее точке, то

$$Q = \rho\int_1^2 v_n\,dl = \rho\int_1^2 (-v_y\,dx + v_x\,dy) = \rho\int_1^2 d\psi,$$

или

$$Q = \rho\,(\psi_2 - \psi_1). \qquad (10.11)$$

Мощные методы решения задач о плоском потенциальном обтекании несжимаемой жидкостью различных профилей связаны с применением к ним теории функций комплексного переменного [1]). Основание для этих применений заключается в следующем. Потенциал и функция тока связаны с компонентами скорости соотношениями [2])

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Но такие соотношения между производными функций φ и ψ с математической точки зрения совпадают с известными условиями Коши–Римана, выражающими собой тот факт, что комплексное выражение

$$w = \varphi + i\psi \qquad (10.12)$$

[1]) Подробное изложение этих методов и их многочисленных применений может быть найдено во многих курсах и монографиях по гидродинамике с более математическим уклоном. Здесь мы ограничиваемся лишь объяснением основной идеи метода.

[2]) Напомним, однако, что существование самой по себе функции тока связано только с двумерностью течения, и отнюдь не требует его потенциальности.

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$. Это значит, что функция $w(z)$ будет иметь в каждой точке определенную производную

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_x - iv_y. \tag{10.13}$$

Функцию w называют *комплексным потенциалом*, а $\frac{dw}{dz}$ — комплексной скоростью. Модуль и аргумент последней определяют абсолютную величину скорости v и угол θ ее наклона к направлению оси x:

$$\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta}. \tag{10.14}$$

На твердой поверхности обтекаемого контура скорость должна быть направлена по касательной к нему. Другими словами, контур должен совпадать с одной из линий тока, т. е. на нем должно быть $\psi = \text{const}$; эту постоянную можно выбрать равной нулю, и тогда задача об обтекании жидкостью заданного контура сводится к определению аналитической функции $w(z)$, принимающей на этом контуре вещественные значения. Более сложна постановка задачи в случаях, когда жидкость имеет свободную поверхность (такой пример — см. задачу 9 к этому параграфу).

Интеграл от аналитической функции по какому-либо замкнутому контуру C равен, как известно, умноженной на $2\pi i$ сумме вычетов этой функции относительно ее простых полюсов, расположенных внутри C, поэтому

$$\oint w'\,dz = 2\pi i \sum_k A_k,$$

где A_k — вычеты комплексной скорости. С другой стороны, имеем

$$\oint w'\,dz = \oint (v_x - iv_y)(\,dx + i\,dy) = \\ = \oint (v_x\,dx + v_y\,dy) + i\oint (v_x\,dy - v_y\,dx).$$

Вещественная часть этого выражения есть не что иное, как циркуляция Γ скорости по контуру C. Мнимая же часть (умноженная на ρ) представляет собой поток жидкости через этот контур; при отсутствии внутри контура источников жидкости этот поток равен нулю, и тогда имеем просто

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k \tag{10.15}$$

(все вычеты A_k при этом чисто мнимые).

Наконец, остановимся на условиях, при выполнении которых жидкость можно считать несжимаемой. При адиабатическом изменении давления на Δp плотность жидкости изменится на

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \Delta p.$$

Но согласно уравнению Бернулли колебания давления в стационарно движущейся жидкости — порядка величины $\Delta p \sim \rho v^2$. Производная же $(\partial p/\partial\rho)_s$ представляет собой (как мы увидим в § 64) квадрат скорости звука c в жидкости. Таким образом, находим оценку

$$\Delta\rho \sim \rho v^2/c^2.$$

Жидкость можно считать несжимаемой, если $\Delta\rho/\rho \ll 1$. Мы видим, что необходимым условием для этого является малость скорости ее движения по сравнению со скоростью звука:

$$v \ll c. \qquad (10.16)$$

Это условие достаточно, однако, только при стационарном движении. При нестационарном движении необходимо выполнение еще одного условия. Пусть τ и l — величины порядка промежутков времени и расстояний, на которых скорость жидкости испытывает заметное изменение. Сравнив члены $\partial\mathbf{v}/\partial t$ и $\nabla p/\rho$ в уравнении Эйлера, получим, по порядку величины, $v/\tau \sim \Delta p/l\rho$ или $\Delta p \sim l\rho v/\tau$, а соответствующее изменение ρ есть $\Delta\rho \sim l\,\rho v/\tau c^2$. Сравнив теперь члены $\partial\rho/\partial t$ и $\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ в уравнении непрерывности, найдем, что производной $\partial\rho/\partial t$ можно пренебречь (т. е. можно считать, что $\rho = \mathrm{const}$) в случае, если $\Delta\rho/\tau \ll \rho v/l$ или

$$\tau \gg \frac{l}{c}. \qquad (10.17)$$

Выполнение обоих условий (10.16) и (10.17) достаточно для того, чтобы можно было считать жидкость несжимаемой. Условие (10.17) имеет наглядный смысл — оно означает, что время l/c, в течение которого звуковой сигнал пройдет расстояние l, мало по сравнению со временем τ, в течение которого заметно изменяется движение жидкости и, таким образом, дает возможность рассматривать процесс распространения взаимодействий в жидкости как мгновенный.

Задачи

1. Определить форму поверхности несжимаемой жидкости в поле тяжести в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω.

Р е ш е н и е. Ось z выбираем по оси цилиндра. Тогда $v_x = -\Omega y$, $v_y = \Omega x$, $v_z = 0$. Уравнение непрерывности удовлетворяется автоматически, а

уравнение Эйлера (10.1) дает

$$x\Omega^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad y\Omega^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0.$$

Общий интеграл этих уравнений есть

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2+y^2) - gz + \text{const}.$$

На свободной поверхности $p = \text{const}$, так что эта поверхность является параболоидом: $z = \left(\dfrac{\Omega^2}{2g}\right)(x^2+y^2)$ (начало координат — в низшей точке поверхности).

2. Шар (радиуса R) движется в несжимаемой идеальной жидкости. Определить потенциальное течение жидкости вокруг шара.

Р е ш е н и е. На бесконечности скорость жидкости должна обращаться в нуль. Обращающимися на бесконечности в нуль решениями уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ являются, как известно, $1/r$ и производные различных порядков от $1/r$ по координатам (начало координат — в центре шара). Ввиду полной симметрии шара в решение может войти лишь один постоянный вектор — скорость $\mathbf{u}$, а ввиду линейности уравнения Лапласа и граничного условия к нему φ должно содержать $\mathbf{u}$ линейным образом. Единственным скаляром, который можно составить из $\mathbf{u}$ и производных от $1/r$, является произведение $\mathbf{u}\nabla(1/r)$. Соответственно этому ищем φ в виде

$$\varphi = \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{An}}{r^2}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора). Постоянная $\mathbf{A}$ определяется из условия равенства нормальных к поверхности шара компонент скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ ($\mathbf{vn} = \mathbf{un}$) при $r = R$. Это условие дает $A = uR^3/2$, так что

$$\varphi = -\frac{R^3}{2r^2}\mathbf{un}, \quad \mathbf{v} = \frac{R^3}{2r^3}[3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}].$$

Распределение давления определяется формулой (10.7):

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

(p_0 — давление на бесконечности). При вычислении производной $\partial\varphi/\partial t$ надо иметь в виду, что начало координат (выбранное нами в центре шара) смещается со временем со скоростью $\mathbf{u}$. Поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\nabla\varphi.$$

Распределение давления на поверхности шара дается формулой

$$p = p_0 + \frac{\rho u^2}{8}(9\cos^2\theta - 5) + \frac{\rho}{2}R\mathbf{n}\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

(θ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{u}$).

3. То же для бесконечного цилиндра, движущегося перпендикулярно к своей оси [1]).

[1]) Решение более общих задач о потенциальном обтекании эллипсоида и цилиндра эллиптического сечения см. в книгах:

Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — Физматгиз, 1963. ч. 1, гл. VII; *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. § 103–116 (*Lamb H.* Hydrodynamics. — Cambridge. 1932).

Р е ш е н и е. Течение не зависит от координаты вдоль оси цилиндра, так что приходится решать двумерное уравнение Лапласа. Обращающимися в нуль на бесконечности решениями являются производные от $\ln r$ по координатам, начиная от первого порядка и выше ($\mathbf{r}$ — перпендикулярный к оси цилиндра радиус-вектор). Ищем решение в виде

$$\varphi = \mathbf{A}\nabla \ln r = \frac{\mathbf{An}}{r}$$

и с помощью граничных условий получаем $\mathbf{A} = -R^2\mathbf{u}$, так что

$$\varphi = -\frac{R^2}{r}\mathbf{un}, \quad \mathbf{v} = \frac{R^2}{r^2}[2\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}].$$

Давление на поверхности цилиндра дается формулой

$$p = p_0 + \frac{\rho u^2}{2}(4\cos^2\theta - 3) + \rho R\mathbf{n}\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

4. Определить потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости в эллипсоидальном сосуде, вращающемся вокруг одной из своих главных осей с угловой скоростью Ω; определить полный момент импульса жидкости в сосуде.

Р е ш е н и е. Выбираем декартовы координаты x, y, z вдоль осей эллипсоида в данный момент времени; ось вращения совпадает с осью z. Скорость стенки сосуда есть $\mathbf{u} = [\mathbf{\Omega r}]$, так что граничное условие $v_n = \partial\varphi/\partial n = u_n$ есть

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \Omega(xn_y - yn_x),$$

или, используя уравнение эллипсоида $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$:

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy\Omega\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее этому условию, есть

$$\varphi = \Omega\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}xy. \tag{1}$$

Момент импульса жидкости в сосуде

$$M = \rho\int(xv_y - yv_x)\,dV.$$

Интегрируя по объему эллипсоида, получаем

$$M = \frac{\Omega\rho V}{5}\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 + b^2}.$$

Формула (1) определяет абсолютное движение жидкости, отнесенное к мгновенному положению осей x, y, z, связанных с вращающимся сосудом. Движение же относительно сосуда (т. е. относительно вращающейся системы координат x, y, z), получится вычитанием скорости $[\mathbf{\Omega r}]$ из абсолютной скорости жидкости; обозначив относительную скорость жидкости $\mathbf{v}'$, имеем

$$v'_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \Omega y = \frac{2\Omega a^2}{a^2 + b^2}y, \quad v'_y = -\frac{2\Omega b^2}{a^2 + b^2}x, \quad v'_z = 0.$$

Траектории относительного движения получаются путем интегрирования уравнений $\dot{x} = v'_x$, $\dot{y} = v'_y$ и представляют эллипсы $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \mathrm{const}$, подобные граничному эллипсу.

5. Определить течение жидкости вблизи критической точки на обтекаемом теле (см. рис. 2).

Р е ш е н и е. Малый участок поверхности тела вблизи критической точки можно рассматривать как плоский. Выбираем его в качестве плоскости xy. Разлагая φ при малых x, y, z в ряд, имеем с точностью до членов второго порядка:

$$\varphi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Byz + Fxz$$

(постоянный член в φ несуществен). Постоянные коэффициенты определяем так, чтобы φ удовлетворяло уравнению $\Delta\varphi = 0$ и граничным условиям $v_z = \partial\varphi/\partial z = 0$ при $z = 0$ и всех x, y и $\partial\varphi/\partial x = \partial\varphi/\partial y = 0$ при $x = y = z = 0$ (в критической точке). Это дает

$$a = b = c = 0; \; C = -A - B, \; E = F = 0.$$

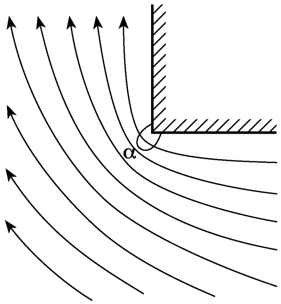


Рис. 3

Член Dxy может быть всегда исключен соответствующим поворотом осей x и y. В результате получаем

$$\varphi = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2. \tag{1}$$

Если течение обладает аксиальной симметрией вокруг оси z (симметричное обтекание тела вращения), то должно быть $A = B$, так что

$$\varphi = A(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Компоненты скорости равны

$$v_x = 2Ax, \quad v_y = 2Ay, \quad v_z = -4Az.$$

Линии тока определяются уравнениями (5.2), откуда $x^2z = c_1$, $y^2z = c_2$, т. е. линии тока являются кубическими гиперболами.

Если течение является однородным вдоль оси y (например, при обтекании в направлении оси z цилиндра с осью вдоль оси y), то в (1) должно быть $B = 0$, так что

$$\varphi = A(x^2 - z^2).$$

Линиями тока являются гиперболы $xz = \text{const}$.

6. Определить движение жидкости при потенциальном обтекании угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями (вблизи вершины угла).

Р е ш е н и е. Выбираем полярные координаты r, θ в плоскости поперечного сечения, перпендикулярной к линии пересечения плоскостей, с началом в вершине угла. Угол θ отсчитывается от одной из прямых, образующих сечение угла. Пусть α есть величина обтекаемого угла; при $\alpha < \pi$ течение происходит внутри угла, при $\alpha > \pi$ — вне его. Граничное условие исчезновения нормальной составляющей скорости гласит $d\varphi/d\theta = 0$ при $\theta = 0$ и α. Удовлетворяющее этому условию решение уравнения Лапласа пишем в виде [1])

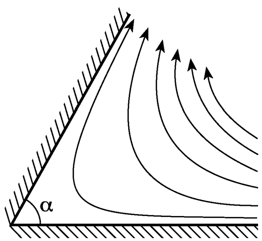


Рис. 4

$$\varphi = Ar^n \cos n\theta, \quad n = \pi/\alpha,$$

так что

$$v_r = nAr^{n-1} \cos n\theta, \quad v_\theta = -nAr^{n-1} \sin n\theta.$$

При $n < 1$ (обтекание выпуклого угла; рис. 3) v обращается в начале координат в бесконечность как $r^{-(1-n)}$. При $n > 1$ (течение внутри вогнутого угла — рис. 4) v обращается при $r = 0$ в нуль.

[1]) Выбираем решение с наиболее низкой (малые r!) положительной степенью r.

Функция тока, определяющая форму линий тока, есть

$$\psi = Ar^n \sin n\theta.$$

Полученные для φ и ψ выражения являются вещественной и мнимой частями комплексного потенциала $w = Az^n$ [1]).

7. Из несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, внезапно удаляется сферический объем радиуса a. Определить время, в течение которого образовавшаяся полость заполнится жидкостью (*Besant*, 1859; *Rayleigh*, 1917).

Р е ш е н и е. Движение жидкости после образования полости будет центрально-симметрическим со скоростями, направленными в каждой точке по радиусу к центру. Для радиальной скорости

$$v_r \equiv v < 0$$

имеем уравнение Эйлера (в сферических координатах)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{1}$$

Уравнение непрерывности дает

$$r^2 v = F(t), \tag{2}$$

где $F(t)$ — произвольная функция времени; это равенство выражает собой тот факт, что в силу несжимаемости жидкости объем, протекающий через сферу любого радиуса, не зависит от последнего.

Подставляя v из (2) в (1), имеем

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

Интегрируя это уравнение по r в пределах от ∞ до радиуса

$$R = R(t) \leqslant a$$

заполняющейся полости, получим

$$-\frac{F'(t)}{R(t)} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}, \tag{3}$$

где $V = dR(t)/dt$ — скорость изменения радиуса полости, а p_0 — давление на бесконечности; скорость жидкости на бесконечности, а также давление на поверхности полости равны нулю. Написав соотношение (2) для точек на поверхности полости, находим

$$F(t) = R^2(t)V(t)$$

и, подставив это выражение для $F(t)$ в (3), получим следующее уравнение:

$$-\frac{3V^2}{2} - \frac{1}{2}R\frac{dV^2}{dR} = \frac{p_0}{\rho}. \tag{4}$$

В этом уравнении переменные разделяются и, интегрируя его при начальном условии $V = 0$ при $R = a$ (в начальный момент жидкость покоилась), найдем

$$V = \frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)}.$$

[1]) Задачи 5 и 6, если рассматривать граничные плоскости в них как бесконечные, вырождены в том смысле, что значения постоянных коэффициентов A, B в их решениях остаются неопределенными. В реальных случаях обтекания конечных тел эти значения определяются условиями задачи в целом.

Отсюда имеем для искомого полного времени заполнения полости:

$$\tau = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{(a/R^3) - 1}}.$$

Этот интеграл приводится к виду B-интеграла Эйлера, и вычисление дает окончательно:

$$\tau = \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_0}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} = 0{,}915a\sqrt{\frac{\rho}{p_0}}.$$

8. Погруженная в несжимаемую жидкость сфера расширяется по заданному закону $R = R(t)$. Определить давление жидкости на поверхности сферы.

Р е ш е н и е. Обозначим искомое давление через $P(t)$. Вычисления в точности аналогичны произведенным в предыдущей задаче с той лишь разницей, что при $r = R$ давление равно не нулю, а $P(t)$. В результате получим вместо (3) уравнение

$$-\frac{F'(t)}{R(t)} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{P(t)}{\rho}$$

и соответственно вместо (4) уравнение

$$\frac{p_0 - P(t)}{\rho} = -\frac{3V^2}{2} - RV\frac{dV}{dR}.$$

Имея в виду, что $V = dR/dt$, можно привести выражение для $P(t)$ к виду

$$P(t) = p_0 + \frac{\rho}{2}\left[\frac{d^2(R^2)}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right].$$

9. Определить форму струи, вытекающей из бесконечно длинной щели прорезанной в плоской стенке.

Р е ш е н и е. Пусть в плоскости xy стенка совпадает с осью x, отверстие есть отрезок $-a/2 \leqslant x \leqslant a/2$ этой оси, а жидкость занимает полуплоскость $y > 0$. Вдали от стенки (при $y \to \infty$) скорость жидкости равна нулю, а давление пусть будет p_0.

На свободной поверхности струи (BC и $B'C'$ на рис. 5 *а*) давление $p = 0$, а скорость согласно уравнению Бернулли имеет постоянную величину $v_1 = \sqrt{2p_0/\rho}$. Линии стенки, продолжающиеся в свободную границу струи, представляют собой линии тока. Пусть на линии ABC $\psi = 0$; тогда на линии $A'B'C'$ $\psi = -Q/\rho$, где $Q = \rho a_1 v_1$ — расход жидкости в струе (a_1, v_1 — ширина струи и скорость жидкости в ней на бесконечности). Потенциал φ меняется как на линии ABC, так и на линии $A'B'C'$ от $-\infty$ до $+\infty$; пусть в точках B и B' $\varphi = 0$. Тогда в плоскости комплексного переменного w области течения будет соответствовать бесконечная полоса ширины Q/ρ (обозначения точек на рис. 5 *б–г* соответствуют обозначениям на рис. 5 *а* в плоскости xy).

Введем новую комплексную переменную — логарифм комплексной скорости:

$$\zeta = -\ln\left(\frac{1}{v_1 e^{i\pi/2}}\frac{dw}{dz}\right) = \ln\frac{v_1}{v} + i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \qquad (1)$$

($v_1 e^{i\pi/2}$ — комплексная скорость на бесконечности струи). На $A'B'$ имеем $\theta = 0$, на AB $\theta = -\pi$, на BC и $B'C'$ $v = v_1$, причем на бесконечности

струи $\theta = -\pi/2$. Поэтому в плоскости переменного ζ, области течения соответствует полуполоса ширины π, расположенная в правой полуплоскости (рис. 5 *в*). Если мы теперь найдем конформное преобразование, переводящее полосу плоскости w в полуполосу плоскости ζ (с указанным на рис. 5 соответствием точек), то тем самым мы определим w как функцию от dw/dz; функция w может быть найдена затем одной квадратурой.

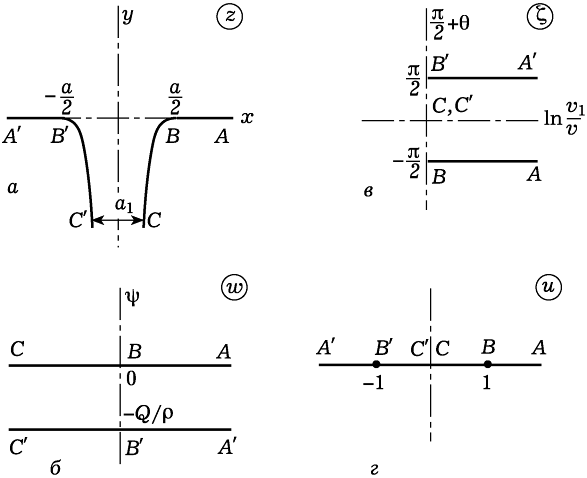


Рис. 5

Для того чтобы найти искомое преобразование, введем еще одну вспомогательную комплексную переменную u, такую, чтобы в плоскости u области течения соответствовала верхняя полуплоскость, причем точкам B и B' соответствуют точки $u = \pm 1$, точкам C, C' $u = 0$, а бесконечно удаленным точкам A и A' $u = \pm\infty$ (рис. 5 *г*). Зависимость w от этой вспомогательной переменной определяется конформным преобразованием, переводящим верхнюю полуплоскость u в полосу плоскости w. При условленном соответствии точек это есть

$$w = -\frac{Q}{\rho\pi}\ln u. \tag{2}$$

Чтобы найти зависимость ζ от u, надо найти конформное отображение полуполосы плоскости ζ в верхнюю полуплоскость u. Рассматривая эту полуполосу как треугольник, одна из вершин которого удалена в бесконечность, можно найти искомое отображение с помощью известной формулы Шварца–Кристоффеля:

$$\zeta = -i\,\arcsin u. \tag{3}$$

Формулы (2), (3) решают задачу, определяя в параметрическом виде зависимость dw/dz от w.

Определим форму струи. На BC имеем $w = \varphi$, $\zeta = i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$, а u меняется между 0 и 1. Из (2) и (3) получаем

$$w = -\frac{Q}{\rho\pi}\ln(-\cos\theta), \tag{4}$$

а из (1) $d\varphi/dz = v_1 e^{-i\theta}$, или

$$dz \equiv dx + i\,dy = \frac{1}{v_1} e^{i\theta}\,d\varphi = \frac{a_1}{\pi} e^{i\theta}\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta,$$

откуда интегрированием (с условиями $y = 0$, $x = a/2$ при $\theta = -\pi$) найдем в параметрическом виде форму струи. В частности, для сжатия струи получается $a_1/a = \pi/(2+\pi) = 0{,}61$.

§ 11. Сила сопротивления при потенциальном обтекании

Рассмотрим задачу о потенциальном обтекании несжимаемой идеальной жидкостью какого-либо твердого тела. Такая задача, конечно, полностью эквивалентна задаче об определении течения жидкости при движении через нее того же тела. Для получения второго случая из первого достаточно перейти к системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится. Мы будем говорить ниже именно о движении твердого тела через жидкость.

Определим характер распределения скоростей в жидкости на больших расстояниях от движущегося тела. Потенциальное движение несжимаемой жидкости определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Мы должны рассмотреть такие решения этого уравнения, которые обращаются на бесконечности в нуль, поскольку жидкость на бесконечности неподвижна. Выберем начало координат где-нибудь внутри движущегося тела (эта система координат движется вместе с телом; мы, однако, рассматриваем распределение скоростей в жидкости в некоторый заданный момент времени). Как известно, уравнение Лапласа имеет решением $1/r$, где r — расстояние от начала координат. Решением являются также градиент $\nabla(1/r)$ и следующие производные от $1/r$ по координатам. Все эти решения (и их линейные комбинации) обращаются на бесконечности в нуль. Поэтому общий вид искомого решения уравнения Лапласа на больших расстояниях от тела есть

$$\varphi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} + \ldots\,,$$

где a, $\mathbf{A}$ не зависят от координат; опущенные члены содержат производные высших порядков от $1/r$. Легко видеть, что постоянная a должна быть равной нулю. Действительно, потенциал $\varphi = -a/r$ дает скорость

$$\mathbf{v} = -\nabla\frac{a}{r} = \frac{a\mathbf{r}}{r^3}.$$

Вычислим соответствующий поток жидкости через какую-нибудь замкнутую поверхность, скажем, сферу с радиусом R. На

этой поверхности скорость постоянна и равна a/R^2; поэтому полный поток жидкости через нее равен $\rho(a/R^2)\cdot 4\pi R^2 = 4\pi\rho a$. Между тем, поток несжимаемой жидкости через всякую замкнутую поверхность должен, очевидно, обращаться в нуль. Поэтому заключаем, что должно быть $a = 0$.

Таким образом, φ содержит члены, начиная с членов порядка $1/r^2$. Поскольку мы ищем скорость на больших расстояниях, то члены более высоких порядков можно опустить, и мы получаем

$$\varphi = \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{An}}{r^2}, \tag{11.1}$$

а для скорости $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}\nabla)\nabla\frac{1}{r} = \frac{3(\mathbf{An})\mathbf{n} - \mathbf{A}}{r^3} \tag{11.2}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$). Мы видим, что на больших расстояниях скорость падает, как $1/r^3$. Вектор $\mathbf{A}$ зависит от конкретной формы и скорости движения тела и может быть определен только путем полного решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ на всех расстояниях, с учетом соответствующих граничных условий на поверхности движущегося тела.

Входящий в (11.2) вектор $\mathbf{A}$ связан определенным образом с полным импульсом и с полной энергией жидкости, обтекающей движущееся в ней тело. Полная кинетическая энергия жидкости (внутренняя энергия несжимаемой жидкости постоянна) есть

$$E = \frac{\rho}{2}\int v^2\,dV,$$

где интегрирование производится по всему пространству вне тела. Выделим из пространства часть V, ограниченную сферой большого радиуса R, с центром в начале координат и будем интегрировать сначала только по объему V, а затем устремляя R к бесконечности. Имеем тождественно

$$\int v^2\,dV = \int u^2\,dV + \int(\mathbf{v}+\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dV,$$

где $\mathbf{u}$ — скорость тела. Поскольку $\mathbf{u}$ есть не зависящая от координат величина, то первый интеграл равен просто $u^2(V - V_0)$, где V_0 — объем тела. Во втором же интеграле пишем сумму $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ в виде $\nabla(\varphi + \mathbf{ur})$ и, воспользовавшись также тем, что $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ в силу уравнения непрерывности, а $\operatorname{div}\mathbf{u} \equiv 0$, имеем

$$\int v^2\,dV = u^2(V - V_0) + \int \operatorname{div}\{(\varphi + \mathbf{ur})(\mathbf{v}-\mathbf{u})\}\,dV.$$

Второй интеграл преобразуем в интеграл по поверхности S сферы и поверхности S_0 тела:

$$\int v^2\,dV = u^2(V - V_0) + \oint\limits_{S+S_0} (\varphi + \mathbf{ur})(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,d\mathbf{f}.$$

На поверхности тела нормальные компоненты $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ равны друг другу в силу граничных условий; поскольку вектор $d\mathbf{f}$ направлен как раз по нормали к поверхности, то ясно, что интеграл по S_0 тождественно обращается в нуль. На удаленной же поверхности S подставляем для φ и $\mathbf{v}$ выражения (11.1), (11.2) и опускаем члены, обращающиеся в нуль при переходе к пределу по $R \to \infty$. Написав элемент поверхности сферы S в виде $d\mathbf{f} = \mathbf{n}R^2\,do$, где do — элемент телесного угла, получим

$$\int v^2\,dV = u^2\left(\frac{4\pi}{3}R^3 - V_0\right) + \int \{3(\mathbf{An})(\mathbf{un}) - (\mathbf{un})^2 R^3\}\,do.$$

Наконец, произведя интегрирование [1]) и умножив на $\rho/2$, получаем окончательно следующее выражение для полной энергии жидкости:

$$E = \frac{\rho}{2}(4\pi\mathbf{Au} - V_0 u^2). \qquad (11.3)$$

Как уже указывалось, точное вычисление вектора $\mathbf{A}$ требует полного решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ с учетом конкретных граничных условий на поверхности тела. Общий характер зависимости $\mathbf{A}$ от скорости $\mathbf{u}$ тела можно, однако, установить уже непосредственно из факта линейности уравнения для φ и линейности (как по φ, так и по $\mathbf{u}$) граничных условий к этому уравнению. Из этой линейности следует, что $\mathbf{A}$ должно быть линейной же функцией от компонент вектора $\mathbf{u}$. Определяемая же формулой (11.3) энергия E является, следовательно, квадратичной функцией компонент вектора $\mathbf{u}$ и потому может быть представлена в виде

$$E = \frac{m_{ik}u_i u_k}{2}, \qquad (11.4)$$

где m_{ik} — некоторый постоянный симметрический тензор, компоненты которого могут быть вычислены с помощью компонент вектора $\mathbf{A}$; его называют тензором *присоединенных масс.*

---

[1]) Интегрирование по do эквивалентно усреднению подынтегрального выражения по всем направлениям вектора $\mathbf{n}$ и умножению затем на 4π. Для усреднения выражений типа $(\mathbf{An})(\mathbf{Bn}) \equiv A_i n_i B_k n_k$ ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — постоянные векторы), пишем

$$\overline{(\mathbf{An})(\mathbf{Bn})} = A_i B_k \overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}A_i B_k = \frac{1}{3}\mathbf{AB}.$$

Зная энергию E, можно получить выражение для полного импульса $\mathbf{P}$ жидкости. Для этого замечаем, что бесконечно малые изменения E и $\mathbf{P}$ связаны друг с другом соотношением $dE = \mathbf{u}\,dP$ [1]); отсюда следует, что если E выражено в виде (11.4), то компоненты $\mathbf{P}$ должны иметь вид

$$P_i = m_{ik}u_k. \tag{11.5}$$

Наконец, сравнение формул (11.3)–(11.5) показывает, что $\mathbf{P}$ выражается через $\mathbf{A}$ следующим образом:

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0\mathbf{u}. \tag{11.6}$$

Следует обратить внимание на то, что полный импульс жидкости оказывается вполне определенной конечной величиной.

Передаваемый в единицу времени от тела к жидкости импульс есть $d\mathbf{P}/dt$. Взятый с обратным знаком, он определяет, очевидно, реакцию $\mathbf{F}$ жидкости, т. е. действующую на тело силу:

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt}. \tag{11.7}$$

Параллельная скорости тела составляющая $\mathbf{F}$ называется *силой сопротивления*, а перпендикулярная составляющая — *подъемной силой.*

Если бы было возможно потенциальное обтекание равномерно движущегося в идеальной жидкости тела, то полный импульс $\mathbf{P}$ был бы равен const (так как $\mathbf{u} = \text{const}$) и $\mathbf{F} = 0$. Другими словами, отсутствовала бы как сила сопротивления, так и подъемная сила, т. е. действующие на поверхность тела со стороны жидкости силы давления взаимно компенсировались бы (так называемый *парадокс Даламбера*). Происхождение этого «парадокса» в особенности очевидно для силы сопротивления. Действительно, наличие этой силы при равномерном движении тела означало бы, что для поддержания движения какой-либо внешний

---

[1]) Действительно, пусть тело ускоряется под влиянием какой-либо внешней силы $\mathbf{F}$. В результате импульс жидкости будет возрастать; пусть $d\mathbf{P}$ есть его приращение в течение времени dt. Это приращение связано с силой соотношением $d\mathbf{P} = \mathbf{F}\,dt$, а умноженное на скорость $\mathbf{u}$ дает $\mathbf{u}\,d\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{u}\,dt$, т. е. работу силы $\mathbf{F}$ на пути $\mathbf{u}\,dt$, которая в свою очередь должна быть равна увеличению энергии dE жидкости.

Следует заметить, что вычисление импульса непосредственно как интеграла $\int\rho\mathbf{v}\,dV$ по всему объему жидкости было бы невозможным. Дело в том, что этот интеграл (со скоростью $\mathbf{v}$, распределенной по (11.2)) расходится в том смысле, что результат интегрирования, хотя и конечен, но зависит от способа взятия интеграла: производя интегрирование по большой области, размеры которой устремляются затем к бесконечности, мы получили бы значение, зависящее от формы области (сфера, цилиндр и т. п.). Используемый же нами способ вычисления импульса, исходя из соотношения $\mathbf{u}\,d\mathbf{P} = dE$, приводит ко вполне определенному конечному значению (даваемому формулой (11.6)), заведомо удовлетворяющему физическому условию о связи изменения импульса с действующими на тело силами.

источник должен непрерывно производить работу, которая либо диссипируется в жидкости, либо преобразуется в ее кинетическую энергию, приводя к постоянно уходящему на бесконечность потоку энергии в движущейся жидкости. Но никакой диссипации энергии в идеальной жидкости, по определению, нет, а скорость приводимой телом в движение жидкости настолько быстро убывает с увеличением расстояния от тела, что никакого потока энергии на бесконечности тоже нет.

Следует, однако, подчеркнуть, что все эти соображения относятся лишь к движению тела в неограниченной жидкости. Если же, например, жидкость имеет свободную поверхность, то равномерно движущееся параллельно этой поверхности тело будет испытывать силу сопротивления. Появление этой силы (называемой *волновым сопротивлением*) связано с возникновением на свободной поверхности жидкости системы распространяющихся по ней волн, непрерывно уносящих энергию на бесконечность.

Пусть некоторое тело совершает под влиянием действующей на него внешней силы $\mathbf{f}$ колебательное движение. При соблюдении рассмотренных в предыдущем параграфе условий окружающая тело жидкость совершает потенциальное движение, и для вывода уравнений движения тела можно воспользоваться полученными выше соотношениями. Сила $\mathbf{f}$ должна быть равна производной по времени от полного импульса системы, равного сумме импульса $M\mathbf{u}$ тела (M — масса тела) и импульса $\mathbf{P}$ жидкости:

$$M\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f}.$$

С помощью (11.5) получаем отсюда:

$$M\frac{du_i}{dt} + m_{ik}\frac{du_k}{dt} = f_i,$$

что можно написать также и в виде

$$\frac{du_k}{dt}(M\delta_{ik} + m_{ik}) = f_i. \tag{11.8}$$

Это и есть уравнение движения тела, погруженного в идеальную жидкость.

Рассмотрим теперь в некотором смысле обратный вопрос. Пусть сама жидкость производит под влиянием каких-либо внешних (по отношению к телу) причин колебательное движение. Под влиянием этого движения погруженное в жидкость тело тоже начинает двигаться [1]. Выведем уравнение этого движения.

Будем предполагать, что скорость движения жидкости мало меняется на расстояниях порядка величины линейных размеров

---

[1] Речь может идти, например, о движении тела в жидкости, по которой распространяется звуковая волна с длиной волны, большой по сравнению с размерами тела.

тела. Пусть $\mathbf{v}$ есть скорость жидкости в месте нахождения тела, которую она имела бы, если бы тела вообще не было; другими словами, $\mathbf{v}$ есть скорость основного движения жидкости. По сделанному предположению $\mathbf{v}$ можно считать постоянной вдоль всего объема, занимаемого телом. По-прежнему через $\mathbf{u}$ обозначаем скорость тела.

Силу, действующую на тело и приводящую его в движение, можно определить из следующих соображений. Если бы тело полностью увлекалось жидкостью (т. е. было бы $\mathbf{v} = \mathbf{u}$), то на него действовала бы такая же сила, которая бы действовала на жидкость в объеме тела, если бы тела вовсе не было. Импульс этого объема жидкости есть $\rho V_0 \mathbf{v}$, и потому действующая на него сила равна $\rho V_0 \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$. Но в действительности тело не увлекается полностью жидкостью; возникает движение тела относительно жидкости, в результате чего сама жидкость приобретает некоторое дополнительное движение. Связанный с этим дополнительным движением импульс жидкости равен $m_{ik}(u_k - v_k)$ (в выражении (11.5) надо теперь писать вместо $\mathbf{u}$ скорость $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ движения тела относительно жидкости). Изменение этого импульса со временем приводит к появлению дополнительной силы реакции, действующей на тело и равной $-m_{ik}d(u_k - v_k)/dt$. Таким образом, полная сила, действующая на тело, равна

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Эту силу надо приравнять производной по времени от импульса тела. Таким образом, приходим к следующему уравнению движения:

$$\frac{d}{dt} M u_i = \rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k).$$

Интегрируя это уравнение по времени, получаем

$$(M\delta_{ik} + m_{ik})u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik})v_k. \tag{11.9}$$

Постоянную интегрирования полагаем равной нулю, поскольку скорость $\mathbf{u}$ тела, приводимого жидкостью в движение, должна обратиться в нуль вместе со скоростью жидкости $\mathbf{v}$. Полученное соотношение определяет скорость тела по скорости жидкости. Если плотность тела равна плотности жидкости ($M = \rho V_0$), то, как и следовало ожидать, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

З а д а ч и

1. Получить уравнение движения для шара, совершающего колебательное движение в идеальной жидкости, и для шара, приводимого в движение колеблющейся жидкостью.

Р е ш е н и е. Сравнивая (11.1) с выражением для φ, полученным для обтекания шара в задаче 2 § 10, видим, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}R^3/2$$

(R — радиус шара). Полный импульс приводимой шаром в движение жидкости есть согласно (11.6) $\mathbf{P} = 2\pi\rho R^3\mathbf{u}/3$, так что тензор m_{ik} равен

$$m_{ik} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\delta_{ik}.$$

Испытываемая движущимся шаром сила сопротивления равна

$$\mathbf{F} = -\frac{2\pi}{3}\rho R^3\frac{d\mathbf{u}}{dt},$$

а уравнение движения колеблющегося в жидкости шара имеет вид

$$\frac{4\pi R^3}{3}\left(\rho_0 + \frac{\rho}{2}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f$$

(ρ_0 — плотность вещества шара). Коэффициент при $\mathbf{u}$ можно рассматривать как некоторую эффективную массу шара; она складывается из массы самого шара и из присоединенной массы, равной в данном случае половине массы жидкости, вытесняемой шаром.

Если шар приводится в движение жидкостью, то для его скорости получаем из (11.9) выражение

$$\mathbf{u} = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_0}\mathbf{v}.$$

Если плотность шара превышает плотность жидкости ($\rho_0 > \rho$), то $u < v$, т. е. шар отстает от жидкости; если же $\rho_0 < \rho$, то шар опережает ее.

2. Выразить действующий на движущееся в жидкости тело момент сил через вектор $\mathbf{A}$.

Р е ш е н и е. Как известно из механики, действующий на тело момент сил $\mathbf{M}$ определяется по его функции Лагранжа (в данном случае — по энергии E) соотношением $\delta E = \mathbf{M}\delta\theta$, где $\delta\theta$ — вектор бесконечно малого угла поворота тела, а δE — изменение E при этом повороте. Вместо того чтобы поворачивать тело на угол $\delta\theta$ (и соответственно менять компоненты m_{ik}), можно повернуть на угол $-\delta\theta$ жидкость относительно тела и соответственно изменить скорость $\mathbf{u}$. Имеем при повороте $\delta\mathbf{u} = -[\delta\boldsymbol{\theta}\mathbf{u}]$, так что

$$\delta E = \mathbf{P}\delta\mathbf{u} = -\delta\boldsymbol{\theta}[\mathbf{uP}].$$

Используя выражение (11.6) для $\mathbf{P}$, получаем отсюда искомую формулу

$$\mathbf{M} = -[\mathbf{uP}] = 4\pi\rho[\mathbf{Au}].$$

§ 12. Гравитационные волны

Свободная поверхность жидкости, находящейся в равновесии в поле тяжести, — плоская. Если под влиянием какого-либо внешнего воздействия поверхность жидкости в каком-нибудь месте выводится из ее равновесного положения, то в жидкости возникает движение. Это движение будет распространяться вдоль всей поверхности жидкости в виде волн, называемых *гравитационными*, поскольку они обусловливаются действием поля тяжести. Гравитационные волны происходят в основном на поверхности жидкости, захватывая внутренние ее слои тем меньше, чем глубже эти слои расположены.

Мы будем рассматривать здесь такие гравитационные волны, в которых скорость движущихся частиц жидкости настолько ма-

ла, что в уравнении Эйлера можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ по сравнению с $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Легко выяснить, что означает это условие физически. В течение промежутка времени порядка периода τ колебаний, совершаемых частицами жидкости в волне, эти частицы проходят расстояние порядка амплитуды a волны. Поэтому скорость их движения — порядка $v \sim a/\tau$. Скорость v заметно меняется на протяжении интервалов времени порядка τ и на протяжении расстояний порядка λ вдоль направления распространения волны (λ — длина волны). Поэтому производная от скорости по времени — порядка v/τ, а по координатам — порядка v/λ. Таким образом, условие $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \ll \partial\mathbf{v}/\partial t$ эквивалентно требованию

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2 \ll \frac{a}{\tau}\frac{1}{\tau},$$

или

$$a \ll \lambda, \tag{12.1}$$

т. е. амплитуда колебаний в волне должна быть мала по сравнению с длиной волны. В § 9 мы видели, что если в уравнении движения можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, то движение жидкости потенциально. Предполагая жидкость несжимаемой, мы можем воспользоваться поэтому уравнениями (10.6) и (10.7). В уравнении (10.7) мы можем теперь пренебречь членом $v^2/2$, содержащим квадрат скорости; положив $f(t) = 0$ и введя в поле тяжести член $\rho g z$, получим

$$p = -\rho g z - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{12.2}$$

Ось z выбираем, как обычно, вертикально вверх, а в качестве плоскости xy выбираем равновесную плоскую поверхность жидкости.

Будем обозначать z-координату точек поверхности жидкости через ζ; ζ является функцией координат x, y и времени t. В равновесии $\zeta = 0$, так что ζ есть вертикальное смещение жидкой поверхности при ее колебаниях. Пусть на поверхность жидкости действует постоянное давление p_0. Тогда имеем на поверхности согласно (12.2)

$$p_0 = -\rho g\zeta - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Постоянную p_0 можно устранить переопределением потенциала φ (прибавлением к нему независящей от координат величины $p_0 t/\rho$). Тогда условие на поверхности жидкости примет вид

$$g\zeta + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=\zeta} = 0. \tag{12.3}$$

Малость амплитуды колебаний в волне означает, что смещение ζ мало. Поэтому можно считать, в том же приближении, что вертикальная компонента скорости движения точек поверхности совпадает с производной по времени от смещения ζ: $v_z = \partial\zeta/\partial t$. Но $v_z = \partial\varphi/\partial z$, так что имеем

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{z=\zeta}.$$

В силу малости колебаний можно в этом условии взять значения производных при $z = 0$ вместо $z = \zeta$. Таким образом, получаем окончательно следующую систему уравнений, определяющих движение в гравитационной волне:

$$\Delta\varphi = 0, \tag{12.4}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0. \tag{12.5}$$

Будем рассматривать волны на поверхности жидкости, считая эту поверхность неограниченной. Будем также считать, что длина волны мала по сравнению с глубиной жидкости; тогда можно рассматривать жидкость как бесконечно глубокую. Поэтому мы не пишем граничных условий на боковых границах и на дне жидкости.

Рассмотрим гравитационную волну, распространяющуюся вдоль оси x и однородную вдоль оси y; в такой волне все величины не зависят от координаты y. Будем искать решение, являющееся простой периодической функцией времени и координаты x:

$$\varphi = \cos(kx - \omega t) f(z),$$

где ω — циклическая частота (мы будем говорить о ней просто как о частоте), k — волновой вектор волны, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны. Подставив это выражение в уравнение $\Delta\varphi = 0$, получим для функции $f(z)$ уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0.$$

Его решение, затухающее в глубь жидкости (т. е. при $z \to -\infty$):

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t). \tag{12.6}$$

Мы должны еще удовлетворить граничному условию (12.5). Подставив в него (12.6), найдем связь между частотой и волновым вектором (или, как говорят, *закон дисперсии* волн):

$$\omega^2 = kg. \tag{12.7}$$

Распределение скоростей в жидкости получается дифференцированием потенциала по координатам:

$$v_x = -Ake^{kz}\sin(kx - \omega t), \quad v_z = Ake^{kz}\cos(kx - \omega t). \qquad (12.8)$$

Мы видим, что скорость экспоненциально падает по направлению в глубь жидкости. В каждой заданной точке пространства (т. е. при заданных x, z) вектор скорости равномерно вращается в плоскости xz, оставаясь постоянным по своей величине.

Определим еще траекторию частиц жидкости в волне. Обозначим временно через x, z координаты движущейся частицы жидкости (а не координаты неподвижной точки в пространстве), а через x_0, z_0 — значения x, z для равновесного положения частицы. Тогда $v_x = dx/dt$, $v_z = dz/dt$, а в правой части (12.8) можно приближенно написать x_0, z_0 вместо x, z, воспользовавшись малостью колебаний. Интегрирование по времени дает тогда:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\cos(kx_0 - \omega t), \\ z - z_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\sin(kx_0 - \omega t). \end{aligned} \qquad (12.9)$$

Таким образом, частицы жидкости описывают окружности вокруг точек x_0, z_0 с радиусом, экспоненциально убывающим по направлению в глубь жидкости.

Скорость U распространения волны равна, как будет показано в § 67, $U = \partial\omega/\partial k$. Подставив сюда $\omega = \sqrt{kg}$, находим, что скорость распространения гравитационных волн на неограниченной поверхности бесконечно глубокой жидкости равна

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \qquad (12.10)$$

Она растет при увеличении длины волны.

Длинные гравитационные волны. Рассмотрев гравитационные волны, длина которых мала по сравнению с глубиной жидкости, остановимся теперь на противоположном предельном случае волн, длина которых велика по сравнению с глубиной жидкости. Такие волны называются *длинными*.

Рассмотрим сначала распространение длинных волн в канале. Длину канала (направленную вдоль оси x) будем считать неограниченной. Сечение канала может иметь произвольную форму и может меняться вдоль его длины. Площадь поперечного сечения жидкости в канале обозначим через $S = S(x, t)$. Глубина и ширина канала предполагаются малыми по сравнению с длиной волны.

Мы будем рассматривать здесь продольные длинные волны, в которых жидкость движется вдоль канала. В таких волнах компонента v_x скорости вдоль длины канала велика по сравнению с компонентами v_y, v_z.

Опустив индекс x у компоненты скорости v_x, а также малые члены, мы можем написать x-компоненту уравнения Эйлера в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

а z-компоненту — в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

(квадратичные по скорости члены опускаем, поскольку амплитуда волны по-прежнему считается малой). Из второго уравнения имеем, замечая, что на свободной поверхности ($z = \zeta$) должно быть $p = p_0$:

$$p = p_0 + g\rho(\zeta - z).$$

Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{12.11}$$

Второе уравнение для определения двух неизвестных v и ζ можно вывести методом, аналогичным выводу уравнения непрерывности. Это уравнение представляет собой по существу уравнение непрерывности применительно к рассматриваемому случаю. Рассмотрим объем жидкости, заключенный между двумя плоскостями поперечного сечения канала, находящимися на расстоянии dx друг от друга. За единицу времени через одну плоскость войдет объем жидкости, равный $(Sv)_x$, а через другую плоскость выйдет объем $(Sv)_{x+dx}$. Поэтому объем жидкости между обеими плоскостями изменится на

$$(Sv)_{x+dx} - (Sv)_x = \frac{\partial (Sv)}{\partial x}\,dx.$$

Но в силу несжимаемости жидкости это изменение может произойти только за счет изменения ее уровня. Изменение объема жидкости между рассматриваемыми плоскостями в единицу времени равно

$$\frac{\partial S}{\partial t}\,dx.$$

Следовательно, можно написать:

$$\frac{\partial S}{\partial t}\,dx = -\frac{\partial (Sv)}{\partial x}\,dx,$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Sv)}{\partial x} = 0. \tag{12.12}$$

Это и есть искомое уравнение непрерывности.

Пусть S_0 есть площадь поперечного сечения жидкости в канале при равновесии. Тогда $S = S_0 + S'$, где S' — изменение этой площади благодаря наличию волны. Поскольку изменение уровня жидкости в волне мало, то S' можно написать в виде $b\zeta$, где b — ширина сечения канала у самой поверхности жидкости в нем. Уравнение (12.12) приобретает тогда вид

$$b\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial(S_0 v)}{\partial x} = 0. \tag{12.13}$$

Дифференцируя (12.13) по t и подставляя $\frac{\partial v}{\partial t}$ из (12.11) получим

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - \frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(S_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) = 0. \tag{12.14}$$

Если сечение канала одинаково вдоль всей его длины, то $S_0 = \text{const}$ и

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - \frac{gS_0}{b}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0. \tag{12.15}$$

Уравнение такого вида называется *волновым*; как будет показано в § 64, оно соответствует распространению волн с не зависящей от частоты скоростью U, равной квадратному корню из коэффициента при $\partial^2\zeta/\partial x^2$. Таким образом, скорость распространения длинных гравитационных волн в каналах равна

$$U = \sqrt{\frac{gS_0}{b}}. \tag{12.16}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть длинные волны в обширном бассейне, который мы будем считать неограниченным в двух измерениях (вдоль плоскости xy). Глубину жидкости в бассейне обозначим буквой h. Из трех компонент скорости малой является теперь компонента v_z. Уравнения Эйлера приобретают вид, аналогичный (12.11):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g\frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0. \tag{12.17}$$

Уравнение непрерывности выводится аналогично (12.12) и имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hv_y)}{\partial y} = 0.$$

Глубину h пишем в виде $h = h_0 + \zeta$, где h_0 — равновесная глубина. Тогда

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial(h_0 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(h_0 v_y)}{\partial y} = 0. \tag{12.18}$$

Предположим, что бассейн имеет плоское горизонтальное дно ($h_0 = \mathrm{const}$). Дифференцируя (12.18) по t и подставляя (12.17), получим

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g h_0 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0. \qquad (12.19)$$

Это — опять уравнение типа волнового (двумерного) уравнения; оно соответствует волнам со скоростью распространения, равной

$$U = \sqrt{g h_0}. \qquad (12.20)$$

З а д а ч и

1. Определить скорость распространения гравитационных волн на неограниченной поверхности жидкости, глубина которой равна h.

Р е ш е н и е. На дне жидкости нормальная составляющая скорости должна быть равна нулю, т. е.

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h.$$

Из этого условия определяется отношение между постоянными A и B в общем решении

$$\varphi = \cos(kx - \omega t)\{A e^{kz} + B e^{-kz}\}.$$

В результате находим

$$\varphi = A \cos(kx - \omega t)\,\mathrm{ch}[k(z + h)].$$

Из предельного условия (12.5) находим соотношение между k и ω в виде

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,kh.$$

Скорость распространения волны

$$U = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k\,\mathrm{th}\,kh}} \left\{ \mathrm{th}\,kh + \frac{kh}{\mathrm{ch}^2\,kh} \right\}.$$

При $kh \gg 1$ получается результат (12.10), а при $kh \ll 1$ — результат (12.20).

2. Определить связь между частотой и длиной волны для гравитационных волн на поверхности раздела двух жидкостей, причем верхняя жидкость ограничена сверху, а нижняя — снизу горизонтальными неподвижными плоскостями. Плотность и глубина слоя нижней жидкости — ρ и h, а верхней — ρ' и h' (причем $\rho > \rho'$).

Р е ш е н и е. Плоскость xy выбираем по плоскости раздела обеих жидкостей в равновесии. Ищем решение в обеих жидкостях соответственно в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= A\,\mathrm{ch}[k(z + h)] \cos(kx - \omega t), \\ \varphi' &= B\,\mathrm{ch}[k(z - h')] \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \qquad (1)$$

(так чтобы удовлетворялись условия на верхней и нижней границах, — см. решение задачи 1). На поверхности раздела давление должно быть непрерывным; согласно (12.2) это приводит к условию

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t}$$

(при $z=0$) или

$$\zeta = \frac{1}{g(\rho-\rho')}\left(\rho'\frac{\partial\varphi'}{\partial t} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{2}$$

Кроме того, скорости v_z обеих жидкостей на поверхности раздела должны быть одинаковыми. Это приводит к условию (при $z=0$)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi'}{\partial z}. \tag{3}$$

Далее, $v_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial\zeta}{\partial t}$ и, подставляя сюда (2), получаем

$$g(\rho-\rho')\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \rho'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Подставляя (1) в (3) и (4), получим два однородных линейных уравнения для A и B, из условия совместности которых найдем

$$\omega^2 = \frac{kg(\rho-\rho')}{\rho\operatorname{cth}kh + \rho'\operatorname{cth}kh'}.$$

При $kh \gg 1$, $kh' \gg 1$ (обе жидкости очень глубоки):

$$\omega^2 = kg\frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'},$$

а при $kh \ll 1$, $kh' \ll 1$ (длинные волны):

$$\omega^2 = k^2\frac{g(\rho-\rho')hh'}{\rho h' + \rho' h}.$$

Наконец, если $kh \gtrsim 1$, $kh' \ll 1$:

$$\omega^2 = k^2 gh'\frac{\rho-\rho'}{\rho}.$$

3. Определить связь между частотой и длиной волны для гравитационных волн, распространяющихся одновременно по поверхности раздела и верхней поверхности двух слоев жидкости, из которых нижняя (плотность ρ) бесконечно глубока, а верхняя (плотность ρ') имеет толщину h' и свободную верхнюю поверхность.

Р е ш е н и е. Выбираем плоскость xy в плоскости раздела обеих жидкостей в равновесии. В нижней и верхней жидкостях ищем решение соответственно в виде

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx-\omega t), \quad \varphi' = [Be^{-kz} + Ce^{kz}]\cos(kx-\omega t). \tag{1}$$

На поверхности раздела обеих жидкостей (т. е. при $z=0$) имеют место условия (см. задачу 2):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi'}{\partial z}, \quad g(\rho-\rho')\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \rho'\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

а на верхней свободной границе (т. е. при $z=h'$):

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Первое из уравнений (2) при подстановке (1) дает $A = C-B$, а два остальных условия дают два уравнения для B и C, из условия совместности которых

получаем квадратное уравнение для ω^2 с корнями:

$$\omega^2 = kg\frac{(\rho-\rho')(1-e^{-2kh'})}{\rho+\rho'+(\rho-\rho')e^{-2kh'}}, \quad \omega^2 = kg.$$

При $h' \to \infty$ эти корни соответствуют волнам, распространяющимся независимо по поверхности раздела и по верхней поверхности жидкости.

4. Определить собственные частоты колебаний (см. § 69) жидкости глубины h в прямоугольном бассейне ширины a и длины b.

Р е ш е н и е. Оси x и y выбираем по двум боковым сторонам бассейна. Ищем решение в виде стоячей волны:

$$\varphi = \cos\omega t\,\mathrm{ch}[k(z+h)]f(x,\,y).$$

Для f получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0,$$

а условие на свободной поверхности приводят, как и в задаче 1, к соотношению

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,kh.$$

Решение уравнения для f берем в виде

$$f = \cos px\cos qy, \quad p^2+q^2=k^2.$$

На боковых сторонах сосуда должны выполняться условия:

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\,a;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\,b.$$

Отсюда находим

$$p = \frac{m\pi}{a}, \qquad q = \frac{n\pi}{b},$$

где m, n — целые числа. Поэтому возможные значения k равны

$$k^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right).$$

§ 13. Внутренние волны в несжимаемой жидкости

Своеобразные гравитационные волны могут распространяться внутри несжимаемой жидкости. Их происхождение связано с вызываемой наличием поля тяжести неоднородностью жидкости: ее давление (а с ним и энтропия s) непременно будет меняться с высотой; поэтому всякое смещение какого-либо участка жидкости по высоте приведет к нарушению механического равновесия, а потому к возникновению колебательного движения. Действительно, ввиду адиабатичности движения этот участок принесет с собой в новое место свое значение энтропии s, отличное от ее равновесного значения в этом месте.

Мы будем ниже предполагать, что длина распространяющейся в жидкости волны мала по сравнению с расстояниями, на которых поле тяжести вызывает заметное изменение плотности [1]. Саму жидкость мы будем при этом рассматривать как несжимаемую. Это значит, что можно пренебречь изменением ее плотности, связанным с изменением давления в волне. Изменением же плотности, связанным с тепловым расширением, отнюдь нельзя пренебречь, так как именно оно определяет собой все явление.

Выпишем систему гидродинамических уравнений для рассматриваемого движения. Будем отмечать значения величин в состоянии механического равновесия индексом нуль, а малые отклонения от этих значений в волне — штрихом. Тогда уравнение сохранения энтропии $s = s_0 + s'$ напишется с точностью до величин первого порядка малости в виде

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s_0 = 0, \tag{13.1}$$

где s_0, как и равновесные значения других величин, является заданной функцией вертикальной координаты z.

Далее, в уравнении Эйлера снова пренебрегаем (в силу малости колебаний) членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$; учитывая также, что равновесное распределение давления определяется уравнением $\nabla p_0 = \rho_0\mathbf{g}$, получим с той же точностью

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2}\rho'.$$

Поскольку согласно сказанному выше изменение плотности связано только с изменением энтропии, но не давления, то можно написать:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s',$$

и мы получим уравнение Эйлера в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s' - \nabla\frac{p'}{\rho_0}. \tag{13.2}$$

Величину ρ_0 можно ввести под знак градиента, так как изменением равновесной плотности на расстояниях порядка длины

[1]) Градиент плотности связан с градиентом давления равенством

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \nabla\rho = c^2\nabla\rho,$$

где c — скорость звука в жидкости. Поэтому из гидростатического уравнения $\nabla p = \rho\mathbf{g}$ имеем $\nabla\rho = (\rho/c^2)\mathbf{g}$. Отсюда видно, что существенное изменение плотности в поле тяжести происходит на расстояниях $l \approx c^2/g$. Для воздуха $l \approx 10$ км, для воды $l \approx 200$ км.

волны мы, согласно сказанному выше, все равно пренебрегаем. По этой же причине можно считать плотность постоянной и в уравнении непрерывности, которое сводится при этом к

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{13.3}$$

Будем искать решение системы уравнений (13.1)–(13.3) в виде плоской волны:

$$\mathbf{v} = \text{const} \cdot e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

и аналогично для s' и p'. Подстановка в уравнение непрерывности (13.3) дает

$$\mathbf{vk} = 0, \tag{13.4}$$

т. е. скорость жидкости везде перпендикулярна к волновому вектору (поперечная волна). Уравнения же (13.1) и (13.2) дают

$$i\omega s' = \mathbf{v}\nabla s_0, \quad -i\omega\mathbf{v} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\mathbf{g} - \frac{ik}{\rho_0}p'.$$

Условие $\mathbf{kv} = 0$, примененное ко второму из этих равенств, приводит к соотношению

$$ik^2 p' = \left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'(\mathbf{gk}),$$

и исключая затем из обоих уравнений $\mathbf{v}$ и s', получим искомый закон дисперсии — соотношение между частотой и волновым вектором:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \sin^2\theta, \tag{13.5}$$

где обозначено

$$\omega_0^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz}. \tag{13.6}$$

Мы опускаем здесь и ниже индекс нуль у равновесных значений термодинамических величин; ось z направлена вертикально вверх, а θ есть угол между осью z и направлением $\mathbf{k}$. Положительность выражения (13.6) обеспечивается условием устойчивости равновесного распределения $s(z)$ (условием отсутствия конвекции, см. § 4).

Мы видим, что частота оказывается зависящей только от направления волнового вектора, но не от его величины. При $\theta = 0, \pi$ получается $\omega = 0$; это означает, что волны рассматриваемого типа с волновым вектором, направленным вертикально, вообще невозможны.

Если жидкость находится не только в механическом, но и в полном термодинамическом равновесии, то ее температура постоянна и можно написать:

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = -\rho g \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T.$$

Наконец, воспользовавшись известными термодинамическими соотношениями

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

(c_p — теплоемкость единицы массы жидкости), получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{c_p}\frac{g}{\rho}\left|\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right|}. \tag{13.7}$$

В частности, для термодинамически идеального газа эта формула дает

$$\omega_0 = \frac{g}{\sqrt{c_p T}}. \tag{13.8}$$

Зависимость частоты от направления волнового вектора приводит к тому, что скорость распространения волны $\mathbf{U} = \partial\omega/\partial k$ не совпадает по направлению с $\mathbf{k}$. Представив зависимость $\omega(\mathbf{k})$ в виде

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}}{k}\right)^2}$$

($\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении вертикально вверх) и произведя дифференцирование, получим

$$\mathbf{U} = -\frac{\omega_0^2}{\omega k}(\mathbf{n}\mathbf{v})\{\boldsymbol{\nu} - (\mathbf{n}\boldsymbol{\nu})\mathbf{n}\}, \tag{13.9}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Эта скорость перпендикулярна к вектору $\mathbf{k}$, а по величине равна

$$U = -\frac{\omega_0}{k}\cos\theta.$$

Ее проекция на вертикаль:

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\nu} = -\frac{\omega_0}{k}\cos\theta\sin\theta.$$

§ 14. Волны во вращающейся жидкости

Другой своеобразный тип внутренних волн может распространяться в равномерно вращающейся как целое несжимаемой жидкости. Их происхождение связано с возникающими при вращении кориолисовыми силами.

Будем рассматривать жидкость в системе координат, вращающейся вместе с ней. Как известно, при таком описании в механические уравнения движения должны быть введены дополнительные силы — центробежная и кориолисова. Соответственно этому, надо добавить такие же силы (отнесенные к единичной массе жидкости) в правую часть уравнения Эйлера. Центробежная сила может быть представлена в виде градиента $\nabla[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2/2$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения жидкости. Этот член можно объединить с силой $-\nabla p/\rho$, введя эффективное давление

$$P = p - \rho[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]^2. \tag{14.1}$$

Кориолисова же сила равна $2[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}]$, она появляется лишь при движении жидкости относительно вращающейся системы координат ($\mathbf{v}$ — скорость в этой системе). Перенеся этот член в левую часть уравнения Эйлера, напишем его в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + 2[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{14.2}$$

Уравнение же непрерывности сохраняет свой прежний вид, сводясь для несжимаемой жидкости к равенству $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

Снова будем считать амплитуду волны малой и пренебрежем квадратичным по скорости членом в уравнении (14.2), которое примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla p', \tag{14.3}$$

где p' — переменная часть давления в волне, а $\rho = \text{const}$. Сразу же исключим давление, применив к обеим частям уравнения (14.3) операцию rot. Правая часть уравнения обращается в нуль, а в левой имеем, с учетом несжимаемости жидкости:

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}] = \boldsymbol{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{v} - (\boldsymbol{\Omega}\nabla)\mathbf{v} = -(\boldsymbol{\Omega}\nabla)\mathbf{v}.$$

Выбрав направление $\boldsymbol{\Omega}$ в качестве оси z, запишем получающееся уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\Omega\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \tag{14.4}$$

Ищем решение в виде плоской волны

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{14.5}$$

удовлетворяющей (в силу уравнения $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) условию поперечности

$$\mathbf{kA} = 0. \tag{14.6}$$

Подстановка (14.5) в уравнение (14.4) дает

$$\omega[\mathbf{kv}] = 2i\Omega k_z \mathbf{v}. \tag{14.7}$$

Закон дисперсии волн получается исключением $\mathbf{v}$ из этого векторного равенства. Умножив его с обеих сторон векторно на $\mathbf{k}$, переписываем его в виде

$$-\omega^2 k^2 \mathbf{v} = 2i\Omega k_z [\mathbf{kv}]$$

и, сравнив друг с другом оба равенства, находим искомую зависимость ω от $\mathbf{k}$:

$$\omega = 2\Omega \frac{k_z}{k} = 2\Omega \cos\theta, \tag{14.8}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\Omega}$.

С учетом (14.4) равенство (14.7) принимает вид

$$[\mathbf{nv}] = i\mathbf{v},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Если представить комплексную амплитуду волны как $\mathbf{A} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ с вещественными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то отсюда следует, что $[\mathbf{nb}] = \mathbf{a}$, — векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (оба лежащие в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{k}$) взаимно перпендикулярны и одинаковы по величине. Выбрав их направления в качестве осей x и y и отделив в (14.5) вещественную и мнимую части, найдем, что

$$v_x = a\cos(\omega t - \mathbf{kr}), \quad v_y = -a\sin(\omega t - \mathbf{kr}).$$

Таким образом, волна обладает круговой поляризацией: в каждой точке пространства вектор $\mathbf{v}$ вращается со временем, оставаясь постоянным по величине [1]).

Скорость распространения волны:

$$\mathbf{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{2\Omega}{k}\{\boldsymbol{\nu} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\boldsymbol{\nu})\}, \tag{14.9}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{\Omega}$; как и в гравитационных внутренних волнах, эта скорость перпендикулярна волновому вектору. Ее абсолютная величина и проекция на направление $\boldsymbol{\Omega}$:

$$U = \frac{2\Omega}{k}\sin\theta, \quad \mathbf{U}\boldsymbol{\nu} = \frac{2\Omega}{k}\sin^2\theta = U\sin\theta.$$

Рассмотренные волны называют *инерционными*. Поскольку кориолисовы силы не совершают работы над движущейся жидкостью, заключенная в этих волнах энергия — целиком кинетическая.

---

[1]) Напомним, что речь идет о движении по отношению к вращающейся системе координат! По отношению к неподвижной системе на это движение налагается еще и вращение всей жидкости как целого.

Особый вид инерционных осесимметричных (не плоских) волн может распространяться вдоль оси вращения жидкости — см. задачу.

В заключение сделаем еще одно замечание, относящееся к стационарным движениям во вращающейся жидкости, а не к распространению волн в ней.

Пусть l — характерный параметр длины такого движения, а u — характерная скорость. По порядку величины член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении (14.2) равен u^2/l, а член $2[\mathbf{\Omega v}] \sim \Omega u$. Если $u/(l\Omega) \ll 1$, то первым можно пренебречь по сравнению со вторым и тогда уравнение стационарного движения сводится к

$$2[\mathbf{\Omega v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{14.10}$$

или

$$2\Omega v_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}, \quad 2\Omega v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

где x, y — декартовы координаты в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Отсюда видно, что P, а потому и v_x, v_y, не зависят от продольной координаты z. Далее, исключив P из двух первых уравнений, получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

после чего из уравнения непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ следует, что $\partial v_z/\partial z = 0$. Таким образом, стационарное движение (относительно вращающейся системы координат) в быстро вращающейся жидкости представляет собой наложение двух независимых движений: плоского течения в поперечной плоскости и осевого движения, не зависящего от координаты z (*J. Proudman*, 1916).

Задачи

1. Определить движение в осесимметричной волне, распространяющейся вдоль оси вращающейся как целое несжимаемой жидкости (*W. Thomson*, 1880).

Решение. Введем цилиндрические координаты r, φ, z с осью z вдоль вектора $\mathbf{\Omega}$. В осесимметричной волне все величины не зависят от угловой переменной φ. Зависимость же от времени и координаты z дается множителем вида $\exp\{i(kz - \omega t)\}$. Раскрыв уравнение (14.3) в компонентах, получим

$$-i\omega v_r - 2\Omega v_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r}, \tag{1}$$

$$-i\omega v_\varphi + 2\Omega v_r = 0, \quad -i\omega v_z = -\frac{ik}{\rho}p'. \tag{2}$$

Сюда надо присоединить уравнение непрерывности

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + ikv_z = 0. \tag{3}$$

Выразив v_φ и p' через v_r, из (2) и (3) и подставив в (1), получим уравнение

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \left[\frac{4\Omega^2 k^2}{\omega^2} - k^2 - \frac{1}{r^2}\right]F = 0 \tag{4}$$

для функции $F(r)$, определяющей радиальную зависимость скорости v_r:

$$v_r = F(r)e^{i(\omega t - kz)}.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $r = 0$, есть

$$F = \text{const} \cdot J_1\left(kr\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1}\right), \tag{14.11}$$

где J_1 — функция Бесселя порядка 1.

Вся картина движения в волне распадается на области, ограниченные коаксиальными цилиндрическими поверхностями с радиусами r_n, определяемыми равенствами

$$kr_n\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} = x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — последовательные нули функции $J_1(x)$. На этих поверхностях $v_r = 0$; другими словами, жидкость никогда не пересекает их.

Отметим, что для рассматриваемых волн в неограниченной жидкости частота ω не зависит от k. Возможные значения частоты ограничены, однако, условием $\omega < 2\Omega$; в противном случае уравнение (4) не имеет решения, удовлетворяющего необходимым условиям конечности.

Если же вращающаяся жидкость ограничена цилиндрической стенкой (радиуса R), то должно быть учтено условие $v_r = 0$ на стенке. Отсюда возникает соотношение

$$ka\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} = x_n,$$

устанавливающее связь между ω и k для волны с заданным значением n (т. е. числом коаксиальных областей в ней).

2. Получить уравнение, описывающее произвольное малое возмущение давления во вращающейся жидкости.

Р е ш е н и е. Уравнение (14.3), расписанное в компонентах, дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\Omega v_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} - 2\Omega v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}. \tag{1}$$

Продифференцировав эти три уравнения соответственно по x, y, z и сложив их с учетом уравнения $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, получим

$$\frac{1}{\rho}\Delta p' = 2\Omega\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Дифференцирование этого уравнения по t, снова с учетом уравнений (1), дает

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\Delta p' = 4\Omega^2\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

а еще одно дифференцирование по t приводит к окончательному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta p' + 4\Omega^2\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Для периодических возмущений с частотой ω это уравнение сводится к

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Для волн вида (14.5) отсюда получается, разумеется, уже известное дисперсионное соотношение (14.8); при этом $\omega < 2\Omega$ и коэффициент при $\partial^2 p'/\partial z^2$ в уравнении (3) отрицателен. Возмущения из точечного источника распространяются вдоль образующих конуса с осью вдоль Ω и углом раствора 2θ, где $\sin\theta = \omega/2\Omega$.

При $\omega > 2\Omega$ коэффициент при $\partial^2 p'/\partial z^2$ в уравнении (3) положителен, и путем очевидного изменения масштаба вдоль оси z оно приводится к уравнению Лапласа. Влияние точечного источника возмущений простирается в этом случае по всему объему жидкости, причем убывает при удалении от источника по степенному закону.

ГЛАВА II

ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 15. Уравнения движения вязкой жидкости

Мы переходим теперь к изучению влияния, которое оказывают на движение жидкости происходящие при движении процессы диссипации энергии. Эти процессы являются выражением всегда имеющей место в той или иной степени термодинамической необратимости движения, связанной с наличием внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности.

Для того чтобы получить уравнения, описывающие движение вязкой жидкости, необходимо ввести дополнительные члены в уравнение движения идеальной жидкости. Что касается уравнения непрерывности, то оно, как явствует из самого его вывода, относится в равной мере к движению всякой жидкости, в том числе и вязкой. Уравнение же Эйлера должно быть изменено.

Мы видели в § 7, что уравнение Эйлера может быть написано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса. Поток импульса, определяемый формулой (7.2), представляет собой чисто обратимый перенос импульса, связанный просто с механическим передвижением различных участков жидкости из одного места в другое и с действующими в жидкости силами давления. Вязкость (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии еще дополнительного, необратимого, переноса импульса из мест с большей скоростью в места с меньшей.

Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к «идеальному» потоку импульса (7.2) дополнительный член σ'_{ik}, определяющий необратимый, «вязкий», перенос импульса в жидкости. Таким образом, мы будем писать тензор плотности потока импульса в вязкой жидкости в виде

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \qquad (15.1)$$

Тензор

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \qquad (15.2)$$

называют *тензором напряжений*, а σ'_{ik} — *вязким тензором напряжений*. Тензор σ_{ik} определяет ту часть потока импульса, ко-

торая не связана с непосредственным переносом импульса вместе с массой передвигающейся жидкости [1]).

Установить общий вид тензора σ'_{ik} можно, исходя из следующих соображений. Процессы внутреннего трения в жидкости возникают только в тех случаях, когда различные участки жидкости движутся с различной скоростью, так что имеет место движение частей жидкости друг относительно друга. Поэтому σ'_{ik} должно зависеть от производных от скорости по координатам. Если градиенты скорости не очень велики, то можно считать, что обусловленный вязкостью перенос импульса зависит только от первых производных скорости. Самую зависимость σ'_{ik} от производных $\partial v_i/\partial x_k$ можно в том же приближении считать линейной. Не зависящие от $\partial v_i/\partial x_k$ члены должны отсутствовать в выражении для σ'_{ik}, поскольку σ'_{ik} должны обратиться в нуль при $\mathbf{v} = \mathrm{const}$. Далее замечаем, что σ'_{ik} должно обращаться в нуль также и в том случае, когда вся жидкость как целое совершает равномерное вращение, поскольку ясно, что при таком движении никакого внутреннего трения в жидкости не происходит. При равномерном вращении с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ скорость $\mathbf{v}$ равна векторному произведению $[\mathbf{\Omega r}]$. Линейными комбинациями производных $\partial v_i/\partial x_k$, обращающимися в нуль при $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$, являются суммы

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Поэтому σ'_{ik} должно содержать именно эти симметричные комбинации производных $\partial v_i/\partial x_k$.

Наиболее общим видом тензора второго ранга, удовлетворяющего этим условиям, является

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \tag{15.3}$$

с независящими от скорости коэффициентами η и ζ; в этом утверждении использована изотропия жидкости, вследствии которой ее свойства как таковой могут характеризоваться лишь скалярными величинами (в данном случае — η и ζ). Члены в (15.3) сгруппированы таким образом, что выражение в скобках дает нуль при свертывании (т. е. при суммировании компонент с $i = k$). Величины η и ζ называют *коэффициентами вязкости* (причем ζ часто называют *второй вязкостью*). Как будет

[1]) Мы увидим ниже, что σ'_{ik} содержит член, пропорциональный δ_{ik}, т. е. член такого же вида, как и $p\delta_{ik}$. Поэтому, строго говоря, после такого видоизменения формы тензора потока импульса должно быть уточнено, что именно подразумевается под давлением p. См. об этом конец § 49.

показано в § 16, 49, оба они положительны:

$$\eta > 0, \quad \zeta > 0. \tag{15.4}$$

Уравнения движения вязкой жидкости можно теперь получить непосредственно путем прибавления выражения $\dfrac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}$ к правой части уравнения Эйлера

$$\rho\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Таким образом, получаем

$$\rho\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\Big) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{\eta\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\Big)\Big\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\Big). \tag{15.5}$$

Это есть наиболее общий вид уравнений движения вязкой жидкости. Величины η, ζ являются, вообще говоря, функциями давления и температуры. В общем случае p, T, а потому и η, ζ, не постоянны вдоль всей жидкости, так что η и ζ не могут быть вынесены из-под знака производной.

В большинстве случаев, однако, изменение коэффициентов вязкости вдоль жидкости незначительно, и потому можно считать их постоянными. Тогда уравнения (15.5) можно представить в векторном виде

$$\rho\Big[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\Big] = -\operatorname{grad} p + \eta\Delta\mathbf{v} + \Big(\zeta + \frac{\eta}{3}\Big)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{15.6}$$

Это — так называемое *уравнение Навье–Стокса.*

Оно существенно упрощается, если жидкость можно считать несжимаемой. Тогда $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и последний член справа в (15.6) исчезает. Рассматривая вязкую жидкость, мы фактически всегда будем считать ее несжимаемой и соответственно этому пользоваться уравнением движения в виде [1])

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}. \tag{15.7}$$

Тензор напряжений в несжимаемой жидкости тоже принимает простой вид

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\Big). \tag{15.8}$$

[1]) Уравнение (15.7) было впервые сформулировано на основе модельных представлений *Навье* (*C.L. Navier*, 1827). Вывод уравнений (15.6), (15.7) (без члена с ζ), близкий к современному, был дан *Стоксом* (*G.G. Stokes*, 1845).

Мы видим, что в несжимаемой жидкости вязкость описывается всего одним коэффициентом. Поскольку практически жидкость можно очень часто считать несжимаемой, обычно играет роль именно этот коэффициент вязкости η. Отношение

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{15.9}$$

называют *кинематической вязкостью*, а коэффициент η — *динамической*). Приведем значения величин η и ν для некоторых жидкостей и газов (при температуре 20 °C) в абсолютных единицах:

	η, г/с · см	ν, см^2/с
Вода	0,010	0,010
Воздух	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	0,150
Спирт	0,018	0,022
Глицерин . . .	8,5	6,8
Ртуть	0,0156	0,0012

Упомянем, что динамическая вязкость газов при заданной температуре не зависит от давления. Кинематическая же вязкость соответственно обратно пропорциональна давлению.

Из уравнения (15.7) можно исключить давление таким же образом, как это было сделано раньше с уравнением Эйлера. Применив к обеим частям уравнения операцию rot, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}] + \nu\Delta\operatorname{rot}\mathbf{v}$$

(ср. уравнение (2.11) для идеальной жидкости). Поскольку здесь идет речь о несжимаемой жидкости, этому уравнению можно придать другой вид, раскрыв первый член в его правой части по правилам векторного анализа и учтя равенство $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\operatorname{rot}\mathbf{v} - (\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \nu\Delta\operatorname{rot}\mathbf{v}. \tag{15.10}$$

По известному распределению скоростей, распределение давления в жидкости может быть найдено путем решения уравнения типа уравнения Пуассона:

$$\Delta p = -\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = -\rho\frac{\partial^2 v_i v_k}{\partial x_k\,\partial x_i}; \tag{15.11}$$

оно получается применением к уравнению (15.7) операции div.

Приведем здесь также уравнение, которому удовлетворяет функция тока $\psi(x,\, y)$ при двумерном течении несжимаемой вязкой жидкости. Оно получается подстановкой (10.9) в уравнение (15.10):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\psi. \tag{15.12}$$

Необходимо написать еще граничное условие к уравнениям движения вязкой жидкости. Между поверхностью твердого тела и всякой вязкой жидкостью всегда существуют силы молекулярного сцепления, приводящие к тому, что прилегающий к твердой стенке слой жидкости полностью задерживается, как бы прилипая к ней. Соответственно этому граничное условие к уравнениям движения вязкой жидкости состоит в требовании обращения в нуль скорости жидкости на неподвижных твердых поверхностях:

$$\mathbf{v} = 0. \tag{15.13}$$

Подчеркнем, что здесь требуется исчезновение как нормальной, так и тангенциальной компонент скорости, между тем как граничные условия к уравнениям идеальной жидкости требуют обращения в нуль только v_n [1]).

В общем случае движущейся поверхности скорость $\mathbf{v}$ должна быть равна скорости этой поверхности.

Легко написать выражение для силы, действующей на соприкасающуюся с жидкостью твердую поверхность. Сила, действующая на некоторый элемент поверхности, есть не что иное, как поток импульса через этот элемент. Поток импульса через элемент поверхности $d\mathbf{f}$ есть

$$\Pi_{ik}\, df_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik})\, df_k.$$

Написав df_k в виде $df_k = n_k df$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, и помня, что на твердой поверхности $\mathbf{v} = 0$ [2]), находим, что сила $\mathbf{P}$, действующая на единицу площади поверхности, равна

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k. \tag{15.14}$$

Первый член есть обычное давление жидкости, а второй представляет собой действующую на поверхность силу трения, обусловленную вязкостью. Подчеркнем, что $\mathbf{n}$ в (15.14) есть единичный вектор нормали, внешней по отношению к поверхности жидкости, т. е. внутренней по отношению к твердой поверхности.

Если мы имеем границу раздела двух несмешивающихся жидкостей (или жидкости и газа), то условия на этой поверхности гласят, что скорости обеих жидкостей должны быть равны и силы, с которыми они действуют друг на друга, должны быть

---

[1]) Отметим, что решениями уравнения Эйлера нельзя удовлетворить лишнему (по сравнению со случаем идеальной жидкости) граничному условию обращения в нуль тангенциальной скорости. Математически это связано с более низким (первым) порядком этого уравнения по координатным производным, чем порядок (второй) уравнения Навье–Стокса.

[2]) При определении действующей на поверхность силы надо рассматривать данный элемент поверхности в системе отсчета, в которой он покоится. Сила равна просто потоку импульса только при неподвижной поверхности.

одинаковы по величине и противоположны по направлению. Второе из этих условий записывается в виде

$$n_k^{(1)}\sigma_{ik}^{(1)} + n_k^{(2)}\sigma_{ik}^{(2)} = 0,$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум жидкостям. Векторы нормали $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ имеют взаимно противоположные направления, $\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)} \equiv \mathbf{n}$, так что можно написать:

$$n_i\sigma_{ik}^{(1)} = n_i\sigma_{ik}^{(2)}. \qquad (15.15)$$

На свободной поверхности жидкости должно выполняться условие

$$\sigma_{ik}n_k \equiv \sigma'_{ik}n_k - pn_i = 0. \qquad (15.16)$$

Уравнения движения в криволинейных координатах. Приведем для справок уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в часто используемых криволинейных координатах.

В цилиндрических координатах r, φ, z компоненты тензора напряжений выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}
\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \sigma_{r\varphi} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right),\\
\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_r}{r}\right), \quad \sigma_{\varphi z} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right), \qquad (15.17)\\
\sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \sigma_{zr} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right).
\end{gathered}$$

Три компоненты уравнения Навье–Стокса принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right),\\
\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_\varphi - \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right), \quad (15.18)\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z,
\end{gathered}$$

причем операторы $(\mathbf{v}\nabla)$ и Δ определяются формулами

$$(\mathbf{v}\nabla)f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + v_z\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Уравнение непрерывности запишется в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (15.19)$$

В сферических координатах r, φ, θ имеем для тензора напряжений

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\right),\\
\sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right),\\
\sigma_{r\theta} &= \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right),\\
\sigma_{\theta\varphi} &= \eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} - \frac{v_\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}\right),\\
\sigma_{\varphi r} &= \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r}\right).
\end{aligned}
\tag{15.20}
$$

Уравнения Навье—Стокса:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} =\\
= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right],\\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r} =\\
= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left[\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right],\\
\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r} =\\
= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left[\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right],
\end{gathered}
\tag{15.21}
$$

причем

$$
(\mathbf{v}\nabla)f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi},
$$

$$
\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.
$$

Уравнение непрерывности:

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} = 0. \tag{15.22}
$$

§ 16. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости

Наличие вязкости приводит к диссипации энергии, переходящей в конце концов в тепло. Вычисление диссипируемой энергии в особенности просто для несжимаемой жидкости.

Полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{\rho}{2}\int v^2\,dV.$$

Вычислим производную от этой энергии по времени. Для этого пишем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

и подставляем для производной $\partial v_i/\partial t$ ее выражение, согласно уравнению Навье–Стокса:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla p + v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} =$$
$$= -\rho(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + \operatorname{div}(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Здесь через $(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')$ обозначен вектор с компонентами $v_i\sigma'_{ik}$. Замечая, что в несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, можно написать первый член справа в виде дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - (\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')\right] - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{16.1}$$

Выражение, стоящее под знаком div, представляет собой не что иное, как плотность потока энергии в жидкости. Первый член в квадратных скобках есть поток энергии, связанный с простым переносом массы жидкости при ее движении, совпадающий с потоком энергии в идеальной жидкости (см. (10.5)). Второй же член $(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')$ есть поток энергии, связанный с процессами внутреннего трения. Действительно, наличие вязкости приводит к появлению потока импульса σ'_{ik}; перенос же импульса всегда связан с переносом энергии, причем поток энергии получается, очевидно, из потока импульса умножением на скорость.

Проинтегрировав (16.1) по некоторому объему V, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho v^2}{2}\,dV = -\oint\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - (\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')\right]d\mathbf{f} - \int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,dV. \tag{16.2}$$

Первый член справа определяет изменение кинетической энергии жидкости в объеме V благодаря наличию потока энергии через поверхность этого объема. Второй же член (взятый с обратным знаком) представляет собой, следовательно, уменьшение кинетической энергии в единицу времени, обусловленное диссипацией.

Если распространить интегрирование по всему объему жидкости, то интеграл по поверхности исчезает (на бесконечности скорость обращается в нуль [1]), и мы получим диссипируемую в единицу времени во всей жидкости энергию в виде

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\int \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,dV = -\frac{1}{2}\int \sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)dV$$

(последнее равенство следует из симметричности тензора σ'_{ik}). В несжимаемой жидкости тензор σ'_{ik} определяется выражением (15.8). Таким образом, находим окончательно следующую формулу для диссипации энергии в несжимаемой жидкости:

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\frac{\eta}{2}\int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV. \tag{16.3}$$

Диссипация приводит к уменьшению механической энергии, т. е. должно быть $\dot{E}_{\text{кин}} < 0$. С другой стороны, интеграл в (16.3) является величиной всегда положительной. Поэтому мы можем заключить, что коэффициент вязкости η положителен.

Задача

Для потеницального движения преобразовать интеграл (16.3) в интеграл по поверхности, ограничивающей область движения.

Решение. Положив $\partial v_i/\partial x_k = \partial v_k/\partial x_i$ и произведя однократное интегрирование по частям, получим

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -2\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2 dV = -2\eta\int v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\,df_k,$$

или

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\eta\int \nabla v^2\,d\mathbf{f}.$$

§ 17. Течение по трубе

Рассмотрим несколько простейших случаев движения вязкой несжимаемой жидкости.

Пусть жидкость заключена между двумя параллельными плоскостями, движущимися друг относительно друга с постоян-

[1]) Мы рассматриваем движение жидкости в системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится.

Здесь и в аналогичных других местах мы для определенности говорим о бесконечном объеме жидкости, что отнюдь не означает какого-либо ограничения общности. Так, для жидкости, заключенной в ограниченном твердыми стенками объеме, интеграл по поверхности этого объема все равно обратился бы в нуль в силу условия равенства нулю скорости на стенке.

ной скоростью u. Плоскость xz выберем в одной из них, причем ось x направим по направлению скорости $\mathbf{u}$. Все величины зависят, очевидно, только от координаты y, а скорость жидкости направлена везде по оси x. Из (15.7) имеем для стационарного движения

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = 0.$$

(Уравнение же непрерывности удовлетворяется тождественно.) Отсюда $p = \text{const}$, $v = ay + b$. При $y = 0$ и при $y = h$ (h — расстояние между плоскостями) должно быть соответственно $v = 0$ и $v = u$. Отсюда находим

$$v = \frac{y}{h}u. \tag{17.1}$$

Таким образом, распределение скоростей в жидкости линейно. Средняя скорость жидкости

$$\overline{v} = \frac{1}{h}\int_0^h v\,dy = \frac{u}{2}. \tag{17.2}$$

Из (15.14) находим, что нормальная компонента действующей на плоскости силы равна, как и должно было быть, просто p, а тангенциальная сила трения (на плоскости $y = 0$) равна

$$\sigma_{xy} = \eta\frac{dv}{dy} = \frac{\eta u}{h} \tag{17.3}$$

(на плоскости $y = h$ она имеет обратный знак).

Далее, рассмотрим стационарное течение жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями при наличии градиента давления. Координаты выбираем, как в предыдущем случае; ось x направлена по направлению движения жидкости. Уравнения Навье–Стокса дают (скорость зависит, очевидно, только от координаты y):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Второе из этих уравнений показывает, что давление не зависит от y, т. е. оно постоянно вдоль толщины слоя жидкости между плоскостями. Тогда в первом уравнении справа стоит функция только от x, а слева — только от y; такое уравнение может выполняться, только если его левая и правая части являются постоянными величинами. Таким образом,

$$\frac{dp}{dx} = \text{const},$$

т. е. давление является линейной функцией координаты x вдоль направления потока жидкости. Для скорости же получаем теперь

$$v = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y^2 + ay + b.$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий $v = 0$ при $y = 0$ и $y = h$. В результате получаем

$$v = -\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y(y-h). \tag{17.4}$$

Таким образом, скорость меняется вдоль толщины слоя жидкости по параболическому закону, достигая наибольшей величины посередине слоя. Для среднего по толщине слоя жидкости значения ее скорости вычисление дает

$$\overline{v} = -\frac{h^2}{12\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{17.5}$$

Сила трения, действующая на неподвижную стенку:

$$\sigma_{xy} = \eta\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}. \tag{17.6}$$

Наконец, рассмотрим стационарное течение жидкости по трубе произвольного сечения (одинакового вдоль всей длины трубы). Ось трубы выберем в качестве оси x. Очевидно, что скорость v жидкости направлена везде по оси x и является функцией только y и z. Уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно, а y- и z-компоненты уравнения Навье–Стокса дают опять $\partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0$, т. е. давление постоянно вдоль сечения трубы, x-компонента уравнения (15.7) дает

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{17.7}$$

Отсюда опять получаем, что $\dfrac{dp}{dx} = \mathrm{const}$; градиент давления можно поэтому написать в виде $\Delta p/l$, где Δp — разность давлений на концах трубы, а l — ее длина.

Таким образом, распределение скоростей в потоке жидкости в трубе определяется двумерным уравнением типа $\Delta v = \mathrm{const}$. Это уравнение должно быть решено при граничном условии $u = 0$ на контуре сечения трубы. Решим это уравнение для трубы кругового сечения. Выбирая начало координат в центре кругового сечения и вводя полярные координаты, имеем в силу симметрии $v = v(r)$. Воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в полярных координатах, имеем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}.$$

Интегрируя, находим

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + a\ln r + b. \tag{17.8}$$

Постоянную a надо положить равной нулю, поскольку скорость должна оставаться конечной во всем сечении трубы, включая его

центр. Постоянную b определяем из требования $v = 0$ при $r = R$ (R — радиус трубы) и получаем

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2). \tag{17.9}$$

Таким образом, скорость распределена по сечению трубы по параболическому закону.

Легко определить количество (массу) жидкости Q, протекающей в 1 с через поперечное сечение трубы (или, как говорят, расход жидкости в трубе). Через кольцевой элемент $2\pi r\,dr$ площади сечения трубы проходит в 1 с количество жидкости $\rho \cdot 2\pi r v\,dr$. Поэтому

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R rv\,dr.$$

С помощью (17.9) получаем

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} R^4. \tag{17.10}$$

Количество протекающей жидкости пропорционально четвертой степени радиуса трубы [1]) .

Задачи

1. Определить течение жидкости по трубе с кольцевым сечением (внутренний и внешний радиусы трубы R_1 и R_2).

Решение. Определяя постоянные a и b в общем решении (17.8) из условий $v = 0$ при $r = R_1$ и $r = R_2$, находим

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left\{R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln\frac{r}{R_2}\right\}.$$

Количество протекающей жидкости равно

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{8\nu l}\left\{R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right\}.$$

2. То же для трубы эллиптического сечения.

Решение. Ищем решение уравнения (17.7) в виде $v = Ay^2 + Bz^2 + C$. Постоянные A, B, C определяем из требования, чтобы это выражение удовлетворяло уравнению и граничному условию $v = 0$ на контуре сечения (т. е. уравнение $Ay^2 + Bz^2 + C = 0$ должно совпадать с уравнением контура

[1]) Выражаемая этой формулой зависимость Q от Δp и R была установлена эмпирически *Гагеном* (*G. Hagen*, 1839) и *Пуазейлем* (*J.L.M. Poiseuille*, 1840) и объяснена теоретически *Стоксом* (*G.G. Stokes*, 1845).

В литературе параллельные течения вязкой жидкости между неподвижными стенками часто называют просто *пуазейлевыми*; в случае (17.4) говорят о плоском пуазейлевом течении.

$y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$, где a, b — полуоси эллипса). В результате получаем

$$v = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right).$$

Для количества протекающей жидкости получаем

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{4\nu l}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

3. То же для трубы с сечением в виде равностороннего треугольника (сторона треугольника a).

Решение. Обращающееся в нуль на треугольном контуре решение уравнения (17.7) есть

$$v = \frac{\Delta p}{l}\frac{2}{\sqrt{3}a\eta}h_1h_2h_3,$$

где h_1, h_2, h_3 — длины трех высот, опущенных из данной точки треугольника на три его стороны. Действительно, каждое из выражений Δh_1, Δh_2, Δh_3 (где $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$) равно нулю; это видно хотя бы из того, что каждую из высот h_1, h_2, h_3 можно выбрать в качестве одной из координат y или z, а при применении оператора Лапласа к координате получается нуль. Поэтому

$$\Delta h_1h_2h_3 = 2(h_1\,\nabla h_2\,\nabla h_3 + h_2\,\nabla h_1\,\nabla h_3 + h_3\,\nabla h_1\,\nabla h_2).$$

Но $\nabla h_1 = \mathbf{n}_1$, $\nabla h_2 = \mathbf{n}_2$, $\nabla h_3 = \mathbf{n}_3$, где $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — единичные векторы вдоль направлений высот h_1, h_2, h_3. Каждые два из $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ образуют друг с другом угол $2\pi/3$, так что

$$\nabla h_1\,\nabla h_2 = \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

и т. д., и мы получаем соотношение

$$\Delta h_1h_2h_3 = -(h_1+h_2+h_3) = -\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

с помощью которого убеждаемся в выполнении уравнения (17.7). Количество протекающей жидкости равно

$$Q = \frac{\sqrt{3}a^4\Delta p}{320\nu l}.$$

4. Цилиндр радиуса R_1 движется со скоростью u внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно своей оси; определить движение жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами.

Решение. Выбираем цилиндрические координаты с осью z по оси цилиндра. Скорость направлена везде вдоль оси z и зависит (как и давление) только от r:

$$v_z = v(r).$$

Для v получаем уравнение

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = 0$$

(член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = v\,\partial\mathbf{v}/\partial z$ исчезает тождественно). Используя граничные условия $v = u$ при $r = R_1$ и $v = 0$ при $r = R_2$, получаем

$$v = u\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}.$$

Сила трения, действующая на единицу длины каждого из цилиндров, равна $2\pi\eta u/\ln(R_2/R_1)$.

5. Слой жидкости (толщины h) ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу неподвижной плоскостью, наклоненной под углом α к горизонту. Определить движение жидкости, возникающее под влиянием поля тяжести.

Р е ш е н и е. Выбираем неподвижную нижнюю плоскость в качестве плоскости xy, ось x направлена по направлению течения жидкости, а ось z — перпендикулярно к плоскости xy (рис. 6). Ищем решение, зависящее только от координаты z. Уравнения Навье–Стокса с $v_x = v(z)$ при наличии поля тяжести гласят:

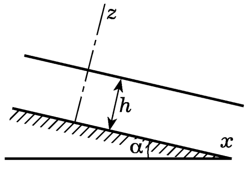


Рис. 6

$$\eta\frac{d^2v}{dz^2} + \rho g\sin\alpha = 0, \qquad \frac{dp}{dz} + \rho g\cos\alpha = 0.$$

На свободной поверхности ($z = h$) должны выполняться условия

$$\sigma_{zz} = -p = -p_0, \qquad \sigma_{xz} = \eta\frac{dv}{dz} = 0$$

(p_0 — атмосферное давление). При $z = 0$ должно быть $v = 0$. Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$p = p_0 + \rho g\cos\alpha\cdot(h - z), \qquad v = \frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}z(2h - z).$$

Количество жидкости, протекающее в единицу времени через поперечное сечение слоя (отнесенное к единице длины вдоль оси y):

$$Q = \rho\int_0^h v\,dz = \frac{\rho g h^3\sin\alpha}{3\nu}.$$

6. Определить закон падения давления вдоль трубки кругового сечения, по которой происходит изотермическое течение вязкого идеального газа (иметь в виду, что динамическая вязкость η идеального газа не зависит от его давления).

Р е ш е н и е. В каждом небольшом участке трубки газ можно считать несжимаемым (если только градиент давления не слишком велик) и соответственно этому можно применить формулу (17.10), согласно которой

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q}{\pi\rho R^4}.$$

На больших расстояниях, однако, ρ будет меняться, и давление не будет линейной функцией от x. Согласно уравнению Клапейрона плотность газа $\rho = mp/T$ (m — масса молекулы), так что

$$-\frac{dp}{dx} = \left(\frac{8\eta QT}{\pi m R^4}\right)\frac{1}{p}$$

(расход газа Q через все сечение трубки должен быть, очевидно, одинаковым вне зависимости от того, является ли газ несжимаемым или нет). Отсюда получаем

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{16\eta QT}{\pi m R^4}l$$

(p_1, p_2 — давления на концах участка трубки длины l).

§ 18. Движение жидкости между вращающимися цилиндрами

Рассмотрим движение жидкости, заключенной между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2; радиусы цилиндров пусть будут R_1 и R_2, причем $R_2 > R_1$ [1]). Выберем цилиндрические координаты r, z, φ с осью z по оси цилиндров. Из симметрии очевидно, что

$$v_z = v_r = 0, \quad v_\varphi = v(r); \quad p = p(r).$$

Уравнение Навье–Стокса в цилиндрических координатах дает в рассматриваемом случае два уравнения:

$$\frac{dp}{dr} = \rho\frac{v^2}{r}, \tag{18.1}$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0. \tag{18.2}$$

Второе из этих уравнений имеет решения типа r^n; подстановка решения в таком виде дает $n = \pm 1$, так что

$$v = ar + \frac{b}{r}.$$

Постоянные a и b находятся из предельных условий, согласно которым скорость жидкости на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях должна быть равна скорости соответствующего цилиндра: $v = R_1\Omega_1$ при $r = R_1$, $v = R_2\Omega_2$ при $r = R_2$. В результате получаем распределение скоростей в виде

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \tag{18.3}$$

Распределение давления получается отсюда согласно (18.1) простым интегрированием.

При $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ скорость $v = \Omega r$, т. е. жидкость вращается как целое вместе с цилиндрами. При отсутствии внешнего цилиндра ($\Omega_2 = 0$; $R_2 = \infty$) скорость

$$v = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}.$$

Определим еще момент действующих на цилиндры сил трения. На единицу поверхности внутреннего цилиндра действует

[1]) В литературе движение между вращающимися цилиндрами часто называют *течением Куэтта* (*M. Couette*, 1890). В пределе $R_1 \to R_2$ оно переходит в течение (17.1) между движущимися параллельными плоскостями; о нем говорят как о плоском течении Куэтта.

сила трения, направленная по касательной к поверхности и равная согласно (15.14) компоненте $\sigma'_{r\varphi}$ тензора напряжений. С помощью формул (15.17) находим

$$\sigma'_{r\varphi}\Big|_{r=R_1} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\Big|_{r=R_1} = -2\eta\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_2^3}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Момент этой силы получается отсюда умножением на R_1, а полный момент M_1, действующий на единицу длины цилиндра — умножением еще на $2\pi R_1$. Таким образом, находим

$$M_1 = -\frac{4\pi\eta(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{18.4}$$

Момент сил, действующих на внешний цилиндр, $M_2 = -M_1$. При $\Omega_2 = 0$ и малом зазоре между цилиндрами ($\delta \equiv R_2 - R_1 \ll R_2$) формула (18.4) принимает вид

$$M_2 = \eta RSu/\delta, \tag{18.5}$$

где $S \approx 2\pi R$ — площадь поверхности единицы длины цилиндра, а $u = \Omega_1 R$ — ее окружная скорость [1]).

По поводу полученных в этом и предыдущем параграфах решений уравнений движения вязкой жидкости можно сделать следующее общее замечание. Во всех этих случаях нелинейный член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ тождественно исчезает из уравнений, определяющих распределение скоростей, так что фактически приходится решать линейные уравнения, что крайне облегчает задачу. По этой же причине все эти решения тождественно удовлетворяют также и уравнениям движения идеальной несжимаемой жидкости, написанным, например, в виде (10.2), (10.3). С этим связано то обстоятельство, что формулы (17.1) и (18.3) не содержат вовсе коэффициента вязкости жидкости. Коэффициент вязкости содержится только в таких формулах, как (17.9), которые связывают скорость с градиентом давления в жидкости, поскольку самое наличие градиента давления связано с вязкостью жидкости; идеальная жидкость могла бы течь по трубе и при отсутствии градиента давления.

§ 19. Закон подобия

При изучении движения вязких жидкостей можно получить ряд существенных результатов из простых соображений, связанных с размерностью различных физических величин. Рассмотрим какой-нибудь определенный тип движения. Этим типом

---

[1]) Решение более сложной задачи о движении вязкой жидкости в узком зазоре между цилиндрами с параллельными, но эксцентрично расположенными осями, можно найти в кн.: *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз. 1963. Ч. 2, С. 534.

может быть, например, движение тела определенной формы через жидкость. Если тело не является шаром, то должно быть также указано, в каком направлении оно движется, например, движение эллипсоида в направлении его большой оси или в направлении его малой оси и т. п. Далее, речь может идти о течении жидкости по области, ограниченной стенками определенной формы (по трубе определенного сечения и т. п.).

Телами одинаковой формы мы называем при этом тела геометрически подобные, т. е. такие, которые могут быть получены друг из друга изменением всех линейных размеров в одинаковое число раз. Поэтому если форма тела задана, то для полного определения размеров тела достаточно указать какой-нибудь один из его линейных размеров (радиус шара или цилиндрической трубы, одну из полуосей эллипсоида вращения с заданным эксцентриситетом и т. п.).

Мы будем рассматривать сейчас стационарные движения. Поэтому если речь идет, например, об обтекании твердого тела жидкостью (ниже мы говорим для определенности о таком случае), то скорость натекающего потока жидкости должна быть постоянной. Жидкость мы будем предполагать несжимаемой.

Из параметров, характеризующих самую жидкость, в гидродинамические уравнения (уравнение Навье–Стокса) входит только кинематическая вязкость $\nu = \eta/\rho$; неизвестными же функциями, которые должны быть определены решением уравнений, являются при этом скорость $\mathbf{v}$ и отношение p/ρ давления p к постоянной ρ. Кроме того, течение жидкости зависит посредством граничных условий от формы и размеров движущегося в жидкости тела и от его скорости. Поскольку форма тела считается заданной, то его геометрические свойства определяются всего одним каким-нибудь линейным размером, который мы обозначим буквой l. Скорость же натекающего потока пусть будет u.

Таким образом, каждый тип движения жидкости определяется тремя параметрами: ν, u, l. Эти величины обладают размерностями:

$$[\nu] = \text{см}^2/\text{с}, \quad [l] = \text{см}, \quad [u] = \text{см}/\text{с}.$$

Легко убедиться в том, что из этих величин можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию, именно, lu/ν. Эту комбинацию называют *числом Рейнольдса* и обозначают через R:

$$\mathrm{R} = \frac{\rho u l}{\eta} = \frac{ul}{\nu}. \tag{19.1}$$

Всякий другой безразмерный параметр можно написать в виде функции от R.

Будем измерять длины в единицах l, а скорости — в единицах u, т. е. введем безразмерные величины $\mathbf{r}/l$ и $\mathbf{v}/u$. Поскольку

единственным безразмерным параметром является число Рейнольдса, то ясно, что получающееся в результате решения гидродинамических уравнений распределение скоростей определяется функциями вида

$$\mathbf{v} = u\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathrm{R}\right). \tag{19.2}$$

Из этого выражения видно, что в двух различных течениях одного и того же типа (например, обтекание шаров различного радиуса жидкостями различной вязкости) скорости $\mathbf{v}/u$ являются одинаковыми функциями отношения $\mathbf{r}/l$, если только числа Рейнольдса для этих течений одинаковы. Течения, которые могут быть получены друг из друга простым изменением масштаба измерения координат и скоростей, называются подобными. Таким образом, течения одинакового типа с одинаковым числом Рейнольдса подобны — так называемый *закон подобия* (*O. Reynolds*, 1883).

Аналогичную (19.2) формулу можно написать и для распределения давления в жидкости. Для этого надо составить из параметров ν, l, u величину с размерностью давления, деленного на ρ; в качестве такой величины выберем, например, u^2. Тогда можно утверждать, что $p/\rho u^2$ будет функцией от безразмерной переменной $\mathbf{r}/l$ и безразмерного параметра R. Таким образом,

$$p = \rho u^2 f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathrm{R}\right). \tag{19.3}$$

Наконец, аналогичные соображения применимы к величинам, характеризующим течение жидкости, но не являющимся уже функциями координат. Таковой является, например, действующая на обтекаемое тело сила сопротивления F. Именно, можно утверждать, что безразмерное отношение F к составленной из ν, u, l, ρ величине размерности силы должно быть функцией только от числа Рейнольдса. В качестве указанной комбинации из ν, u, l, ρ можно взять, например, произведение $\rho u^2 l^2$. Тогда

$$F = \rho u^2 l^2 f(\mathrm{R}). \tag{19.4}$$

Если влияние силы тяжести на движение существенно, то движение определяется не тремя, а четырьмя параметрами: l, u, ν и ускорением свободного падения g. Из этих параметров можно составить уже не одну, а две независимые безразмерные комбинации. В качестве их можно, например, выбрать число Рейнольдса и *число Фруда*, равное

$$\mathrm{F} = u^2/(lg). \tag{19.5}$$

В формулах (19.2)–(19.4) функция f будет зависеть теперь не от одного, а от двух параметров (R и F), и течения являются подобными лишь при равенстве обоих этих чисел.

Наконец, скажем несколько слов о нестационарных движениях. Нестационарное движение определенного типа характеризуется наряду с величинами ν, u, l еще значением какого-либо характерного для этого движения интервала времени τ, определяющего изменение движения со временем. Так, при колебаниях погруженного в жидкость твердого тела определенной формы этим временем может являться период колебаний. Из четырех величин ν, u, l, τ можно опять составить не одну, а две независимые безразмерные величины, в качестве которых можно взять число Рейнольдса и число

$$\mathrm{S} = u\tau/l, \tag{19.6}$$

называемое иногда *числом Струхала* (*Strouhal*). Подобие движений имеет место в таких случаях при равенстве обоих этих чисел.

Если колебания в жидкости возникают самопроизвольно (а не под влиянием заданной внешней вынуждающей силы), то для движения определенного типа число S будет определенной функцией числа R:

$$\mathrm{S} = f(\mathrm{R}).$$

§ 20. Течение при малых числах Рейнольдса

Уравнение Навье–Стокса заметно упрощается для движений с малым числом Рейнольдса. Для стационарного движения несжимаемой жидкости это уравнение имеет вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}.$$

Член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ имеет порядок величины u^2/l, где u и l имеют тот же смысл, как и в § 19. Выражение же $(\eta/\rho)\Delta\mathbf{v} \approx \eta u/(\rho l^2)$. Отношение первой величины ко второй есть как раз число Рейнольдса. Поэтому при $\mathrm{R} \ll 1$ членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь, и уравнение движения сводится к линейному уравнению

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \mathrm{grad}\,p = 0. \tag{20.1}$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{20.2}$$

оно полностью определяет движение. Полезно также заметить уравнение

$$\Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0, \tag{20.3}$$

получающееся применением операции rot к уравнению (20.1).

Рассмотрим прямолинейное и равномерное движение шара в вязкой жидкости (*G.G. Stokes*, 1851). Эта задача вполне

эквивалентна задаче об обтекании неподвижного шара потоком жидкости, имеющим на бесконечность заданную скорость $\mathbf{u}$. Распределение скоростей в первой задаче получается из решения второй задачи просто вычитанием скорости $\mathbf{u}$; тогда жидкость на бесконечности оказывается неподвижной, а шар движется со скоростью $-\mathbf{u}$. Если мы рассматриваем движение как стационарное, то надо, конечно, говорить именно об обтекании жидкостью неподвижного шара, так как при движущемся шаре скорость жидкости в каждой точке пространства меняется со временем.

Поскольку $\operatorname{div}(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, то $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ может быть представлено в виде ротора некоторого вектора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{v}-\mathbf{u} = -\operatorname{rot}\mathbf{A},$$

причем $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ обращается на бесконечности в нуль. Вектор $\mathbf{A}$ должен быть аксиальным для того, чтобы его ротор был полярным вектором, как скорость. В задаче об обтекании полностью симметричного тела — шара — нет никаких выделенных направлений за исключением направления $\mathbf{u}$. Этот параметр $\mathbf{u}$ должен входить в $\mathbf{A}$ линейно — в виду линейности уравнения движения и граничных условий к нему. Общий вид векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, удовлетворяющей всем этим требованиям, есть $\mathbf{A} = f'(r)[\mathbf{nu}]$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора $\mathbf{r}$ (начало координат выбираем в центре шара), а $f'(r)$ — скалярная функция от r. Произведение $f'(r)\mathbf{n}$ можно представить в виде градиента некоторой другой функции $f(r)$. Таким образом, мы будем искать скорость в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \operatorname{rot}[\nabla f\cdot\mathbf{u}] = \mathbf{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot} f\mathbf{u} \tag{20.4}$$

(в последнем равенстве учтено, что $\mathbf{u} = \mathrm{const}$).

Для определения функции f воспользуемся уравнением (20.3). Имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot} f\mathbf{u} = (\operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta)\operatorname{rot} f\mathbf{u} = -\Delta\operatorname{rot} f\mathbf{u}.$$

Поэтому (20.3) принимает вид

$$\Delta^2\operatorname{rot} f\mathbf{u} = \Delta^2[\nabla f\cdot\mathbf{u}] = [\Delta^2\operatorname{grad} f\cdot\mathbf{u}] = 0.$$

Отсюда следует, что должно быть

$$\Delta^2\operatorname{grad} f = 0. \tag{20.5}$$

Первое интегрирование дает $\Delta^2 f = \mathrm{const}$. Легко видеть, что const должна быть положена равной нулю. Действительно, на бесконечности разность $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ должна исчезать; тем более это относится к ее производным. Выражение же $\Delta^2 f$ содержит четвертые производные от f, между тем как сама скорость выражается через ее вторые производные.

Таким образом, имеем

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Delta f}{dr}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + c.$$

Постоянная c должна быть положена равной нулю для того, чтобы скорость $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ исчезала на бесконечности. Интегрируя остающееся уравнение, находим

$$f = ar + \frac{b}{r} \tag{20.6}$$

(аддитивная постоянная в f опущена как несущественная — скорость определяется производными от f).

Подстановка в (20.4) дает после простого вычисления

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a\frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} + b\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}}{r^3}. \tag{20.7}$$

Постоянные a и b должны быть определены из граничного условия $\mathbf{v} = 0$ при $r = R$ (на поверхности шара):

$$\mathbf{u}\left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}\right) + \mathbf{n}(\mathbf{un})\left(-\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3}\right) = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при произвольном $\mathbf{n}$, то коэффициенты при $\mathbf{u}$ и при $\mathbf{n}(\mathbf{un})$ должны обращаться в нуль каждый в отдельности. Отсюда находим $a = 3R/4$, $b = R^3/4$ и окончательно:

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r}, \tag{20.8}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{3R}{4}\frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} - \frac{R^3}{4}\frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{un})}{r^3} + \mathbf{u}. \tag{20.9}$$

Компоненты скорости в сферических координатах (с полярной осью в направлении $\mathbf{u}$):

$$\begin{aligned} v_r &= u\cos\theta\left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right], \\ v_\theta &= -u\sin\theta\left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right]. \end{aligned} \tag{20.10}$$

Этим определяется распределение скоростей вокруг движущегося шара.

Для определения давления подставляем (20.4) в (20.1):

$$\operatorname{grad} p = \eta\Delta\mathbf{v} = \eta\Delta\operatorname{rot}\operatorname{rot} f\mathbf{u} = \eta\Delta(\operatorname{grad}\operatorname{div} f\mathbf{u} - \mathbf{u}\Delta f).$$

Но $\Delta^2 f = 0$ и потому

$$\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}(\eta\Delta \operatorname{div} f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(\eta\mathbf{u}\operatorname{grad}\Delta f).$$

Отсюда

$$p = \eta\mathbf{u}\operatorname{grad}\Delta f + p_0 \tag{20.11}$$

(p_0 — давление жидкости на бесконечности). Подстановка f приводит к окончательному выражению

$$p = p_0 - \frac{3}{2}\eta\frac{\mathbf{un}}{r^2}R. \tag{20.12}$$

С помощью полученных формул можно вычислить силу $\mathbf{F}$ давления текущей жидкости на шар (или, что то же, силу сопротивления, испытываемую движущимся в жидкости шаром). Для этого введем сферические координаты с полярной осью вдоль скорости $\mathbf{u}$; все величины будут в силу симметрии функциями только от r и полярного угла θ. Очевидно, что сила $\mathbf{F}$ направлена по скорости $\mathbf{u}$. Абсолютная величина этой силы может быть определена с помощью (15.14). Определяя из этой формулы компоненты (по нормали и по касательной к поверхности) силы, приложенной к элементу поверхности шара, и проецируя эти компоненты на направление $\mathbf{u}$, найдем

$$F = \int\big(-p\cos\theta + \sigma'_{rr}\cos\theta - \sigma'_{r\theta}\sin\theta\big)\,df, \tag{20.13}$$

где интегрирование производится по всей поверхности шара.

Подставив выражения (20.10) в формулы

$$\sigma'_{rr} = 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma'_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

(см. (15.20)), найдем, что на поверхности шара

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta}{2R}u\sin\theta,$$

а давление (20.12)

$$p = p_0 - \frac{3\eta u}{2R}\cos\theta.$$

Поэтому интеграл (20.13) сводится к выражению

$$F = \frac{3\eta u}{2R}\int df.$$

Окончательно находим следующую *формулу Стокса* для силы сопротивления, действующей на медленно движущийся в

жидкости шар [1]:

$$F = 6\pi R\eta u. \tag{20.14}$$

Отметим, что сила сопротивления оказывается пропорциональной первым степеням скорости и линейных размеров тела. Такая зависимость могла бы быть предсказана уже из соображений размерности. Дело в том, что в приближенные уравнения движения (20.1), (20.2) параметр ρ — плотность жидкости — не входит. Поэтому определенная с их помощью сила F может выражаться только через величины η, u, R; из них можно составить только одну комбинацию с размерностью силы — произведение $\eta u R$.

Такая же зависимость имеет место и для медленно движущихся тел другой формы. Направление силы сопротивления, в общем случае тела произвольной формы, не совпадает с направлением скорости; в общем виде зависимость $\mathbf{F}$ от $\mathbf{u}$ может быть написана как

$$F_i = \eta a_{ik} u_k, \tag{20.15}$$

где a_{ik} — не зависящий от скорости тензор второго ранга. Существенно, что этот тензор симметричен. Это утверждение (справедливое в линейном по скорости приближении) является частным случаем общего закона, имеющего место для медленных движений, сопровождающихся диссипативными процессами (см. V, § 121).

Уточнение формулы Стокса. Полученное выше решение задачи об обтекании оказывается неприменимым на достаточно больших расстояниях от шара, несмотря на малость числа Рейнольдса. Для того чтобы убедиться в этом, оценим член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, которым мы пренебрегли (20.1). На больших расстояниях скорость $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$. Производные же от скорости на этих расстояниях — порядка величины uR/r^2, как это видно из (20.9). Следовательно, $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim u^2R/r^2$. Оставленные же в уравнении (20.1) члены — порядка величины $\eta Ru/(\rho r^3)$ (как это можно увидеть из той же

---

[1]) Имея в виду некоторые дальнейшие применения, укажем, что если производить вычисления, пользуясь выражением (20.7) для скорости с неопределенными постоянными a и b, то получится

$$F = 8\pi a\eta u. \tag{20.14a}$$

Сила сопротивления может быть вычислена и для медленно движущегося произвольного трехосного эллипсоида. Соответствующие формулы можно найти в кн.: *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. Укажем здесь предельные выражения для плоского круглого диска (радиуса R), движущегося в направлении, перпендикулярном к своей плоскости:

$$F = 16\eta Ru,$$

и для такого же диска, движущегося в своей плоскости:

$$F = (32/3)\eta Ru.$$

формулы (20.9) для скорости или формулы (20.12) для давления). Условие $u\eta R/(\rho r^3) \gg u^2R/r^2$ выполняется только на расстояниях

$$r \ll \nu/u. \tag{20.16}$$

На бóльших расстояниях сделанные пренебрежения оказываются незаконными и полученное распределение скоростей неправильным.

Для получения распределения скоростей на больших расстояниях от обтекаемого тела следует учесть отброшенный в (20.1) член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Поскольку на этих расстояниях скорость $\mathbf{v}$ мало отличается от $\mathbf{u}$, то можно написать приближенно $(\mathbf{u}\nabla)$ вместо $(\mathbf{v}\nabla)$. Тогда мы получим для скорости на больших расстояниях линейное уравнение

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{20.17}$$

(*C.W. Oseen*, 1910). Мы не станем излагать здесь ход решения этого уравнения для обтекания шара [1]. Укажем лишь, что с помощью получаемого таким образом распределения скоростей можно вывести уточненную формулу для испытываемой шаром силы сопротивления (следующий член разложения этой силы по числу Рейнольдса $\mathrm{R} = uR/\nu$):

$$F = 6\pi\eta uR\left(1 + \frac{3Ru}{8\nu}\right). \tag{20.18}$$

Укажем также, что при решении задачи об обтекании бесконечного цилиндра жидкостью, движущейся в поперечном к цилиндру направлении, необходимо с самого начала решать уравнение Осеена (уравнение же (20.1) в этом случае вовсе не обладает решением, удовлетворяющим граничным условиям на поверхности тела и в то же время обращающимся в нуль на бесконечности). Отнесенная к единице длины сила сопротивления оказывается равной

$$F = \frac{4\pi\eta u}{1/2 - C - \ln(Ru/4\nu)} = \frac{4\pi\eta u}{\ln(3{,}70\nu/Ru)}, \tag{20.19}$$

где $C = 0{,}577\ldots$ — число Эйлера (*H. Lamb*, 1911) [2].

---

[1] Его можно найти в книгах: *Кочин Н.Е.*, *Кибель И.А.*, *Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2. Гл. II, § 25, 26; *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. § 342, 343.

[2] Невозможность вычисления силы сопротивления в задаче о цилиндре с помощью уравнения (20.1) очевидна уже из соображений размерности. Как уже отмечено выше, результат должен был бы выражаться только через параметры η, u, R. Но в данном случае речь идет о силе, отнесенной к единице длины цилиндра; величиной такой размерности могло бы быть только произведение ηu, не зависящее от размеров тела (и тем самым не обращающееся в нуль при $R \to 0$), что физически нелепо.

Возвращаясь к задаче об обтекании шара, надо сделать следующее замечание. Произведенная в уравнении (20.17) замена $\mathbf{v}$ на $\mathbf{u}$ в нелинейном члене оправдана вдали от шара, на расстояниях $r \gg R$. Естественно поэтому, что, давая правильное уточнение картины движения на больших расстояниях от обтекаемого тела, уравнение Осеена не дает такого уточнения на близких расстояниях (это проявляется в том, что решение уравнения (20.17), удовлетворяющее необходимым условиям на бесконечности, не удовлетворяет точному условию обращения в нуль скорости на поверхности шара; это условие соблюдается лишь для нулевого члена разложения скорости по степеням числа Рейнольдса и не выполняется уже для члена первого порядка). Поэтому на первый взгляд может показаться, что решение уравнения Осеена не может послужить для правильного вычисления поправочного члена в силе сопротивления. Это, однако, не так по следующей причине. Вклад в силу $\mathbf{F}$, связанный с движением жидкости на близких расстояниях (для которых $u \ll \nu/r$), должен быть разложим по степеням вектора $\mathbf{u}$. Поэтому первый происходящий от этого вклада отличный от нуля поправочный член в векторной величине $\mathbf{F}$ будет пропорционален $\mathbf{u}u^2$, т. е. дает поправку второго порядка по числу Рейнольдса и, таким образом, не отразится на поправке первого порядка в формуле (20.18).

Вычисление же следующих поправок к формуле Стокса и правильное уточнение картины течения на близких расстояниях с помощью прямого решения уравнения (20.17) невозможно. Хотя сам по себе вопрос об этих уточнениях и не столь важен, выяснение своеобразного характера последовательной теории возмущений для решения задач об обтекании вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса представляет заметный методический интерес (*S. Kaplun*, *P.A. Lagerstrom*, 1957; *I. Proudman*, *J.R. Pearson*, 1957). Опишем имеющую здесь место ситуацию, приведя все нужные для ее уяснения формулы, но не останавливаясь на детальном проведении вычислений [1]).

[1]) Его можно найти в кн.: *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967. Гл. VIII (*Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. — Acad. Press, 1964). Вычисления произведены здесь не в терминах скорости $\mathbf{v}(r)$, а в менее наглядных, но более компактных терминах функции тока. Для осесимметричных течений (к которым относится обтекание шара) функция тока $\psi(r, \theta)$ в сферических координатах вводится согласно определению

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0.$$

Тем самым тождественно удовлетворяется уравнение непрерывности (15.22).

Для явного выявления малого параметра R — числа Рейнольдса — введем безразмерные скорость и радиус-вектор $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/u$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/R$ и ниже в этом параграфе будем обозначать их теми же буквами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$, опуская штрих. Тогда точное уравнение движения (которое возьмем в форме (15.10) с исключенным давлением) запишется в виде

$$\mathrm{R}\,\mathrm{rot}\,[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] + \Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0. \tag{20.20}$$

Выделим в пространстве вокруг обтекаемого шара две области: ближнюю и дальнюю, определенные соответственно условиями $r \ll 1/\mathrm{R}$ и $r \gg 1$. Вместе эти области исчерпывают все пространство, причем частично они перекрываются в «промежуточной» области

$$1/\mathrm{R} \gg r \gg 1. \tag{20.21}$$

При проведении последовательной теории возмущений исходным приближением в ближней области является стоксово приближение — решение уравнения $\Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$, получающегося из (20.20) пренебрежением члена с множителем R. Это решение дается формулами (20.10); в безразмерных переменных оно имеет вид

$$v_r^{(1)} = \cos\theta\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right), \quad v_\theta^{(1)} = -\sin\theta\left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3}\right), \quad r \ll 1/\mathrm{R} \tag{20.22}$$

(индекс (1) отмечает первое приближение).

Первым приближением в дальней области является просто постоянное значение $\mathbf{v}^{(1)} = \boldsymbol{\nu}$, отвечающее невозмущенному однородному набегающему потоку ($\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении обтекания). Подстановка $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{v}^{(2)}$ в (20.20) приводит для $\mathbf{v}^{(2)}$ к уравнению Осеена

$$\mathrm{R}\,\mathrm{rot}\,[\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^{(2)}] + \Delta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}^{(2)} = 0. \tag{20.23}$$

Решение должно удовлетворять условию обращения скорости $\mathbf{v}^{(2)}$ в нуль на бесконечности и условию сшивки с решением (20.22) в промежуточной области; последнее условие исключает, в частности, решения, слишком быстро возрастающие с уменьшением r [1]). Таким решением является следующее:

$$v_r^{(1)} + v_r^{(2)} = \cos\theta + \frac{3}{2\mathrm{R}r^2}\left\{1 - \left[1 + \frac{\mathrm{R}r}{2}(1+\cos\theta)\right]e^{-\frac{1}{2}r\mathrm{R}(1-\cos\theta)}\right\}, \tag{20.24}$$

$$v_\theta^{(1)} + v_\theta^{(2)} = -\sin\theta + \frac{3}{4r}\sin\theta e^{-\frac{1}{2}r\mathrm{R}(1-\cos\theta)}, \quad r \gg 1.$$

[1]) Для фиксирования численных коэффициентов в решении надо также учесть условие обращения в нуль полного потока жидкости через всякую замкнутую поверхность, охватывающую собой обтекаемый шар.

Отметим, что естественной переменной для дальней области является не сама радиальная координата r, а произведение $\rho = r\mathrm{R}$. При введении этой переменной из уравнения (20.20) выпадает число R — в соответствии с тем, что при $r \gtrsim 1/\mathrm{R}$ вязкие и инерционные члены в уравнении сравниваются по порядку величины. Число R входят при этом в решение только через граничное условие сшивки с решением в ближней области. Поэтому разложение функции $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в дальней области является разложением по степеням R при заданных значениях произведения $\rho = r\mathrm{R}$; действительно, вторые члены в (20.24), будучи выражены через ρ, содержат множитель R.

Для проверки правильности сшивки друг с другом решений (20.22) и (20.24), замечаем, что в промежуточной области (20.21) $r\mathrm{R} \ll 1$ и выражения (20.24) могут быть разложены по этой переменной. С точностью до первых двух (после однородного потока) членов разложения находим

$$\begin{aligned} v_r &= \cos\theta\Big(1 - \frac{3}{2r}\Big) + \frac{3\mathrm{R}}{16}(1-\cos\theta)(1+3\cos\theta), \\ v_\theta &= -\sin\theta\Big(1 - \frac{3}{4r}\Big) - \frac{3\mathrm{R}}{8}\sin\theta(1-\cos\theta). \end{aligned} \tag{20.25}$$

С другой стороны, в той же области $r \gg 1$ и потому в (20.22) можно опустить члены $\sim 1/r^3$; остающиеся выражения действительно совпадают с первыми членами в (20.25) (вторые члены в (20.25) понадобятся ниже).

Для перехода к следующему приближению в ближней области пишем $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$ и получаем из (20.20) уравнение для поправки второго приближения:

$$\Delta \operatorname{rot} \mathbf{v}^{(2)} = -\mathrm{R} \operatorname{rot}[\mathbf{v}^{(1)} \operatorname{rot} \mathbf{v}^{(1)}]. \tag{20.26}$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять условию обращения в нуль на поверхности шара и условию сшивки с решением в дальней области; последнее означает, что главные члены в функции $\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r})$ при $r \gg 1$ должны совпасть со вторыми членами в (20.25). Таким решением является следующее:

$$\begin{aligned} v_r^{(2)} &= \frac{3\mathrm{R}}{8} v_r^{(1)} + \frac{3\mathrm{R}}{32}\Big(1 - \frac{1}{r}\Big)^2\Big(2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\Big)(1 - 3\cos^2\theta), \\ v_\theta^{(2)} &= \frac{3\mathrm{R}}{8} v_\theta^{(1)} + \frac{3\mathrm{R}}{32}\Big(1 - \frac{1}{r}\Big)\Big(4 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3}\Big)\sin\theta\cos\theta, \\ & \qquad r \ll 1/\mathrm{R}. \end{aligned} \tag{20.27}$$

В промежуточной области в этих выражениях остаются только члены, не содержащие множителей $1/r$; эти члены действительно совпадают со вторыми членами в (20.25).

По распределению скоростей (20.27) можно вычислить поправку к формуле Стокса для силы сопротивления. Вторые

члены в (20.27) в силу своей угловой зависимости не дают вклада в силу, а первые дают как раз тот поправочный член 3R/8, который был приведен в (20.18). В соответствии с изложенной выше аргументацией правильное распределение скоростей вблизи шара приводит (в рассмотренном приближении) к тому же результату для силы, что и решение уравнения Осеена.

Следующее приближение может быть получено путем продолжения описанной процедуры. В этом приближении в распределении скоростей появляются логарифмические члены, а в выражении (20.18) для силы сопротивления скобка заменяется на

$$\left(1 + \frac{3}{8}\mathrm{R} - \frac{9}{40}\mathrm{R}^2 \ln\frac{1}{\mathrm{R}}\right)$$

(причем логарифм $\ln(1/\mathrm{R})$ предполагается большим) [1].

Задачи

1. Определить движение жидкости, заполняющей пространство между двумя концентрическими сферами (радиусов R_1 и R_2; $R_2 > R_1$), равномерно вращающимися вокруг различных диаметров с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 (числа Рейнольдса $\Omega_1 R_1^2/\nu$, $\Omega_2 R_2^2/\nu \ll 1$).

Решение. В силу линейности уравнений движение между двумя вращающимися сферами можно рассматривать как наложение двух движений, имеющих место, если одна из сфер покоится, а другая вращается. Положим сначала $\Omega_2 = 0$, т. е. вращается только внутренняя сфера. Естественно ожидать, что скорость жидкости в каждой точке будет направлена по касательной к окружности с центром на оси вращения в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Но в силу аксиальной симметрии относительно оси вращения давление не может иметь градиента в этом направлении. Поэтому уравнение движения (20.1) приобретает вид

$$\Delta \mathbf{v} = 0.$$

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}_1$ является аксиальным вектором. Рассуждения, аналогичные произведенным в тексте, показывают, что можно искать скорость в виде

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}_1 f(r) = [\nabla f \cdot \boldsymbol{\Omega}_1].$$

Уравнение движения дает тогда $[\operatorname{grad} \Delta f \cdot \boldsymbol{\Omega}_1] = 0$, поскольку вектор $\operatorname{grad} \Delta f$ направлен по радиус-вектору, а произведение $[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}_1]$ не может быть равно нулю при заданном $\boldsymbol{\Omega}_1$ и произвольном $\mathbf{r}$, то должно быть $\operatorname{grad} \Delta f = 0$, так что

$$\Delta f = \text{const}.$$

Интегрируя, получаем

$$f = ar^2 + \frac{b}{r}, \quad \mathbf{v} = \left(\frac{b}{r^3} - 2a\right)[\boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{r}].$$

Постоянные a и b определяются из условий $\mathbf{v} = 0$ при $r = R_2$ и $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ при $r = R_1$, где $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{r}]$ есть скорость точек вращающейся сферы. В результате получим

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)[\boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{r}].$$

[1] См.: *Proudman I.*, *Pearson J.R.* // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 237.

Давление в жидкости остается постоянным ($p = p_0$). Аналогично получается для случая, когда вращается внешний шар, а внутренний покоится ($\Omega_1 = 0$):

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)[\boldsymbol{\Omega}_2\mathbf{r}].$$

В общем случае вращения обеих сфер имеем

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left\{\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)[\boldsymbol{\Omega}_1\mathbf{r}] + \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)[\boldsymbol{\Omega}_2\mathbf{r}]\right\}.$$

Если внешний шар вообще отсутствует ($R_2 = \infty$, $\boldsymbol{\Omega}_2 = 0$), т. е. мы имеем просто шар радиуса R, вращающийся в неограниченной жидкости, то

$$\mathbf{v} = \frac{R^3}{r^3}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}].$$

Вычислим момент сил трения, действующих на шар в этом случае. Если выбрать сферические координаты с полярной осью по $\boldsymbol{\Omega}$, то

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_\varphi = v = \frac{R^3\Omega}{r^2}\sin\theta.$$

Действующая на единицу поверхности шара сила трения равна

$$\sigma'_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\Big|_{r=R} = -3\eta\Omega\sin\theta.$$

Полный действующий на шар момент сил трения есть

$$M = \int_0^\pi \sigma'_{r\varphi} R\sin\theta \cdot 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta,$$

откуда

$$M = -8\pi\eta R^3\Omega.$$

Если отсутствует внутренний шар, то $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}_2\mathbf{r}]$, т. е. жидкость просто вращается как целое вместе со сферой, внутри которой она находится.

2. Определить скорость круглой капли жидкости (с вязкостью η'), движущейся под влиянием силы тяжести в жидкости с вязкостью η (*W. Rybczynski*, 1911).

Р е ш е н и е. Воспользуемся системой координат, в которой капля покоится. Для жидкости снаружи капли ищем решение уравнения (20.5) опять в виде (20.6), так что скорость имеет вид (20.7). Для жидкости же внутри капли надо искать решение, не обладающее особой точкой при $r = 0$ (причем должны оставаться конечными также и вторые производные от f, определяющие скорость). Таким общим решением является

$$f = \frac{A}{4}r^2 + \frac{B}{8}r^4,$$

чему соответствует скорость

$$\mathbf{v} = -A\mathbf{u} + Br^2[\mathbf{n}(\mathbf{un}) - 2\mathbf{u}].$$

На поверхности шара [1]) должны быть выполнены следующие условия. Нормальные составляющие скорости вещества вне ($\mathbf{v}^{(e)}$) и внутри ($\mathbf{v}^{(i)}$) капли должны обращаться в нуль:

$$v_r^{(i)} = v_r^{(e)} = 0.$$

Касательная компонента скорости должна быть непрерывна:

$$v_\theta^{(i)} = v_\theta^{(e)},$$

то же самое должно иметь место для компоненты $\sigma_{r\theta}$ тензора напряжений

$$\sigma_{r\theta}^{(i)} = \sigma_{r\theta}^{(e)}$$

(условие же равенства компонент σ_{rr} тензора напряжений можно не писать — оно определило бы собой искомую скорость u, которую, однако, проще найти, как это сделано ниже). Из указанных четырех условий получаем четыре уравнения для постоянных a, b, A, B, решение которых дает

$$a = R\frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad b = R^3\frac{\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}.$$

Для силы сопротивления получаем согласно (20.14а):

$$F = 2\pi u\eta R\frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}.$$

При $\eta' \to \infty$ (что соответствует твердому шарику) эта формула переходит в формулу Стокса. В предельном же случае $\eta' \to 0$ (газовый пузырек) получается $F = 4\pi u\eta R$, т. е. сила сопротивления составляет $2/3$ сопротивления твердому шарику.

Приравнивая F действующей на каплю силе тяжести $\frac{4\pi}{3}R^3(\rho - \rho')g$, найдем

$$u = \frac{2R^2g(\rho - \rho')(\eta + \eta')}{3\eta(2\eta + 3\eta')}.$$

3. Две параллельные плоские круглые пластинки (радиуса R) расположены одна над другой на малом расстоянии друг от друга; пространство между ними заполнено жидкостью. Пластинки сближаются друг с другом с постоянной скоростью u, вытесняя жидкость. Определить испытываемое пластинками сопротивление (*O. Reynolds*).

Р е ш е н и е. Выбираем цилиндрические координаты с началом в центре нижней пластинки (которую полагаем неподвижной). Движение жидкости осесимметрично, а ввиду тонкости слоя жидкости в основном радиально ($v_z \ll v_r$), причем $\partial v_r/\partial r \ll \partial v_r/\partial z$. Поэтому уравнения движения принимают вид

$$\eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

---

[1]) Изменение формы капли при ее движении можно не рассматривать, так как оно представляет собой эффект высшего порядка малости. Но для того чтобы движущаяся капля фактически была шарообразной, силы поверхностного натяжения на ее границе должны превышать силы, происходящие от неравномерности давления и стремящиеся нарушить шаровую форму. Это значит, что должно быть $\eta u/R \ll \alpha/R$ (α — коэффициент поверхностного натяжения) или, подставляя $u \sim R^2 g\rho/\eta$:

$$R \ll (\alpha/(\rho g))^{1/2}.$$

с граничными условиями

$$\text{при } z = 0: \quad v_r = v_z = 0,$$
$$\text{при } z = h: \quad v_r = 0, \quad v_z = -u,$$
$$\text{при } r = R: \quad p = p_0$$

(h — расстояние между пластинками, p_0 — внешнее давление). Из уравнений (1) находим

$$v_r = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dr}z(z-h).$$

Интегрируя же уравнение (2) по dz, получим

$$u = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_0^h r v_r\,dz = -\frac{h^3}{12\eta r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right),$$

откуда

$$p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3}(R^2 - r^2).$$

Полная сила сопротивления, действующая па пластинку, равна

$$F = \frac{3\pi\eta u R^4}{2h^3}.$$

§ 21. Ламинарный след

При стационарном обтекании твердого тела вязкой жидкостью движение жидкости на больших расстояниях позади тела обладает своеобразным характером, который может быть исследован в общем виде вне зависимости от формы тела.

Обозначим через $\mathbf{U}$ постоянную скорость натекающего на тело потока жидкости (направление $\mathbf{U}$ выберем в качестве оси x с началом где-либо внутри обтекаемого тела). Истинную же скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде $\mathbf{U} + \mathbf{v}$; на бесконечности $\mathbf{v}$ обращается в нуль.

Оказывается, что на больших расстояниях позади тела скорость $\mathbf{v}$ заметно отлична от нуля лишь в сравнительно узкой области вокруг оси x. В эту область, называемую *ламинарным следом* [1]), попадают частицы жидкости, движущиеся вдоль линий тока, проходящих мимо обтекаемого тела на сравнительно небольших расстояниях от него. Поэтому движение жидкости в следе существенно завихрено. Дело в том, что источником завихренности при обтекании твердого тела вязкой жидкостью является именно его поверхность [2]). Это легко понять, вспомнив,

[1]) В отличие от турбулентного следа — см. § 37.

[2]) На неправомерность утверждения о сохранении равенства $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ вдоль линий тока, проходящей вдоль твердой поверхности, указывалось уже в § 9.

что в картине потенциального обтекания, отвечающей идеальной жидкости, на поверхности тела обращается в нуль только нормальная, но не тангенциальная скорость жидкости $\mathbf{v}_t$. Между тем граничное условие прилипания для реальной жидкости требует обращения в нуль также и $\mathbf{v}_t$. При сохранении картины потенциального обтекания это привело бы к конечному скачку $\mathbf{v}_t$ — возникновению поверхностного ротора скорости. Под влиянием вязкости скачок размывается и завихренность проникает в глубь жидкости, откуда и переносится конвективным образом в область следа.

На линиях же тока, проходящих достаточно далеко от тела, влияние вязкости незначительно на всем их протяжении, и потому ротор скорости на них (равный нулю в натекающем из бесконечности потоке) остается практически равным нулю, как это было бы в идеальной жидкости. Таким образом, на больших расстояниях от тела движение жидкости можно считать потенциальным везде, за исключением лишь области следа.

Выведем формулы, связывающие свойства движения жидкости в следе с действующими на обтекаемое тело силами.

Полный поток импульса, переносимого жидкостью через какую-нибудь замкнутую поверхность, охватывающую собой обтекаемое тело, равен взятому по этой поверхности интегралу от тензора потока импульса:

$$\oint \Pi_{ik}\, df_k.$$

Компоненты тензора Π_{ik} равны

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho(U_i - v_i)(U_k + v_k).$$

Напишем давление в виде $p = p_0 + p'$, где p_0 — давление на бесконечности. Интегрирование постоянного члена $p_0\delta_{ik} + \rho U_i U_k$ даст в результате нуль, поскольку для замкнутой поверхности векторный интеграл $\oint d\mathbf{f} = 0$. Обращается в нуль также и интеграл $\int \rho v_k\, df_k$: поскольку полное количество жидкости в рассматриваемом объеме остается неизменным, полный поток жидкости через охватывающую его поверхность должен исчезать. Наконец, вдали от тела скорость $\mathbf{v}$ мала по сравнению с $\mathbf{U}$. Поэтому если рассматриваемая поверхность расположена достаточно далеко от тела, то на ней можно пренебречь в Π_{ik} членом $\rho v_i v_k$ по сравнению с $\rho U_k v_i$. Таким образом, полный поток импульса будет равен интегралу

$$\oint (p'\delta_{ik} + \rho U_k v_i)\, df_k.$$

Выберем теперь в качестве рассматриваемого объема жидкости объем между двумя бесконечными плоскостями $x = \mathrm{const}$,

из которых одна взята достаточно далеко впереди, а другая — позади тела. При определении полного потока импульса интеграл по бесконечно удаленной «боковой» поверхности исчезает (так как на бесконечности $p' = 0$, $\mathbf{v} = 0$), и поэтому достаточно интегрировать только по обеим поперечным плоскостям. Получающийся таким образом поток импульса представляет собой, очевидно, разность между полным потоком импульса, втекающим через переднее, и потоком, вытекающим через заднее сечение. Но эта разность является в то же время количеством импульса, передаваемым в единицу времени от жидкости к телу, т. е. силой $\mathbf{F}$, действующей на обтекаемое тело.

Таким образом, компоненты силы $\mathbf{F}$ равны разностям

$$F_x = \left(\int\limits_{x=x_2} - \int\limits_{x=x_1} \right) (p' + \rho U v_x)\, dy\, dz,$$

$$F_y = \left(\int\limits_{x=x_2} - \int\limits_{x=x_1} \right) \rho U v_y\, dy\, dz, \quad F_z = \left(\int\limits_{x=x_2} - \int\limits_{x=x_1} \right) \rho U v_z\, dy\, dz,$$

где интегрирование производится по бесконечным плоскостям $x = x_1$ (значительно позади) и $x = x_2$ (значительно впереди тела). Рассмотрим сначала первую из этих величин.

Вне следа движение потенциально, и потому справедливо уравнение Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = \mathrm{const} \equiv p_0 + \frac{\rho}{2}U^2,$$

или, пренебрегая членом $\rho v^2/2$ по сравнению с $\rho \mathbf{U}\mathbf{v}$,

$$p' = -\rho U v_x.$$

Мы видим, что в этом приближении подынтегральное выражение в F_x обращается в нуль во всей области вне следа. Другими словами, интеграл по плоскости $x = x_2$ (проходящей впереди тела и не пересекающей след вовсе) исчезает полностью, а в интеграле по задней плоскости $x = x_1$ надо интегрировать лишь по площади сечения следа. Но внутри следа изменение давления p' — порядка величины ρv^2, т. е. мало по сравнению с $\rho U v_x$. Таким образом, приходим к окончательному результату, что сила сопротивления, действующая на тело в направлении обтекания, равна

$$F_x = -\rho U \int v_x\, dy\, dz, \tag{21.1}$$

где интегрирование производится по площади поперечного сечения следа вдали от тела. Скорость v_x в следе, разумеется, отрицательна — жидкость движется здесь медленнее, чем она двигалась бы при отсутствии тела. Обратим внимание на то, что стоящий в (21.1) интеграл определяет «дефицит» расхода жидкости

через сечение следа по сравнению с расходом при отсутствии тела.

Рассмотрим теперь силу (с компонентами F_y, F_z), стремящуюся сдвинуть тело в поперечном направлении. Эта сила называется *подъемной*. Вне следа, где движение потенциально, можно написать $v_y = \partial\varphi/\partial y$, $v_z = \partial\varphi/\partial z$; интеграл по проходящей везде вне следа плоскости $x = x_2$ обращается в нуль:

$$\int v_y\,dy\,dz = \int \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy\,dz = 0, \quad \int \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy\,dz = 0,$$

поскольку на бесконечности $\varphi = 0$. Таким образом, для подъемной силы получаем выражение

$$F_y = -\rho U \int v_y\,dy\,dz, \quad F_z = -\rho U \int v_z\,dy\,dz. \tag{21.2}$$

Интегрирование в этих формулах фактически тоже производится лишь по площади сечения следа. Если обтекаемое тело обладает осью симметрии (не обязательно полной аксиальной симметрии) и обтекание происходит вдоль направления этой оси, то осью симметрии обладает и движение жидкости вокруг тела. В этом случае подъемная сила, очевидно, отсутствует.

Вернемся снова к движению жидкости в следе. Оценка различных членов в уравнении Навье–Стокса показывает, что членом $\nu\Delta\mathbf{v}$ можно, вообще говоря, пренебречь на расстояниях r от тела, удовлетворяющих условию $rU/\nu \gg 1$ (ср. вывод обратного условия (20.16)); это и есть те расстояния, на которых движение жидкости (вне следа) можно считать потенциальным. Однако такое пренебрежение недопустимо даже на этих расстояниях в области внутри следа, поскольку здесь поперечные производные $\partial^2\mathbf{v}/\partial y^2$, $\partial^2\mathbf{v}/\partial z^2$ велики по сравнению с продольной производной $\partial^2\mathbf{v}/\partial x^2$.

Пусть Y — порядок величины ширины следа, т. е. тех расстояний от оси x, на которых скорость $\mathbf{v}$ заметно падает. Тогда порядки величины членов в уравнении Навье–Стокса:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim U\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{Uv}{x}, \quad \nu\Delta\mathbf{v} \sim \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\nu v}{Y^2}.$$

Сравнив эти величины, найдем

$$Y = (\nu x/U)^{1/2}. \tag{21.3}$$

Эта величина действительно мала по сравнению с x ввиду предположенного условия $Ux/\nu \gg 1$. Таким образом, ширина ламинарного следа растет пропорционально корню из расстояния до тела.

Чтобы определить закон убывания скорости в следе, обратимся к формуле (21.1). Область интегрирования в ней $\sim Y^2$.

Поэтому оценка интеграла дает $F_x \sim \rho U v Y^2$ и, использовав соотношение (21.3), получим искомый закон:

$$v \sim F_x/(\rho\nu x). \tag{21.4}$$

Выяснив качественные особенности ламинарного движения вдали от обтекаемого тела, обратимся к выводу количественных формул, описывающих картину движения в следе и вне его.

Движение внутри следа. В уравнении Навье–Стокса стационарного движения

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{21.5}$$

вдали от тела используем приближение Осеена — заменяем член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ на $(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v}$ (ср. (20.17)). Кроме того, в области внутри следа можно пренебречь в $\Delta\mathbf{v}$ производной по продольной координате x по сравнению с поперечными производными. Таким образом, исходим из уравнения

$$U\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}\right). \tag{21.6}$$

Ищем его решение в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_1$ — решение уравнения

$$U\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial z^2}\right). \tag{21.7}$$

Величину же $\mathbf{v}_2$, связанную с членом $-\nabla(p/\rho)$ в исходном уравнении (21.6), можно искать в виде градиента $\nabla\Phi$ от некоторого скаляра [1]. Поскольку вдали от тела производные по x малы по сравнению с производными по y и z, в рассматриваемом приближении надо пренебречь членом $\partial\Phi/\partial x$, т. е. считать $v_x = v_{1x}$. Таким образом, для v_x имеем уравнение

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right). \tag{21.8}$$

Это уравнение формально совпадает с двумерным уравнением теплопроводности, причем роль времени играет x/U, а роль коэффициента температуропроводности — вязкость ν. Решение, убывающее с возрастанием y и z (при заданном x), а в пределе при $x \to 0$ приводящее к бесконечно малой ширине следа (в рассматриваемом приближении расстояния порядка размеров тела считаются малыми), есть

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu x}\exp\left[-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right] \tag{21.9}$$

[1]) Далее в этом параграфе потенциал скорости обозначаем как Φ, в отличие от азимутального угла φ сферической системы координат.

(ср. § 51). Коэффициент в этой формуле выражен через силу сопротивления с помощью формулы (21.1), в которой, ввиду быстрой сходимости интеграла, можно распространить его по всей плоскости yz. Если ввести вместо декартовых координат сферические r, θ, φ с полярной осью по оси x, то области следа ($\sqrt{y^2+z^2} \ll x$) будут соответствовать значения полярного угла $\theta \ll 1$. Формула (21.9) в этих координатах примет вид

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu r}\exp\left(-\frac{Ur\theta^2}{4\nu}\right). \tag{21.10}$$

Опущенный нами член с $\partial\Phi/\partial x$ (с Φ из получаемой ниже формулы (21.12)) дал бы в v_x член, содержащий дополнительную малость $\sim\theta$.

Такой же вид, как (21.9) (но с другими коэффициентами), должны иметь и v_{1y}, v_{1z}. Выберем направление подъемной силы в качестве оси y (так что $F_z = 0$). Согласно (21.2), и замечая, что на бесконечности $\Phi = 0$, имеем

$$\int v_y\,dy\,dz = \int\left(v_{1y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dy\,dz = \int v_{1y}\,dy\,dz = -\frac{F_y}{\rho U},$$

$$\int v_{1z}\,dy\,dz = 0.$$

Ясно поэтому, что v_{1y} отличается от (21.9) заменой F_x на F_y, а $v_{1z} = 0$. Таким образом, находим

$$v_y = -\frac{F_y}{4\pi\rho\nu x}\exp\left[-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \tag{21.11}$$

Для определения функции Φ поступаем следующим образом. Пишем уравнение непрерывности, пренебрегая в нем продольной производной $\partial v_x/\partial x$:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \approx \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} = 0.$$

Продифференцировав это равенство по x и воспользовавшись уравнением (21.7) для v_{1y}, получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial x}\right) = -\frac{\nu}{U}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\nu}{U}\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Наконец, подставив выражение для v_{1y} (первый член в (21.11)) и проинтегрировав по x, находим окончательно:

$$\Phi = -\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{y}{y^2+z^2}\left\{\exp\left[-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right] - 1\right\} \tag{21.12}$$

(постоянная интегрирования выбрана так, чтобы Φ оставалось конечным при $y = z = 0$). В сферических координатах (с азимутом φ, отсчитываемым от плоскости xy):

$$\Phi = -\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{\cos\varphi}{r\theta}\left\{\exp\left[-\frac{Ur\theta^2}{4\nu}\right] - 1\right\}. \tag{21.13}$$

Из (21.11)–(21.13) видно, что v_y и v_z содержат в отличие от v_x наряду с членами, экспоненциально убывающими с увеличением θ (при заданном r), также и члены, значительно менее быстро убывающие при удалении от оси следа (как $1/\theta^2$).

Если подъемная сила отсутствует, то движение в следе осесимметрично и $\Phi \equiv 0$ [1]).

Движение вне следа. Вне следа течение жидкости можно считать потенциальным. Интересуясь лишь наименее быстро убывающими на больших расстояниях членами в потенциале Φ, ищем решение уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

в виде суммы двух членов:

$$\Phi = \frac{a}{r} + \frac{\cos\varphi}{r}f(\theta). \tag{21.14}$$

Первый член здесь сферически симметричен и связан с силой F_x, а второй — симметричен относительно плоскости xy и связан с силой F_y.

Для функции $f(\theta)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{df}{d\theta}\right) - \frac{f}{\sin\theta} = 0.$$

Решение этого уравнения, конечное при $\theta \to \pi$, есть

$$f = b\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{21.15}$$

Коэффициент b можно определить из условия сшивки с решением внутри следа. Дело в том, что формула (21.13) относится к области углов $\theta \ll 1$, а решение (21.14) — к области $\theta \gg (\nu/(Ur))^{1/2}$. Эти области перекрываются при $(\nu/Ur)^{1/2} \ll \theta \ll 1$, причем (21.13) сводится здесь к

$$\Phi = \frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{\cos\varphi}{r\theta},$$

[1]) Таков, в частности, след за обтекаемым шаром. Отметим в этой связи, что полученные формулы (как и формула (21.16) ниже) находятся в согласии с распределением скоростей (20.24) при обтекании с очень малыми числами Рейнольдса; в этом случае вся описанная картина отодвигается на очень большие расстояния $r \gg l/\mathrm{R}$ (l — размеры тела).

а второй член в (21.14) — к $2b\cos\varphi/(r\theta)$. Сравнив оба выражения, найдем, что надо положить $b = F_y/(4\pi\rho U)$.

Для определения коэффициента a в (21.14) замечаем, что полный поток жидкости через сферу S большого радиуса r (как и через всякую замкнутую поверхность) должен быть равен нулю. Но через часть S_0 этой сферы, являющуюся площадью сечения следа, втекает количество жидкости

$$-\int\limits_{S_0} v_x\,dy\,dz = \frac{F_x}{\rho U}.$$

Поэтому через всю остальную площадь сферы должно вытекать столько же жидкости, т. е. должно быть

$$\int\limits_{S-S_0} \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \frac{F_x}{\rho U}.$$

В силу малости S_0 по сравнению со всей площадью S, можно заменить это условие требованием

$$\int\limits_S \mathbf{v}\,d\mathbf{f} = \int\limits_S \nabla\Phi\,d\mathbf{f} = -4\pi a = \frac{F_x}{\rho U}, \tag{21.16}$$

откуда $a = -F_x/(4\pi\rho U)$.

Таким образом, собирая все полученные выражения, находим следующую формулу для потенциала скорости:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho U r}\left(-F_x + F_y\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}\right). \tag{21.17}$$

Этим и определяется движение во всей области вне следа вдали от тела. Потенциал убывает с расстоянием как $1/r$. Соответственно скорость убывает как $1/r^2$. Если подъемная сила отсутствует, то движение вне следа осесимметрично.

§ 22. Вязкость суспензий

Жидкость, в которой взвешено большое количество мелких твердых частиц (суспензия), можно рассматривать как однородную среду, если мы интересуемся явлениями, характеризующимися расстояниями, большими по сравнению с размерами частиц. Такая среда будет обладать эффективной вязкостью η, отличной от вязкости η_0 основной жидкости. Эта вязкость может быть вычислена для случая малых концентраций взвешенных частиц (т. е. суммарный объем всех частиц предполагается малым по сравнению с объемом всей жидкости). Вычисления сравнительно просты для случая шарообразных частиц (*А. Эйнштейн*, 1906).

В качестве вспомогательной задачи необходимо предварительно рассмотреть влияние, которое оказывает один погружен-

ный в жидкость твердый шарик на течение, обладающее постоянным градиентом скорости. Пусть невозмущенное шариком течение описывается линейным распределением скоростей

$$v_i^{(0)} = \alpha_{ik} x_k, \tag{22.1}$$

где α_{ik} — постоянный симметрический тензор. Давление в жидкости при этом постоянно: $p^{(0)} = \mathrm{const}$; условимся в дальнейшем отсчитывать давление от этого постоянного значения. В силу несжимаемости жидкости ($\operatorname{div}\mathbf{v}^{(0)} = 0$) тензор α_{ik} должен иметь равный нулю след:

$$\alpha_{ii} = 0. \tag{22.2}$$

Пусть теперь в начало координат помещен шарик радиуса R. Скорость измененного им течения обозначим через $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)}$; на бесконечности $\mathbf{v}^{(1)}$ должно обращаться в нуль, но вблизи шарика $\mathbf{v}^{(1)}$ отнюдь не мало по сравнению с $\mathbf{v}^{(0)}$ Из симметрии течения ясно, что шарик останется неподвижным, так что граничное условие гласит: $\mathbf{v} = 0$ при $r = R$.

Искомое решение уравнений движения (20.1)–(21.3) может быть получено непосредственно из найденного в § 20 решения (20.4) (с функцией f из (20.6)), если заметить, что производные от последнего по координатам тоже являются решениями. В данном случае мы ищем решение, зависящее как от параметров от компонент тензора α_{ik} (а не от вектора $\mathbf{u}$, как в § 20). Таковым является

$$\mathbf{v}^{(1)} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\alpha\nabla f) \qquad p = \eta_0 \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \Delta f}{\partial x_i\, \partial x_k},$$

где $(\alpha\nabla f)$ обозначает вектор с компонентами $\alpha_{ik}\partial f/\partial x_k$. Раскрывая эти выражения и выбирая постоянные a и b в функции $f = ar + b/r$ так, чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности шарика, получим в результате следующие формулы для скорости и давления:

$$v_i^{(1)} = \frac{5}{2}\left(\frac{R^5}{r^4} - \frac{R^3}{r^2}\right)\alpha_{kl} n_i n_k n_l - \frac{R^5}{r^4}\alpha_{ik} n_k, \tag{22.3}$$

$$p = -5\eta_0 \frac{R^5}{r^3}\alpha_{ik} n_i n_k \tag{22.4}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора).

Переходя теперь к самому вопросу об определении эффективной вязкости суспензии, вычислим среднее (по всему объему) значение тензора плотности потока импульса Π_{ik}, совпадающего в линейном по скорости приближении с тензором напряжений $-\sigma_{ik}$:

$$\overline{\sigma}_{ik} = \frac{1}{V}\int \sigma_{ik}\, dV.$$

Интегрирование можно производить здесь по объему V сферы большого радиуса, который затем устремляем к бесконечности.

Прежде всего пишем тождественно:

$$\overline{\sigma}_{ik} = \eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right) - \overline{p}\delta_{ik} + \\ + \frac{1}{V}\int\left\{\sigma_{ik} - \eta_0\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + p\delta_{ik}\right\} dV. \quad (22.5)$$

В стоящем здесь интеграле подынтегральное выражение отлично от нуля лишь внутри твердых шариков; ввиду предполагаемой малости концентрации суспензии его можно вычислять для одного отдельного шарика, как если бы других вообще не было, после чего результат должен быть умножен на концентрацию n суспензии (число шариков в единице объема). Непосредственное вычисление такого интеграла требовало бы исследования внутренних напряжений в шариках. Можно, однако, обойти это затруднение путем преобразования интеграла по объему в интеграл по поверхности бесконечно удаленной сферы, проходящей только через жидкость. Для этого замечаем, что ввиду уравнений движения $\partial\sigma_{il}/\partial x_l = 0$ имеет место тождество

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l}(\sigma_{il}x_k);$$

поэтому преобразование объемного интеграла в поверхностный дает

$$\overline{\sigma}_{ik} = \eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right) + n\oint[\sigma_{il}x_k\, df_l - \eta_0(v_i\, df_k + v_k\, df_i)].$$

Член с $\overline{p}$ мы опустили, имея в виду, что среднее давление непременно обращается в нуль (действительно, это есть скаляр, который должен определяться линейной комбинацией компонент тензора α_{ik}; но единственный такой скаляр $\alpha_{ii} = 0$).

При вычислении интеграла по сфере очень большого радиуса в выражении (22.3) для скорости следует, конечно, сохранить лишь члены $\sim 1/r^2$. Простое вычисление дает для этого интеграла

$$n\eta_0 \cdot 20\pi R^3\{5\alpha_{lm}\overline{n_i n_k n_l n_m} - \alpha_{il}\overline{n_k n_l}\},$$

где черта обозначает усреднение по направлениям единичного вектора **n**. Производя усреднение [1]), получим окончательно:

$$\overline{\sigma}_{ik} = \eta_0\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}}\right) + 5\eta_0\alpha_{ik}\frac{4\pi R^3}{3}n. \quad (22.6)$$

[1]) Искомые средние значения произведений компонент единичного вектора представляют собой симметричные тензоры, которые могут быть составлены только из единичных тензоров δ_{ik}. Имея это в виду, легко найти, что

$$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}, \quad \overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}).$$

Первое слагаемое в (22.6) после подстановки в него $\mathbf{v}^{(0)}$ из (22.1) дает $2\eta_0\alpha_{ik}$; член же первого порядка малости в этом слагаемом тождественно обращается в нуль после усреднения по направлениям $\mathbf{n}$ (как и должно было быть, поскольку весь эффект заключен в выделенном в (22.5) интеграле). Поэтому искомая относительная поправка в эффективной вязкости суспензии η определяется отношением второго члена в (22.6) к первому. Таким образом, получим

$$\eta = \eta_0\left(1 + \frac{5}{2}\varphi\right), \quad \varphi = \frac{4\pi R^3}{3}n, \tag{22.7}$$

где φ — малое отношение суммарного объема всех шариков к полному объему суспензии.

Уже для суспензии с частицами в виде эллипсоидов вращения аналогичные вычисления и окончательные формулы становятся очень громоздкими [1]. Приведем для иллюстрации числовые значения поправочного коэффициента A в формуле

$$\eta = \eta_0(1 + A\varphi), \quad \varphi = \frac{4\pi ab^2}{3}n$$

для нескольких значений отношения a/b (a и $b = c$ — полуоси эллипсоидов):

$a/b =$	0,1	0,2	0,5	1,0	2	5	10,
$A =$	8,04	4,71	2,85	2,5	2,91	5,81	13,6.

Поправка возрастает по обе стороны от значения $a/b = 1$, отвечающего сферическим частицам.

§ 23. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости

Если нелинейные члены в уравнениях движения вязкой жидкости не исчезают тождественно, решение этих уравнений представляет большие трудности, и точные решения могут быть получены лишь в очень небольшом числе случаев. Такие решения представляют существенный интерес — если не всегда физический (ввиду фактического возникновения турбулентности при достаточно больших значениях числа Рейнольдса), то, во всяком случае, методический.

[1]) В потоке суспензии с нешарообразными частицами наличие градиентов скорости оказывает ориентирующее действие на частицы. Под влиянием одновременного воздействия ориентирующих гидродинамических сил и дезориентирующего вращательного броуновского движения устанавливается анизотропное распределение частиц по их ориентации в пространстве. Этот эффект, однако, не должен учитываться при вычислении поправки к вязкости η: анизотропия ориентационного распределения сама зависит от градиентов скорости (в первом приближении — линейно) и ее учет привел бы к появлению в тензоре напряжений, нелинейных по градиентам членов.

Ниже приводятся примеры точных решений уравнений движения вязкой жидкости.

Увлечение жидкости вращающимся диском. Бесконечный плоский диск, погруженный в вязкую жидкость, равномерно вращается вокруг своей оси. Требуется определить движение жидкости, приводимой в движение диском(*T. Kármán*, 1921). Выбираем плоскость диска в качестве плоскости $z = 0$ цилиндрических координат. Диск вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω. Рассматриваем неограниченную жидкость с той стороны диска, где $z > 0$. Предельные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &v_r = 0, \quad v_\varphi = \Omega r, \quad v_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ &v_r = 0, \quad v_\varphi = 0 \qquad\qquad\quad \text{при} \quad z = \infty. \end{aligned}$$

Аксиальная скорость v_z не исчезает при $z \to \infty$, а стремится к постоянному отрицательному пределу, определяющемуся из самих уравнений движения. Дело в том, что, поскольку жидкость движется радиально по направлению от оси вращения, в особенности вблизи диска, для обеспечения непрерывности в жидкости должен существовать постоянный вертикальный поток по направлению из бесконечности к диску. Решение уравнений движения ищем в виде

$$\begin{gathered} v_r = r\Omega F(z_1), \quad v_\varphi = r\Omega G(z_1), \quad v_z = \sqrt{\nu\Omega}\, H(z_1), \\ p = -\rho\nu\Omega P(z_1), \quad \text{где} \quad z_1 = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}z. \end{gathered} \tag{23.1}$$

В этом распределении радиальная и круговая скорости пропорциональны расстоянию от оси вращения диска, а вертикальная скорость v_z постоянна вдоль каждой горизонтальной плоскости.

Подстановка в уравнения Навье–Стокса и уравнение непрерывности приводит к следующим уравнениям для функций F, G, H, P:

$$\begin{gathered} F^2 - G^2 + F'H = F'', \qquad 2FG + G'H = G'', \\ HH' = P' + H'', \qquad 2F + H' = 0 \end{gathered} \tag{23.2}$$

(штрих означает дифференцирование по z_1) с предельными условиями:

$$\begin{aligned} &F = 0, \quad G = 1, \quad H = 0 \quad \text{при} \quad z_1 = 0, \\ &F = 0, \quad G = 0 \qquad\qquad \text{при} \quad z_1 = \infty. \end{aligned} \tag{23.3}$$

Мы свели, таким образом, решение задачи к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной переменной, которое может быть произведено численным обра-

зом. На рис. 7 изображены полученные таким способом графики функций F, G, $-H$. Предельное значение функции H при $z_1 \to \infty$ равно $-0{,}886$; другими словами, скорость потока жидкости, текущего из бесконечности к диску, равна

$$v_z(\infty) = -0{,}886\sqrt{\nu\Omega}\,.$$

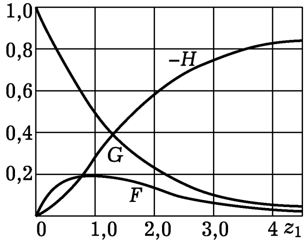


Рис. 7

Сила трения, действующая на единицу поверхности диска по направлению, перпендикулярному к его радиусу, есть $\sigma_{z\varphi} = \eta \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}$. Пренебрегая эффектами от краев диска, можно написать для диска большого, но конечного радиуса R момент действующих на него сил трения в виде

$$M = 2\int\limits_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\varphi}\, dr = \pi R^4 \rho\sqrt{\nu\Omega^3}\, G'(0)$$

множитель 2 перед интегралом учитывает наличие у диска двух сторон, омываемых жидкостью). Численное вычисление функции G приводит к формуле

$$M = -1{,}94 \cdot R^4 \rho \sqrt{\nu\Omega^3}\,. \tag{23.4}$$

Течения в диффузоре и конфузоре. Требуется определить стационарное движение жидкости между двумя плоскими стенками, наклоненными друг к другу под углом (на рис. 8 изображен поперечный разрез обеих плоскостей); истечение происходит вдоль линии пересечения плоскостей (*G. Hamel*, 1917).

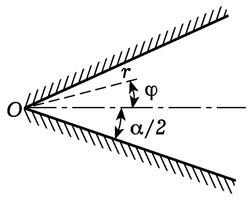


Рис. 8

Выбираем цилиндрические координаты r, z, φ с осью z вдоль линии пересечения плоскостей (точка O на рис. 8) и углом φ, отсчитываемым указанным на рис. 8 образом. Движение однородно вдоль оси z, и естественно предположить, что оно будет чисто радиальным, т. е. $v_\varphi = v_z = 0$, $v_r = v(r, \varphi)$. Уравнения (15.18) дают

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \tag{23.5}$$

$$-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \tag{23.6}$$

$$\frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0.$$

Из последнего уравнения видно, что rv есть функция только от φ. Введя функцию

$$u(\varphi) = \frac{1}{6\nu} rv, \tag{23.7}$$

получаем из (23.6)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{12\nu^2}{r^2}\frac{du}{d\varphi},$$

откуда

$$\frac{p}{\rho} = \frac{12\nu^2}{r^2} u(\varphi) + f(r).$$

Подставляя это выражение в (23.5), получаем уравнение

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 4u + 6u^2 = \frac{1}{6\nu^2} r^3 f'(r),$$

откуда видно, что как левая, так и правая части, зависящие соответственно только от φ и только от r, являются, каждая в отдельности, постоянной величиной, которую мы обозначим как $2C_1$. Таким образом,

$$f'(r) = 12\nu^2 C_1 \frac{1}{r^3},$$

откуда

$$f(r) = -\frac{6\nu^2 C_1}{r^2} + \text{const},$$

и окончательно имеем для давления

$$\frac{p}{\rho} = \frac{6\nu^2}{r^2}(2u - C_1) + \text{const}. \tag{23.8}$$

Для $u(\varphi)$ имеем уравнение

$$u'' + 4u + 6u^2 = 2C_1,$$

которое после умножения на u' и первого интегрирования дает

$$\frac{u'^2}{2} + 2u^2 + 2u^3 - 2C_1 u - 2C_2 = 0$$

Отсюда получаем

$$2\varphi = \pm \int \frac{du}{\sqrt{-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2}} + C_3, \tag{23.9}$$

чем и определяется искомая зависимость скорости от φ; функция $u(\varphi)$ может быть выражена отсюда посредством эллиптических функций. Три постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий на стенках:

$$u\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \tag{23.10}$$

и из условия, что через любое сечение $r = \text{const}$ проходит (в 1 с) одинаковое количество жидкости Q:

$$Q = \rho \int\limits_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} vr\,d\varphi = 6\nu\rho \int\limits_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} u\,d\varphi. \tag{23.11}$$

Количество жидкости Q может быть как положительным, так и отрицательным. Если $Q > 0$, то линия пересечения плоскостей является источником, т. е. жидкость вытекает из вершины угла (о таком течении говорят как о течении в *диффузоре*). Если $Q < 0$, то эта линия является стоком, и мы имеем дело со сходящимся к вершине угла течением (или, как говорят, с течением в *конфузоре*). Отношение $|Q|/(\rho\nu)$ является безразмерным и играет роль числа Рейнольдса для рассматриваемого движения.

Рассмотрим сначала конфузорное движение ($Q < 0$). Для исследования решения (23.9)–(23.11) сделаем оправдывающееся в дальнейшем предположение, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ (т. е. $u(\varphi) = u(-\varphi)$), причем функция $u(\varphi)$ везде отрицательна (скорость направлена везде к вершине угла) и монотонно меняется от значения 0 при $\varphi = \pm\alpha/2$ до значения $-u_0$ ($u_0 > 0$) при $\varphi = 0$, так что u_0 есть максимум $|u|$. Тогда при $u = -u_0$ должно быть $du/d\varphi = 0$, откуда заключаем, что $u = -u_0$ есть корень кубического многочлена, стоящего под корнем в подынтегральном выражении в (23.9), так что можно написать:

$$-u^3 - u^2 + C_1 u + C_2 = (u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q],$$

где q — новая постоянная. Таким образом, имеем

$$2\varphi = \pm \int\limits_{-u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q]}}, \tag{23.12}$$

причем постоянные u_0 и q определяются из условий

$$\alpha = \int\limits_{-u_0}^{0} \frac{du}{\sqrt{(u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q]}},$$
$$\frac{\mathrm{R}}{6} = \int\limits_{-u_0}^{0} \frac{u\,du}{\sqrt{(u + u_0)[-u^2 - (1 - u_0)u + q]}} \tag{23.13}$$

(где $\mathrm{R} = |Q|/\nu\rho$); постоянная q должна быть положительна, в противном случае эти интегралы сделались бы комплексными. Эти два уравнения имеют, как можно показать, решения для u_0 и q при любых R и $\alpha < \pi$. Другими словами, сходящееся (конфузорное) симметрическое течение (рис. 9) возможно при любом

угле раствора $\alpha < \pi$ и любом числе Рейнольдса. Рассмотрим подробнее движение при очень больших R. Большим R соответствуют также и большие значения u_0. Написав (23.12) (для $\varphi > 0$) в виде

$$2\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right) = \int\limits_u^0 \frac{du}{\sqrt{(u+u_0)[-u^2-(1-u_0)u+q]}},$$

мы видим, что во всей области интегрирования подынтегральное выражение теперь мало, если только $|u|$ не близко к u_0. Это значит, что $|u|$ может быть заметно отличным от u_0 только при φ, близких $\pm\alpha/2$, т. е. в непосредственной близости от стенок [1]). Другими словами, почти во всем интервале углов φ получается $u \approx \text{const} = -u_0$, причем, как показывают равенства (23.13), должно быть $u_0 = \mathrm{R}/(6\alpha)$. Сама скорость v равна $v = |Q|/\rho\alpha r$, что соответствует потенциальному невязкому течению со скоростью, не зависящей от угла и падающей по величине обратно пропорционально r. Таким образом, при больших числах Рейнольдса течение в конфузоре очень мало отличается от потенциального течения идеальной жидкости. Влияние вязкости проявляется только в очень узком слое вблизи стенок, где происходит быстрое падение скорости от значения, соответствующего потенциальному потоку, до нуля (рис. 10).

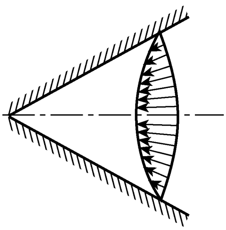


Рис. 9

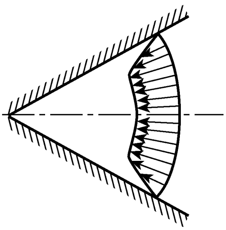


Рис. 10

Пусть теперь $Q > 0$, т. е. мы имеем дело с диффузорным течением. Сделаем сначала опять предположение, что движение симметрично относительно плоскости $\varphi = 0$ и что $u(\varphi)$ (теперь $u > 0$) монотонно меняется от нуля при $\varphi = \pm\alpha/2$ до $u = u_0 > 0$ при $\varphi = 0$. Вместо (23.13) пишем теперь:

$$\alpha = \int\limits_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(u_0-u)[u^2+(1+u_0)u+q]}},$$
$$\frac{\mathrm{R}}{6} = \int\limits_0^{u_0} \frac{u\,du}{\sqrt{(u_0-u)[u^2+(1+u_0)u+q]}}. \tag{23.14}$$

[1]) Может возникнуть вопрос о том, каким образом этот интеграл может сделаться не малым даже при $u \approx -u_0$. В действительности при очень больших u_0 один из корней трехчлена $-u^2-(1-u_0)u+q$ оказывается тоже близким к $-u_0$, так что все подкоренное выражение имеет два почти совпадающих корня и потому весь интеграл «почти расходится» при $u = -u_0$.

Если рассматривать u_0 как заданное, то α монотонно возрастает с уменьшением q и имеет наибольшее возможное значение при $q = 0$:

$$\alpha_{\max} = \int\limits_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u(u_0 - u)(u + u_0 + 1)}}.$$

С другой стороны, как легко убедиться, при заданном q α есть монотонно убывающая функция от u_0. Отсюда следует, что u_0 как функция от q при заданном α есть монотонно убывающая функция, так что ее наибольшее значение соответствует $q = 0$ и определяется написанным равенством. Наибольшему u_0 соответствует также и наибольшее $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\max}$. С помощью подстановки

$$k^2 = \frac{u_0}{1 + 2u_0}, \quad u = u_0 \cos^2 x$$

можно представить зависимость $\mathrm{R}_{\max}$ от α в параметрическом виде

$$\alpha = 2\sqrt{1 - 2k^2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}},$$
$$\mathrm{R}_{\max} = -6\alpha \frac{1 - k^2}{1 - 2k^2} + \frac{12}{\sqrt{1 - 2k^2}} \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx. \qquad (23.15)$$

Таким образом, симметричное, везде расходящееся течение в диффузоре (рис. 11 *а*) возможно для данного угла раствора

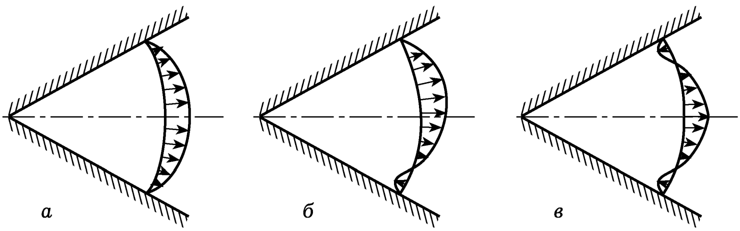


Рис. 11

только при числах Рейнольдса, не превышающих определенного предела. При $\alpha \to \pi$ (чему соответствует $k \to 0$) $\mathrm{R}_{\max}$ стремится к нулю. При $\alpha \to 0$ (чему соответствует $k \to 1/\sqrt{2}$)$\mathrm{R}_{\max}$ стремится к бесконечности по закону $\mathrm{R}_{\max} = 18{,}8/\alpha$.

При $R > \mathrm{R}_{\max}$ предположение о симметричном, везде расходящемся течении в диффузоре незаконно, так как усло-

вия (23.14) не могут быть выполнены. В интервале углов $-\alpha/2 \leqslant \varphi \leqslant \alpha/2$ функция $u(\varphi)$ должна иметь несколько максимумов или минимумов. Соответствующие этим экстремумам значения $u(\varphi)$ должны по-прежнему быть корнями стоящего под корнем многочлена. Поэтому ясно, что трехчлен $u^2+(1+u_0)u+q$ (с $u_0 > 0$, $q > 0$) должен иметь в этой области два вещественных отрицательных корня, так что стоящее под корнем выражение может быть написано в виде

$$(u_0 - u)(u + u_0')(u + u_0''),$$

где $u_0 > 0$, $u_0' > 0$, $u_0'' > 0$; пусть $u_0' < u_0''$. Функция $u(\varphi)$ может, очевидно, изменяться в интервале $u \geqslant u \geqslant -u_0'$, причем $u = u_0$ соответствует положительному максимуму $u(\varphi)$, а $u = -u_0'$ — отрицательному минимуму. Не останавливаясь подробнее на исследовании получающихся таким образом решений, укажем, что при $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\max}$ возникает сначала решение, при котором скорость имеет один максимум и один минимум, причем движение асимметрично относительно плоскости ($\varphi = 0$; рис. 11 *б*). При дальнейшем увеличении R возникает симметричное решение с одним максимумом и двумя минимумами скорости (рис. 11 *в*) и т. д. Во всех этих решениях имеются, следовательно, наряду с областями вытекающей жидкости также и области втекающих потоков (но, конечно, так, что полный расход жидкости $Q > 0$). При $\mathrm{R} \to \infty$ число чередующихся минимумов и максимумов неограниченно возрастает, так что никакого определенного предельного решения не существует. Подчеркнем, что при диффузорном течении решение не стремится, таким образом, при $\mathrm{R} \to \infty$ к решению уравнений Эйлера, как это имеет место при конфузорном движении. Наконец, отметим, что при увеличении R стационарное диффузорное движение описанного типа вскоре после достижения $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\max}$ делается неустойчивым и возникает турбулентность.

Затопленная струя. Требуется определить движение в струе жидкости, бьющей из конца тонкой трубки и попадающей в неограниченное пространство, заполненное той же жидкостью, — так называемая затопленная струя (*Л. Ландау*, 1943).

Выбираем сферические координаты r, θ, φ с полярной осью вдоль направления скорости струи в точке ее выхода, которая выбирается в качестве начала координат. Движение обладает аксиальной симметрией вокруг полярной оси, так что $v_\varphi = 0$, а v_θ, v_r являются функциями только от r, θ. Через всякую замкнутую поверхность вокруг начала координат (в частности, через бесконечно удаленную) должен протекать одинаковый полный поток импульса («импульс струи»). Для этого скорость должна падать обратно пропорционально расстоянию r от начала

координат, так что

$$v_r = \frac{1}{r}F(\theta), \quad v_\theta = \frac{1}{r}f(\theta), \tag{23.16}$$

где F, f — некоторые функции только от θ. Уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot v_\theta) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$F(\theta) = -\frac{df}{d\theta} - f\operatorname{ctg}\theta. \tag{23.17}$$

Компоненты $\Pi_{r\varphi}$, $\Pi_{\theta\varphi}$ тензора потока импульса в струе тождественно исчезают, как это явствует уже из соображений симметрии. Сделаем предположение, что равны нулю также и компоненты $\Pi_{\theta\theta}$ и $\Pi_{\varphi\varphi}$ (оно оправдывается тем, что в результате мы получаем решение, удовлетворяющее всем необходимым условиям). С помощью выражений (15.20) для компонент тензора σ_{ik} и формул (23.16), (23.17) легко убедиться в том, что между компонентами $\Pi_{\theta\theta}$, $\Pi_{\varphi\varphi}$ и $\Pi_{r\theta}$ тензора потока импульса в струе имеется соотношение

$$\sin^2\theta\cdot\Pi_{r\theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin^2\theta\cdot(\Pi_{\varphi\varphi} - \Pi_{\theta\theta})].$$

Поэтому из равенства нулю $\Pi_{\varphi\varphi}$ и $\Pi_{\theta\theta}$ следует, что и $\Pi_{r\theta} = 0$. Таким образом, из всех компонент Π_{ik} отлична от нуля только Π_{rr}, зависящая от r как r^{-2}. Легко видеть, что при этом уравнения движения $\partial\Pi_{ik}/\partial x_k = 0$ удовлетворяются автоматически.

Далее, запишем

$$\frac{1}{\rho}(\Pi_{\theta\theta} - \Pi_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{r^2}(f^2 + 2\nu f\operatorname{ctg}\theta - 2\nu f') = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{f} + \frac{1}{2\nu} = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$f = -\frac{2\nu\sin\theta}{A - \cos\theta}, \tag{23.18}$$

а из (23.17) получаем теперь для F:

$$F = 2\nu\left[\frac{A^2 - 1}{(A - \cos\theta)^2} - 1\right]. \tag{23.19}$$

Распределение давления определяем из уравнения

$$\frac{1}{r}\Pi_{\theta\theta} = \frac{p}{\rho} + \frac{f}{r^2}(f + 2\nu\operatorname{ctg}\theta) = 0$$

и получаем

$$p - p_0 = -\frac{4\rho\nu^2}{r^2}\frac{A\cos\theta - 1}{(A-\cos\theta)^2} \tag{23.20}$$

(p_0 — давление на бесконечности).

Постоянную A можно связать с «импульсом струи», — полным потоком импульса в ней. Он равен интегралу по сферической поверхности:

$$P = \oint \Pi_{rr}\cos\theta\, df = 2\pi\int_0^\pi r^2\Pi_{rr}\cos\theta\sin\theta\, d\theta.$$

Величина Π_{rr} равна

$$\frac{1}{\rho}\Pi_{rr} = \frac{4\nu^2}{r^2}\left[\frac{(A^2-1)^2}{(A-\cos\theta)^4} - \frac{A}{A-\cos\theta}\right],$$

и вычисление интеграла приводит к результату

$$P = 16\pi\nu^2\rho A\left[1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2}\ln\frac{A+1}{A-1}\right]. \tag{23.21}$$

Формулы (23.16)–(23.21) решают поставленную задачу. При изменении постоянной A от 1 до ∞ импульс струи P пробегает все значения от ∞ до 0.

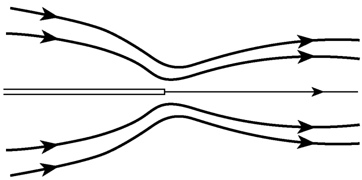


Рис. 12

Линии тока определяются уравнением

$$dr/v_r = r\,d\theta/v_\theta,$$

интегрирование которого дает

$$\frac{r\sin^2\theta}{A-\cos\theta} = \text{const}. \tag{23.22}$$

На рис. 12 изображен характерный вид линий тока. Течение представляет собой струю, вырывающуюся из начала координат и подсасывающую окружающую жидкость. Если условно считать границей струи поверхность с минимальным расстоянием ($r\sin\theta$) линии тока от оси, то это будет поверхность конуса с углом раствора $2\theta_0$, где $\cos\theta_0 = 1/A$.

В предельном случае слабой струи (малые P, чему отвечают большие A) имеем из (23.21)

$$P = 16\pi\nu^2\rho/A.$$

Для скорости получаем в этом случае

$$v_\theta = -\frac{P}{8\pi\nu\rho}\frac{\sin\theta}{r}, \quad v_r = \frac{P}{4\pi\nu\rho}\frac{\cos\theta}{r}. \tag{23.23}$$

В обратном случае сильной струи (большие P, чему отвечает $A \to 1$) [1]) имеем

$$A = 1 + \frac{\theta_0^2}{2}, \quad \theta_0^2 = \frac{64\pi\nu^2\rho}{3P}.$$

Для больших углов ($\theta \approx 1$) распределение скоростей определяется формулами

$$v_\theta = -\frac{2\nu}{r}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, \quad v_r = -\frac{2\nu}{r}, \tag{23.24}$$

а для малых углов ($\theta \approx \theta_0$):

$$v_\theta = -\frac{4\nu\theta}{(\theta_0^2 + \theta^2)r}, \quad v_r = 8\nu\frac{\theta_0^2}{(\theta_0^2 + \theta^2)^2 r}. \tag{23.25}$$

Полученное здесь решение является точным для струи, рассматриваемой как бьющая из точечного источника. Если учитывать конечные размеры отверстия трубки, то это решение представляет собой первый член разложения по степеням отношения размеров отверстия к расстоянию r от него. С этим обстоятельством связан тот факт, что если вычислить по полученному решению полный поток жидкости, проходящей через замкнутую поверхность вокруг начала координат, то он окажется равным нулю. Отличный от нуля поток получился бы при учете следующих членов разложения по указанному отношению [2]).

§ 24. Колебательное движение в вязкой жидкости

Движение, возникающее в вязкой жидкости при колебаниях погруженных в нее твердых тел, обладает рядом характерных особенностей. Для изучения этих особенностей удобно начать с рассмотрения простого типичного примера (*G.G. Stokes*, 1851). Пусть несжимаемая жидкость соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей (в своей плоскости) простое гармоническое колебательное движение с частотой ω. Требуется определить возникающее при этом в жидкости движение.

---

[1]) В действительности, однако, движение в достаточно сильной струе становится турбулентным (§ 36). Отметим, что роль числа Рейнольдса для рассмотренной струи играет безразмерный параметр $(P/(\rho\nu^2))^{1/2}$.

[2]) См. *Румер Ю.Б.* // Прикл. мат. и мех. 1952. Т. 16. С. 255.

Затопленная ламинарная струя с отличным от нуля моментом вращения вокруг оси рассмотрена *Лойцянским Л.Г.* // Прикл. мат. и мех. 1953. Т. 17. С. 3.

Упомянем, что гидродинамические уравнения несжимаемой вязкой жидкости для любого стационарного осесимметричного движения, в котором скорость убывает с расстоянием как $1/r$, могут быть сведены к одному обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. См.: *Слезкин Н.А.* // Уч. зап. МГУ. 1934. Вып. II; Прикл. мат. и мех. 1954. Т. 18. С. 764.

Твердую поверхность выберем в качестве плоскости yz; области жидкости соответствуют $x > 0$. Ось y выберем вдоль направления колебаний поверхности. Скорость u колеблющейся поверхности есть функция времени вида $A\cos(\omega t + \alpha)$. Удобно писать такую функцию в виде вещественной части от комплексного выражения: $u = \operatorname{Re}\{u_0 e^{-i\omega t}\}$ (с комплексной, вообще говоря, постоянной $u_0 = Ae^{-i\alpha}$; надлежащим выбором начала отсчета времени эту постоянную всегда можно сделать вещественной).

До тех пор, пока при вычислениях производятся только линейные операции над скоростью u, можно опускать знак взятия вещественной части и вычислять так, как если бы u было комплексным, после чего можно взять вещественную часть от окончательного результата. Таким образом, будем писать:

$$u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}. \tag{24.1}$$

Скорость жидкости должна удовлетворять граничному условию $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, т. е.

$$v_x = v_z = 0, \quad v_y = u$$

при $x = 0$.

Из соображений симметрии очевидно, что все величины будут зависеть только от координаты x (и от времени t). Из уравнения непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ имеем поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

откуда $v_x = \text{const}$, причем согласно граничным условиям эта постоянная должна быть равной нулю, т. е. $v_x = 0$. Поскольку все величины не зависят от координат y, z, и благодаря равенству v_x нулю имеем тождественно $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0$. Уравнение движения (15.7) приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\mathbf{v}. \tag{24.2}$$

Это уравнение линейно. Его x-компонента дает $\partial p/\partial x = 0$, т. е. $p = \text{const}$.

Из симметрии очевидно также, что скорость $\mathbf{v}$ направлена везде по оси y. Для $v_y = v$ имеем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{24.3}$$

(типа одномерного уравнения теплопроводности). Будем искать периодическое по x и t решение вида

$$v = u_0 e^{i(kx-\omega t)},$$

удовлетворяющее условию $v = u$ при $x = 0$. Подстановка в уравнение дает

$$i\omega = \nu k^2, \quad k = \frac{1+i}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \tag{24.4}$$

так что скорость

$$v = u_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)} \tag{24.5}$$

(выбор знака корня $\sqrt{i}$ в (24.4) определяется требованием затухания скорости в глубь жидкости).

Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать поперечные волны: скорость $v_y = v$ перпендикулярна направлению распространения волны. Они, однако, быстро затухают по мере удаления от создающей их колеблющейся твердой поверхности. Затухание амплитуды происходит по экспоненциальному закону с *глубиной проникновения* δ [1]. Эта глубина падает с увеличением частоты волны и растет с увеличением вязкости жидкости.

Действующая на твердую поверхность сила трения направлена, очевидно, по оси y. Отнесенная к единице площади, она равна

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}}\,(i-1)u. \tag{24.6}$$

Предполагая u_0 вещественным и отделив в (24.6) вещественную часть, получим

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega\rho\eta}\, u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Скорость же колеблющейся поверхности есть $u = u_0 \cos\omega t$. Таким образом, между скоростью и силой трения имеется сдвиг фаз [2].

Легко вычислить также и среднее (по времени) значение диссипации энергии при рассматриваемом движении. Это можно сделать по общей формуле (16.3); в данном случае, однако, проще вычислить искомую диссипацию непосредственно как работу сил трения. Именно, диссипация энергии в единицу времени, отнесенная к единице площади колеблющейся плоскости, равна среднему значению произведения силы σ_{xy} на скорость $u_y = u$:

$$-\overline{\sigma_{xy} u} = \frac{u_0^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\rho\eta}{2}}. \tag{24.7}$$

---

[1]) На расстоянии δ амплитуда волны убывает в e раз, а на протяжении одного пространственного периода волны — в $e^{2\pi} \approx 540$ раз.

[2]) При колебаниях полуплоскости (параллельно линии своего края) возникает дополнительная сила трения, связанная с краевыми эффектами. Задача о движении вязкой жидкости при колебаниях полуплоскости (а также и более общая задача о колебаниях клина с произвольным углом раствора) может быть решена с помощью класса решений уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$, используемого в теории дифракции от клина. Мы отметим здесь лишь следующий результат: возникающее от краевого эффекта увеличение силы трения на полуплоскость может быть описано как результат увеличения площади при смещении края полуплоскости на расстояние $\delta/2$ с δ из (24.4) (*Л.Д. Ландау*, 1947).

Она пропорциональна корню из частоты колебаний и из вязкости жидкости.

Может быть решена в замкнутом виде также и общая задача о жидкости, приводимой в движении плоской поверхностью, движущейся (в своей плоскости) по произвольному закону $u = u(t)$. Мы не станем производить здесь соответствующие вычисления, так как искомое решение уравнения (24.3) формально совпадает с решением аналогичной задачи теории теплопроводности, которая будет рассмотрена в § 52 (и дается формулой (52.15)). В частности, испытываемая твердой поверхностью сила трения (отнесенная к единице площади) определяется формулой

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \tag{24.8}$$

(ср. (52.14)).

Рассмотрим теперь общий случай колеблющегося тела произвольной формы. В изученном выше случае колебаний плоской поверхности член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении движения жидкости исчезал тождественно. Для поверхности произвольной формы это, конечно, уже не имеет места. Мы будем, однако, предполагать, что этот член мал но сравнению с другими членами, так что им все же можно пренебречь. Необходимые для возможности такого пренебрежения условия будут выяснены ниже.

Таким образом, будем исходить по-прежнему из линейного уравнения (24.2). Применим к обеим частям этого уравнения операцию rot. Член $\operatorname{rot}\operatorname{grad} p$ исчезает тождественно, так что мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nu\Delta\operatorname{rot}\mathbf{v}, \tag{24.9}$$

т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению типа уравнения теплопроводности.

Но мы видели выше, что такое уравнение приводит к экспоненциальному затуханию описываемой им величины. Мы можем, следовательно, утверждать, что завихренность затухает по направлению в глубь жидкости. Другими словами, вызываемое колебаниями тела движение жидкости является вихревым в некотором слое вокруг тела, а на больших расстояниях быстро переходит в потенциальное движение. Глубина проникновения вихревого движения $\sim\delta$.

В связи с этим возможны два важных предельных случая. Величина δ может быть велика или мала по сравнению с размерами колеблющегося в жидкости тела. Пусть l — порядок величины этих размеров. Рассмотрим сначала случай $\delta \gg l$; это значит, что должно выполняться условие $l^2\omega \ll \nu$. Наряду с этим условием мы будем предполагать также, что число Рейнольдса мало.

Если a — амплитуда колебаний тела, то его скорость — порядка величины $a\omega$. Поэтому число Рейнольдса для рассматриваемого движения есть $\omega al/\nu$. Таким образом, предполагаем выполнение условий

$$l^2\omega \ll \nu, \quad \frac{\omega la}{\nu} \ll 1. \tag{24.10}$$

Это — случай малых частот колебаний. Но малость частоты означает, что скорость медленно меняется со временем и потому в общем уравнении движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}$$

можно пренебречь производной $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Членом же $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ можно пренебречь в силу малости числа Рейнольдса.

Отсутствие члена $\partial\mathbf{v}/\partial t$ в уравнении движения означает стационарность движения. Таким образом, при $\delta \gg l$ движение можно рассматривать в каждый данный момент времени как стационарное. Это значит, что движение жидкости в каждый данный момент такое же, каким оно было бы при равномерном движении тела со скоростью, которой оно в действительности обладает в данный момент. Если, например, речь идет о колебаниях погруженного в жидкость шара, с частотой, удовлетворяющей неравенствам (24.10) (где l есть теперь радиус шара), то можно поэтому утверждать, что испытываемая шаром сила сопротивления будет определяться формулой Стокса (20.14), полученной для равномерного движения шара при малых числах Рейнольдса.

Перейдем теперь к изучению противоположного случая, когда $l \gg \delta$. Для того чтобы можно было опять пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, необходимо в этом случае одновременное выполнение условия малости амплитуды колебаний тела по сравнению с его размерами

$$l^2\omega \gg \nu, \quad a \ll l \tag{24.11}$$

(заметим, что число Рейнольдса при этом отнюдь не должно быть малым). Действительно, оценим член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Оператор $(\mathbf{v}\nabla)$ означает дифференцирование вдоль направления скорости. Но вблизи поверхности тела скорость направлена в основном по касательной. В этом направлении скорость заметно меняется лишь на протяжении размеров тела. Поэтому $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \approx v^2/l \approx a^2\omega^2/l$ (сама скорость $v \approx a\omega$). Производная же $\partial\mathbf{v}/\partial t \approx v\omega \approx a\omega^2$. Сравнив оба выражения, видим, что при $a \ll l$ действительно $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \ll \partial\mathbf{v}/\partial t$. Члены же $\partial\mathbf{v}/\partial t$ и $\nu\Delta\mathbf{v}$ имеют теперь, как легко убедиться, одинаковый порядок величины.

Рассмотрим теперь характер движения жидкости вокруг колеблющегося тела в случае выполнения условий (24.11). В тонком слое вблизи поверхности тела движение является вихревым.

В основной же массе жидкости движение потенциально [1]. Поэтому везде, кроме пристеночного слоя, движение жидкости описывается уравнениями

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{24.12}$$

Отсюда следует, что и $\Delta\mathbf{v} = 0$, а потому уравнение Навье–Стокса переходит в уравнение Эйлера. Таким образом, везде, кроме пристеночного слоя, жидкость движется как идеальная.

Поскольку пристеночный слой тонкий, то при решении уравнений (24.12) с целью определения движения в основной массе жидкости следовало бы взять в качестве граничных условий те условия, которые должны выполняться на поверхности тела, т. е. равенство скорости жидкости скорости тела. Однако решения уравнения движения идеальной жидкости не могут удовлетворить этим условиям. Можно потребовать лишь выполнения этого условия для нормальной к поверхности компоненты скорости жидкости.

Хотя уравнения (24.12) и неприменимы в пристеночном слое жидкости, но поскольку получающееся в результате их решения распределение скоростей уже удовлетворяет необходимым граничным условиям для нормальной компоненты скорости, то истинный ход этой компоненты вблизи поверхности не обнаружит каких-либо существенных особенностей. Что же касается касательной компоненты, то, решая уравнения (24.12), мы получили бы для нее некоторое значение, отличное от соответствующей компоненты скорости тела, между тем как эти скорости тоже должны быть равными. Поэтому в тонком пристеночном слое должно происходить быстрое изменение касательной компоненты скорости.

Легко определить ход этого изменения. Рассмотрим какой-нибудь участок поверхности тела, размеры которого велики по сравнению с δ, но малы но сравнению с размерами тела. Такой участок можно рассматривать приближенно как плоский и потому можно воспользоваться для него полученными выше для плоской поверхности результатами. Пусть ось x направлена по направлению нормали к рассматриваемому участку поверхности, а ось y — по касательной к нему, совпадающей с направлением тангенциальной составляющей скорости элемента поверхности. Обозначим через v_y касательную компоненту скорости движения жидкости относительно тела; на самой поверхности v_y должно обратиться в нуль. Пусть, наконец, $v_0 e^{-i\omega t}$ есть зна-

---

[1]) При колебаниях плоской поверхности на расстоянии δ затухает не только $\operatorname{rot}\mathbf{v}$, но и сама скорость $\mathbf{v}$. Это связано с тем, что плоскость при своих колебаниях не вытесняет жидкости и потому жидкость вдали от нее остается вообще неподвижной. При колебаниях же тел другой формы происходит вытеснение жидкости, в результате чего она приходит в движение, скорость которого заметно затухает лишь на расстояниях порядка размеров тела.

чение v_y, получающееся в результате решения уравнений (24.12). На основании полученных в начале этого параграфа результатов мы можем утверждать, что в пристеночном слое величина v_y будет падать по направлению к поверхности по закону [1])

$$v_y = v_0 e^{-i\omega t}\left\{1 - \exp\left[-(1-i)x\sqrt{\omega/2\nu}\right]\right\}, \tag{24.13}$$

Наконец, полная диссипируемая в единицу времени энергия будет равна интегралу

$$\overline{\dot{E}}_{\text{кин}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}}\oint |v_0|^2\, df, \tag{24.14}$$

взятому по всей поверхности колеблющегося тела.

В задачах к этому параграфу вычислены силы сопротивления, действующие на различные тела, совершающие колебательное движение в вязкой жидкости. Сделаем здесь следующее общее замечание по поводу этих сил. Написав скорость движения тела в комплексном виде $u = u_0 e^{-i\omega t}$, мы получаем в результате силу сопротивления F, пропорциональную скорости u, тоже в комплексном виде $F = \beta u$, где $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ — комплексная постоянная; это выражение можно написать как сумму двух членов:

$$F = (\beta_1 + i\beta_2)u = \beta_1 u - \frac{\beta_2}{\omega}\dot{u}, \tag{24.15}$$

пропорциональных соответственно скорости u и ускорению $\dot{u}$ с вещественными коэффициентами.

Средняя (по времени) диссипация энергии определяется средним значением произведения силы сопротивления и скорости; при этом, разумеется, следует предварительно взять вещественные части написанных выше выражений, т. е. написать:

$$u = \frac{1}{2}\left(u_0 e^{-i\omega t} + u_0^* e^{i\omega t}\right),$$
$$F = \frac{1}{2}\left(u_0 \beta e^{-i\omega t} + u_0^* \beta^* e^{i\omega t}\right).$$

Замечая, что средние значения от $e^{\pm 2i\omega t}$ равны нулю, получим

$$\overline{\dot{E}}_{\text{кин}} = \overline{Fu} = \frac{1}{4}(\beta + \beta^*)|u_0|^2 = \frac{\beta_1}{2}|u_0|^2. \tag{24.16}$$

Таким образом, мы видим, что диссипация энергии связана только с вещественной частью величины β; соответствующую (пропорциональную скорости) часть силы сопротивления (24.15) можно назвать *диссипативной*. Вторую же часть этой силы, пропорциональную ускорению (определяющуюся мнимой частью β)

[1]) Распределение скоростей (24.13) написано в системе отсчета, в которой твердое тело покоится ($v_y = 0$ при $x = 0$). Поэтому в качестве v_0 надо брать решение задачи о потенциальном обтекании жидкостью неподвижного тела.

и не связанную с диссипацией энергии, можно назвать *инерционной.*

Аналогичные соображения относятся к моменту сил, действующих на тело, совершающее вращательные колебания в вязкой жидкости.

З а д а ч и

1. Определить силу трения, действующую на каждую из двух параллельных твердых плоскостей, между которыми находится слой вязкой жидкости, причем одна из плоскостей совершает колебательное движение в своей плоскости.

Р е ш е н и е. Ищем решение уравнения (24.3) в виде [1])

$$v = (A\sin kx + B\cos kx)e^{-i\omega t}$$

и определяем A и B из условий $v = u = u_0 e^{-i\omega t}$ при $x = 0$ и $v = 0$ при $x = h$ (h — расстояние между плоскостями). В результате получаем

$$v = u\frac{\sin k(h-x)}{\sin kh}.$$

Сила трения (на единицу поверхности) на движущейся плоскости равна

$$P_{1y} = \eta\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = -ku\eta\operatorname{ctg} kh,$$

и на неподвижной

$$P_{2y} = -\eta\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=h} = \frac{\eta k u}{\sin kh}$$

(везде подразумеваются вещественные части соответствующих выражений).

2. Определить силу трения, действующую на колеблющуюся плоскость, покрытую слоем жидкости (толщины h), верхняя поверхность которого свободна.

Р е ш е н и е. Граничные условия на твердой плоскости: $v = u$ при $x = 0$, а на свободной поверхности $\sigma_{xy} = \eta\partial v/\partial x = 0$ при $x = h$. Скорость

$$v = u\frac{\cos k(h-x)}{\cos kh}.$$

Сила трения

$$P_y = \eta\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = \eta u k\operatorname{tg} kh.$$

3. Плоский диск большого радиуса R совершает вращательные колебания вокруг своей оси с малой амплитудой (угол поворота диска $\theta = \theta_0\cos\omega t$, $\theta_0 \ll 1$); определить момент сил трения, действующих на диск.

Р е ш е н и е. Для колебаний с малой амплитудой член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в уравнении движения всегда мал по сравнению с $\partial\mathbf{v}/\partial t$ независимо от величины частоты ω. Если $R \gg \delta$, то при определении распределения скоростей плоскость диска можно считать неограниченной. Выбираем цилиндрические координаты с осью z по оси вращения и ищем решение в виде $v_r = v_z = 0$, и $v_\varphi = v = r\Omega(z, t)$. Для угловой скорости жидкости $\Omega(z, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}.$$

[1]) Во всех задачах к этому параграфу k и δ определены согласно (24.4).

Решение этого уравнения, обращающееся в $-\omega\theta_0 \sin\omega t$ при $z = 0$ и в нуль при $z = \infty$, есть

$$\Omega = -\omega\theta_0 e^{-z/\delta} \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right).$$

Момент сил трения, действующих на обе стороны диска, равен

$$M = 2\int_0^R r \cdot 2\pi r\eta \frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=0} dr = \omega\theta_0\pi\sqrt{\omega\rho\eta}\, R^4 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Определить движение жидкости между двумя параллельными плоскостями при наличии градиента давления, меняющегося со временем по гармоническому закону.

Р е ш е н и е. Выбираем плоскость xz посередине между обеими плоскостями; ось x направлена по градиенту давления, который пишем в виде

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = ae^{-i\omega t}.$$

Скорость направлена везде по оси x и определяется уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} = ae^{-i\omega t} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $v = 0$ при $y = \pm h/2$, есть

$$v = \frac{ia}{\omega}e^{-i\omega t}\left[1 - \frac{\cos ky}{\cos(kh/2)}\right].$$

Среднее (по сечению) значение скорости равно

$$\overline{v} = \frac{ia}{\omega}e^{-i\omega t}\left(1 - \frac{2}{kh}\operatorname{tg}\frac{kh}{2}\right).$$

При $h/\delta \ll 1$ это выражение переходит в

$$\overline{v} \approx ae^{-i\omega t}\frac{h^2}{12\nu}$$

в согласии с (17.5), а при $h/\delta \gg 1$ получается

$$\overline{v} \approx \frac{ia}{\omega}e^{-i\omega t}$$

в соответствии с тем, что в этом случае скорость должна быть почти постоянной вдоль сечения и заметно меняется лишь в узком пристеночном слое.

5. Определить силу сопротивления, испытываемую шаром (радиуса R), совершающим в жидкости колебательное поступательное движение.

Р е ш е н и е. Скорость шара $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$. Аналогично тому, как мы поступали в § 20, ищем скорость жидкости в виде

$$\mathbf{v} = e^{-i\omega t}\operatorname{rot}\operatorname{rot} f\mathbf{u}_0,$$

где f — функция только от r (начало координат выбираем в точке нахождения центра шара в данный момент времени). Подставляя в (24.9) и производя преобразования, аналогичные произведенным в § 20, получаем уравнение

$$\Delta^2 f + \frac{i\omega}{\nu}\Delta f = 0$$

(вместо уравнения $\Delta^2 f = 0$ в § 20). Отсюда имеем

$$\Delta f = \text{const}\cdot\frac{e^{ikr}}{r};$$

решение выбрано экспоненциально затухающее, а не возрастающее с r. Интегрируя, получаем

$$\frac{df}{dr} = a\frac{e^{ikr}}{r^2}\left(r - \frac{1}{ik}\right) + \frac{b}{r^2} \tag{1}$$

(самую функцию f можно не выписывать, так как в скорость входят только производные f' и f''). Постоянные a и b определяются из условия $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ при $r = R$ и оказываются равными

$$a = -\frac{3R}{2ik}e^{-ikR}, \quad b = -\frac{R^2}{2}\left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2R^2}\right). \tag{2}$$

Отметим, что при больших частотах ($R \gg \delta$) $a \to 0$, $b \to -R^3/2$, что соответствует (в согласии с утверждениями § 24) потенциальному движению (определенному в задаче 2 § 10).

Сила сопротивления вычисляется по формуле (20.13), в которой интегрирование производится по поверхности шара. Результат:

$$F = 6\pi\eta R\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)u + 3\pi R^2\sqrt{\frac{2\pi\rho}{\omega}}\left(1 + \frac{2R}{9\delta}\right)\frac{du}{dt}. \tag{3}$$

При $\omega = 0$ эта формула переходит в формулу Стокса. При больших же частотах получается

$$F = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\frac{du}{dt} + 3\pi R^2\sqrt{2\eta\rho\omega}\,u.$$

Первый член в этом выражении соответствует инерционной силе при потенциальном обтекании шара (см. задачу 1 § 11), а второй дает предельное выражение для диссипативной силы. Этот второй член можно было бы найти и путем вычисления диссипируемой энергии по формуле (24.14) (ср. следующую задачу).

6. Найти предельное (при больших частотах, $\delta \ll R$) выражение диссипативной силы сопротивления, действующей на бесконечный цилиндр (радиуса R), совершающий колебания в направлении перпендикулярном своей оси.

Р е ш е н и е. Распределение скоростей вокруг обтекаемого в поперечном направлении неподвижного цилиндра дается формулой

$$v = \frac{R^2}{r^2}[2\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}] - \mathbf{u}$$

(см. задачу 3 к § 10). Отсюда находим для тангенциальной скорости на поверхности цилиндра:

$$v_0 = -2u\sin\varphi$$

(r, φ — полярные координаты в поперечной плоскости; угол φ отсчитывается от направления $\mathbf{u}$). По (24.14) находим диссипируемую энергию (отнесенную к единице длины цилиндра):

$$\overline{\dot{E}}_{\text{кин}} = \pi u^2 R\sqrt{2\rho\eta\omega}.$$

Сравнение с формулами (24.15), (24.16) дает для искомой силы:

$$F_{\text{дисс}} = 2\pi Ru\sqrt{2\rho\eta\omega}.$$

7. Определить силу сопротивления, действующую на произвольно движущийся шар (скорость шара есть заданная функция времени $u = u(t)$).

Р е ш е н и е. Разлагаем $u(t)$ в интеграл Фурье:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega, \quad u_\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{i\omega\tau}\, d\tau.$$

В силу линейности уравнений полная сила сопротивления может быть написана в виде интеграла от сил сопротивления, получающихся при движении со скоростями, равными отдельным компонентам Фурье $u_\omega e^{-i\omega t}$; эти силы определяются выражением (3) задачи 5 и равпы

$$\pi\rho R^3 u_\omega e^{-i\omega t} \left\{ \frac{6\nu}{R^2} - \frac{2i\omega}{3} + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R}(1-i)\sqrt{\omega} \right\}.$$

Замечая, что $\left(\dfrac{du}{dt}\right)_\omega = -i\omega u_\omega$, переписываем это в виде

$$\pi\rho R^3 e^{-i\omega t} \left\{ \frac{6\nu}{R^2} u_\omega + \frac{2}{3}(\dot u)_\omega + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R}(\dot u)_\omega \frac{1+i}{\sqrt{\omega}} \right\}.$$

При интегрировании по $d\omega/2\pi$ в первом и втором членах получаем соответственно $u(t)$ и $\dot u(t)$. Для интегрирования третьего члена раньше всего замечаем, что для отрицательных ω надо писать этот член в комплексно сопряженном виде, написав в нем $\dfrac{1-i}{\sqrt{|\omega|}}$ вместо $\dfrac{1+i}{\sqrt{\omega}}$ (это связано с тем, что полученная в задаче 5 формула (3) выведена для скорости $u = u_0 e^{-i\omega t}$ с положительным ω; для скорости же $u_0 e^{i\omega t}$ получилась бы комплексно сопряженная величина). Поэтому вместо интеграла по $d\omega$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ можно написать удвоенную вещественную часть интеграла от 0 до $+\infty$.

$$\frac{2}{2\pi} \operatorname{Re} \left[(1+i) \int\limits_0^\infty \frac{(\dot u)_\omega e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega}}\, d\omega \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[(1+i) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^\infty \frac{\dot u(\tau) e^{i\omega(\tau - t)}}{\sqrt{\omega}}\, d\omega\, d\tau \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[(1+i) \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_0^\infty \frac{\dot u(\tau) e^{i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\omega}}\, d\omega\, d\tau + (1+i) \int\limits_t^\infty \int\limits_0^\infty \frac{\dot u(\tau) e^{i\omega(\tau - t)}}{\sqrt{\omega}}\, d\omega\, d\tau \right] =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \operatorname{Re} \left[\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\dot u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau + i \int\limits_t^\infty \frac{\dot u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \right] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\dot u(t)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau.$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для силы сопротивления

$$F = 2\pi\rho R^3 \left[\frac{1}{3}\frac{du}{dt} + \frac{3\nu}{R^2} u + \frac{3}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{du}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \tag{4}$$

8. Определить силу сопротивления для шара, начинающего в момент $t = 0$ двигаться равноускоренно по закону $u = \alpha t$.

Р е ш е н и е. Полагая в формуле (4) задачи 7 $u = 0$ при $t < 0$ и $u = \alpha t$ при $t > 0$, получаем (при $t > 0$):

$$F = 2\pi\rho R^3\alpha\left[\frac{1}{3} + \frac{3\nu}{R^2}t + \frac{6}{R}\left(\frac{\nu t}{\pi}\right)^{1/2}\right].$$

9. Определить силу сопротивления для шара, мгновенно приведенного в равномерное движение.

Р е ш е н и е. Имеем $u = 0$ при $t < 0$ и $u = u_0$ при $t > 0$. Производная du/dt равна нулю всегда, кроме момента $t = 0$, в который она обращается в бесконечность, причем так, что интеграл от du/dt по времени конечен и равен u_0. В результате получаем для всего времени $t > 0$

$$F = 6\pi\rho\nu R u_0\left\{1 + \frac{R}{\sqrt{\pi\nu t}}\right\} + \frac{2\pi\rho R^3}{3}u_0\delta(t);$$

здесь $\delta(t)$ есть δ-функция. При $t \to \infty$ это выражение асимптотически приближается к значению, даваемому формулой Стокса. Импульс силы сопротивления, испытываемый шаром в течение бесконечно малого интервала времени вокруг $t = 0$, получается интегрированием по времени последнего члена в F и равен $2\pi\rho R^3 u_0/3$.

10. Определить момент сил, действующих на шар, совершающий в вязкой жидкости вращательное колебательное движение вокруг своего диаметра.

Р е ш е н и е. По тем же причинам, что и в задаче 1 § 20, в уравнении движения можно не писать члена с градиентом давления, так что имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu\Delta\mathbf{v}.$$

Ищем решение в виде

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} f\boldsymbol{\Omega}_0 e^{-i\omega t},$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 e^{-i\omega t}$ — угловая скорость вращения шара. Для f получаем теперь вместо уравнения $\Delta f = \mathrm{const}$ следующее уравнение:

$$\Delta f + k^2 f = \mathrm{const}.$$

Опуская несущественный постоянный член в решении этого уравнения, имеем отсюда $f = \dfrac{a}{r}e^{ikr}$ (выбирается решение, которое обращается на бесконечности в нуль). Постоянную a определяем из предельного условия $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$ на поверхности шара и в результате получаем

$$f = \frac{R^3}{r(1 - ikR)}e^{ik(r-R)}, \quad \mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]\left(\frac{R}{r}\right)^3\frac{1 - ikr}{1 - ikR}e^{ik(r-R)}$$

(R — радиус шара). Вычисление, аналогичное произведенному в задаче 1 § 20, приводит к следующему выражению для момента сил, действующих на шар со стороны жидкости:

$$M = -\frac{8\pi}{3}\eta R^3\Omega\frac{3 + 6R/\delta + 6(R/\delta)^2 + 2(R/\delta)^3 - 2i(R/\delta)^2(1 + R/\delta)}{1 + 2R/\delta + 2(R/\delta)^2}.$$

При $\omega \to 0$ (т. е. $\delta \to \infty$) получается выражение $M = -8\pi\eta R^3\Omega$, соответствующее равномерному вращению шара (см. задачу 1 § 20). В обратном же предельном случае $R/\delta \gg 1$ получается

$$M = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi R^4\sqrt{\eta\rho\omega}(i-1)\Omega.$$

Это выражение можно получить и непосредственным путем: при $\delta \ll R$ каждый элемент поверхности шара можно рассматривать как плоский, а действующую на него силу трения определить по формуле (24.6), подставив в нее скорость $u = \Omega R\sin\theta$.

11. Определить момент сил, действующих на наполненный вязкой жидкостью полый шар, совершающий вращательное колебательное движение вокруг своего диаметра.

Р е ш е н и е. Ищем скорость в том же виде, как и в предыдущей задаче. Для f берем решение, конечное во всем объеме внутри шара, включая его центр: $f = a\dfrac{\sin kr}{r}$. Определяя a из граничного условия, получаем

$$\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]\left(\frac{R}{r}\right)^3\frac{rk\cos kr - \sin kr}{Rk\cos kR - \sin kR}.$$

Вычисление момента сил трения приводит к выражению

$$M = \frac{8}{3}\pi\eta R^3\Omega\frac{k^2R^2\sin kR + 3kR\cos kR - 3\sin kR}{kR\cos kR - \sin kR}.$$

Предельное выражение при $R/\delta \gg 1$ совпадает, естественно, с соответствующим выражением предыдущей задачи. Если же $R/\delta \ll 1$, то

$$M = \frac{8}{15}\pi\rho\omega R^5\Omega\left(i - \frac{R^2\omega}{35\nu}\right).$$

Первый член в этой формуле соответствует инерционным силам, возникающим при вращении всей массы жидкости как целого.

§ 25. Затухание гравитационных волн

Рассуждения, аналогичные вышеизложенным, могут быть проведены по поводу распределения скоростей вблизи свободной поверхности жидкости. Рассмотрим колебательное движение, происходящее у поверхности жидкости (например, гравитационные волны). Предположим, что выполняются условия (24.11), в которых теперь роль размеров l играет длина волны λ:

$$\lambda^2\omega \gg \nu, \quad a \ll \lambda \tag{25.1}$$

(a — амплитуда полны, ω — ее частота). Тогда можно утверждать, что решение будет вихревым лишь в тонком слое у поверхности жидкости, а в основном ее объеме движение будет потенциальным — таким, каким оно было бы у идеальной жидкости.

Движение вязкой жидкости должно удовлетворять у свободной поверхности граничным условиям (15.16), требующим исчезновения определенных комбинаций производных от скорости по

координатам. Движение же, получающееся в результате решения уравнений гидродинамики идеальной жидкости, этому условию не удовлетворяет. Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для скорости v_y, мы можем заключить, что в тонком слое у поверхности жидкости соответствующие производные скорости будут быстро уменьшаться. Существенно отметить, что градиент скорости не будет при этом аномально большим, как это имело место вблизи твердой поверхности.

Вычислим диссипацию энергии в гравитационной волне. Здесь надо говорить не о диссипации кинетической энергии, а о диссипации механической энергии $E_{\text{мех}}$, включающей в себя наряду с кинетической также и потенциальную энергию в поле тяжести. Ясно, однако, что на обусловленную процессами внутреннего трения в жидкости диссипацню энергии не может влиять факт наличия или отсутствия поля тяжести. Поэтому $\dot{E}_{\text{мех}}$ определяется той же формулой (16.3):

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV.$$

При вычислении этого интеграла для гравитационной волны надо заметить, что поскольку объем поверхностного слоя вихревого движения мал, а градиент скорости в нем не аномально велик, фактом наличия этого слоя можно пренебречь, в противоположность тому, что мы имели в случае колебаний твердой поверхности. Другими словами, интегрирование должно производиться по всему объему жидкости, в котором, как мы видели, жидкость движется как идеальная.

Но движение в гравитационной волне в идеальной жидкости было уже нами определено в § 12. Это движение потенциально, и потому

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\, \partial x_i} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

так что

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -2\eta \int \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\, \partial x_i} \right)^2 dV.$$

Потенциал φ имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos{(kx - \omega t + \alpha)} e^{kz}.$$

Нас интересует, конечно, не мгновенное, а среднее по времени значение диссипируемой энергии. Замечая, что средние значения квадратов косинуса и синуса одинаковы, получим

$$\overline{\dot{E}}_{\text{мех}} = -8\eta k^4 \int \overline{\varphi^2}\, dV. \qquad (25.2)$$

Что касается самой энергии гравитационной волны, то для ее вычисления можно воспользоваться известным из механики

обстоятельством, что у всякой системы, совершающей малые колебания (колебания с малой амплитудой), средняя кинетическая и потенциальная энергии равны друг другу. На этом основании можно написать $\overline{E}_{\text{мех}}$ просто как удвоенную кинетическую энергию:

$$\overline{E}_{\text{мех}} = \rho \int \overline{v^2}\, dV = \rho \int \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2}\, dV,$$

откуда

$$\overline{E}_{\text{мех}} = 2\rho k^2 \int \overline{\varphi^2}\, dV. \tag{25.3}$$

Затухание волн удобно характеризовать *коэффициентом затухания* γ, определенным как отношение

$$\gamma = |\dot{\overline{E}}_{\text{мех}}|/(2\overline{E}). \tag{25.4}$$

С течением времени энергия волны падает по закону $E = \text{const} \cdot e^{-2\gamma t}$; что касается амплитуды волны, то, поскольку энергия пропорциональна ее квадрату, закон ее уменьшения со временем определяется множителем $e^{-\gamma t}$.

С помощью (25.2), (25.3) находим

$$\gamma = 2\nu k^2. \tag{25.5}$$

Подставляя сюда (12.7), получим коэффициент затухания гравитационных волн в виде

$$\gamma = \frac{2\nu\omega^4}{g^2}. \tag{25.6}$$

Задачи

1. Определить коэффициент затухания длинных гравитационных волн, распространяющихся в канале постоянного сечения; частота предполагается настолько большой, что $\sqrt{\nu/\omega}$ мало по сравнению с глубиной жидкости в канале и его шириной.

Решение. Основная диссипация энергии будет происходить в пристеночном слое жидкости, где скорость меняется от нуля на самой стенке до значения $v = v_0 e^{-i\omega t}$, которое она имеет в волне. Средняя диссипация энергии (отнесенная к единице длины канала) равна согласно (24.14)

$$l\frac{|v_0|^2}{2\sqrt{2}}\sqrt{\eta\rho\omega}\,;$$

l — длина той части контура сечения канала, вдоль которой он соприкасается с жидкостью. Средняя же энергия жидкости (тоже отнесенная к единице длины канала) равна $S\rho\overline{v^2} = S\rho|v_0|^2/2$ (S — площадь сечения жидкости в канале). Коэффициент затухания равен

$$\gamma = \frac{l}{2\sqrt{2}S}\sqrt{\nu\omega}.$$

Так, для канала прямоугольного сечения (ширина a, глубина жидкости h)

$$\gamma = \frac{2h+a}{2\sqrt{2}ah}\sqrt{\nu\omega}.$$

2. Определить движение в гравитационной волне на жидкости с большой вязкостью ($\nu \gtrsim \omega\lambda^2$).

Р е ш е н и е. Приведенное в тексте вычисление коэффициента затухания применимо только в случаях, когда этот коэффициент мал ($\gamma \ll \omega$), так что движение можно рассматривать в первом приближении как движение идеальной жидкости. При произвольной вязкости ищем решение уравнений движения:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu\Big(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\Big) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu\Big(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\Big) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

зависящее от t и x как $e^{-i\omega t+ikx}$ и затухающее с z по направлению в глубь жидкости ($z > 0$). Получаем

$$v_x = e^{-i\omega t+ikx}(Ae^{kz} + Be^{mz}),$$

$$v_z = e^{-i\omega t+ikx}\Big(-iAe^{kz} - i\frac{k}{m}Be^{mz}\Big),$$

$$\frac{p}{\rho} = e^{-i\omega t+ikx}\frac{\omega}{k}Ae^{kz} - gz, \quad \text{где}\, m = \sqrt{k^2 - i\frac{\omega}{\nu}}\,.$$

Граничные условия на поверхности жидкости:

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{xz} = \eta\Big(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big) = 0$$

(при $z = \zeta$). Во втором из этих условий можно сразу написать $z = 0$ вместо $z = \zeta$. Первое же дифференцируем предварительно по t и пишем gv_z вместо $g\partial\zeta/\partial t$, после чего полагаем $z = 0$. Из условия совместности получающихся таким образом двух однородных уравнений для A и B получаем

$$\Big(2 - i\frac{\omega}{\nu k^2}\Big)^2 + \frac{g}{\nu^2 k^3} = 4\sqrt{1 - i\frac{\omega}{\nu k^2}}\,. \tag{1}$$

Это уравнение определяет зависимость ω от волнового вектора k. При этом ω является комплексной величиной; ее действительная часть определяет частоту колебаний, а мнимая — коэффициент затухания. Физический смысл имеют те из решений уравнения (1), мнимая часть которых отрицательна (соответственно затуханию волны); таковыми являются только два из корней уравнения (2). Если $\nu k^2 \ll \sqrt{gk}$ (условие (25.1)), то коэффициент затухания мал и (2) дает приближенно $\omega = \pm\sqrt{gk} - i\cdot 2\nu k^2$ — известный уже нам результат. В противоположном предельном случае $\nu k^2 \gg \sqrt{gk}$ уравнение (1) имеет два чисто мнимых корня, соответствующих чисто затухающему апериодическому движению. Один из корней есть

$$\omega = -\frac{ig}{2\nu k},$$

а другой значительно больше (порядка νk^2) и поэтому не интересен (соответствующее ему движение быстро затухает).

ГЛАВА III

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

§ 26. Устойчивость стационарного движения жидкости

Для всякой задачи о движении вязкой жидкости в заданных стационарных условиях должно, в принципе, существовать точное стационарное решение уравнений гидродинамики. Эти решения формально существуют при любых числах Рейнольдса. Но не всякое решение уравнений движения, даже если оно является точным, может реально осуществиться в природе. Осуществляющиеся в природе движения должны не только удовлетворять гидродинамическим уравнениям, но должны еще быть устойчивыми: малые возмущения, раз возникнув, должны затухать со временем. Если же, напротив, неизбежно возникающие в потоке жидкости сколь угодно малые возмущения стремятся возрасти со временем, то движение неустойчиво и фактически существовать не может [1]).

Математическое исследование устойчивости движения по отношению к бесконечно малым возмущениям должно происходить по следующей схеме. На исследуемое стационарное решение (распределение скоростей, в котором пусть будет $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$) накладывается нестационарное малое возмущение $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ которое должно быть определено таким образом, чтобы результирующее движение $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ удовлетворяло уравнениям движения. Уравнение для определения $\mathbf{v}_1$ получается подстановкой в уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{26.1}$$

скорости и давления в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad p = p_0 + p_1, \tag{26.2}$$

причем известные функции $\mathbf{v}_0$ и p_0 удовлетворяют уравнениям

$$(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}_0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_0 = 0. \tag{26.3}$$

---

[1]) Ранее неустойчивость по отношению к сколь угодно малым возмущениям мы называли абсолютной. Теперь в этом аспекте прилагательное «абсолютная» мы опускаем, сохранив его (в соответствии с более принятой в современной литературе терминологией) в качестве антитезы к понятию о конвективной неустойчивости (§ 28).

Опуская члены высших порядков по малой величине $\mathbf{v}_1$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}_1, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0. \quad (26.4)$$

Граничным условием является исчезновение $\mathbf{v}_1$ на неподвижных твердых поверхностях.

Таким образом, $\mathbf{v}_1$ удовлетворяет системе однородных линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями только от координат, но не от времени. Общее решение таких уравнений может быть представлено в виде суммы частных решений, в которых $\mathbf{v}_1$ зависит от времени посредством множителей типа $e^{-i\omega t}$. Сами частоты ω возмущений не произвольны, а определяются в результате решений уравнений (26.4) с соответствующими предельным условиями. Эти частоты, вообще говоря, комплексны. Если имеются такие ω, мнимая часть которых положительна, то $e^{-i\omega t}$ будет неограниченно возрастать со временем. Другими словами, такие возмущения, раз возникнув, будут возрастать, т. е. движение будет неустойчиво по отношению к ним. Для устойчивости движения необходимо, чтобы у всех возможных частот ω мнимая часть была отрицательна. Тогда возникающие возмущения будут экспоненциально затухать со временем.

Такое математическое исследование устойчивости, однако, крайне сложно. До настоящего времени не разработан теоретически вопрос об устойчивости стационарного обтекания тел конечных размеров. Нет сомнения в том, что при достаточно малых числах Рейнольдса стационарное обтекание устойчиво. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при увеличении R достигается в конце концов определенное его значение (которое называют критическим, $\mathrm{R}_{\text{кр}}$), начиная с которого движение становится неустойчивым, так что при достаточно больших числах Рейнольдса ($\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}}$) стационарное обтекание твердых тел вообще невозможно. Критическое значение числа Рейнольдса не является, разумеется, универсальным; для каждого типа движения существует свое $\mathrm{R}_{\text{кр}}$. Эти значения, по-видимому, — порядка нескольких десятков (так, при поперечном обтекании цилиндра незатухающее нестационарное движение наблюдалось уже при $\mathrm{R} = ud/\nu \approx 30$, где d — диаметр цилиндра).

Обратимся к изучению характера того нестационарного движения, которое устанавливается в результате неустойчивости стационарного движения при больших числах Рейнольдса (*Л.Д. Ландау*, 1944).

Начнем с выяснения свойств этого движения при R, лишь немногим превышающих $\mathrm{R}_{\text{кр}}$. При $\mathrm{R} < \mathrm{R}_{\text{кр}}$ у комплексных частот $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ всех возможных малых возмущений мнимая часть отрицательна ($\gamma_1 < 0$). При $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$ появляется одна частота, мнимая часть которой обращается в нуль. При $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}}$

у этой частоты $\gamma_1 > 0$, причем для R, близких к критическому, $\gamma_1 \ll \omega_1$ [1]). Функция $\mathbf{v}_1$, соответствующая этой частоте, имеет вид

$$\mathbf{v}_1 = A(t)\mathbf{f}(x,\, y,\, z), \tag{26.5}$$

где $\mathbf{f}$ — некоторая комплексная функция координат, а комплексная амплитуда [2])

$$A(t) = \mathrm{const} \cdot e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega t}. \tag{26.6}$$

Это выражение для $A(t)$ в действительности пригодно лишь в течение короткого промежутка времени после момента срыва стационарного режима: множитель $\exp(\gamma_1 t)$ быстро растет, между тем как описанный выше метод определения $\mathbf{v}_1$, приводящий к выражению вида (26.5), (26.6), применим лишь при достаточной малости $\mathbf{v}_1$. В действительности, конечно, модуль $|A|$ амплитуды нестационарного движения не растет неограниченно, а стремится к некоторому конечному пределу. При R, близких к $\mathrm{R}_{\text{кр}}$, этот конечный предел все еще мал, и для его определения поступим следующим образом.

Определим производную по времени от квадрата амплитуды $|A|^2$. Для самых малых времен, когда еще применимо (26.6), имеем

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2.$$

Это выражение является, по существу, лишь первым членом разложения в ряд по степеням A и A^*. При увеличении модуля $|A|$ (но когда он все еще остается малым) надо учесть следующие члены этого разложения. Ближайшие следующие — члены третьего порядка по A. Нас, однако, интересует не точное значение производной, а ее среднее по времени значение, причем усреднение производится по промежуткам времени, большим по сравнению с периодом $2\pi/\omega_1$ периодического множителя $\exp(-i\omega_1 t)$ (напомним, что, поскольку $\omega_1 \gg \gamma_1$, этот период мал по сравнению со временем $1/\gamma_1$ заметного изменения модуля $|A|$). Но члены третьего порядка непременно содержат периодический множитель и при усреднении выпадают [3]). Среди членов же чет-

[1]) Спектр всех возможных (для данного типа движений) частот возмущений содержит как изолированные значения (дискретный спектр), так и значения, непрерывно заполняющие целые интервалы (непрерывный спектр). Можно думать, что для обтекания конечных тел частоты с $\gamma_1 > 0$ могут иметься только в дискретном спектре. Дело в том, что возмущения, отвечающие частотам непрерывного спектра, вообще говоря, не исчезают на бесконечности. Между тем на бесконечности основное движение представляет собой заведомо устойчивый плоскопараллельный однородный поток.

[2]) Как обычно, подразумевается вещественная часть выражения (26.6).

[3]) Строго говоря, члены третьего порядка дают при усреднении не нуль, а величины четвертого порядка; мы предполагаем их включенными в члены четвертого порядка в разложении.

вертого порядка есть член, пропорциональный $A^2A^{*2} = |A|^4$, при усреднении не выпадающий. Таким образом, с точностью до членов четвертого порядка имеем

$$\overline{\frac{d|A|^2}{dt}} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4, \tag{26.7}$$

где α — положительная или отрицательная постоянная (*постоянная Ландау*).

Нас интересует ситуация, когда при $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}}$ впервые становится неустойчивым (на фоне основного движения) уже сколь угодно малое возмущение. Ей отвечает случай $\alpha > 0$; рассмотрим его.

Над $|A|^2$ и $|A|^4$ в (26.7) мы не пишем знаков усреднения, так как оно производится только по промежуткам времени, малым по сравнению с $1/\gamma_1$. По этой же причине при решении этого уравнения надо поступать так, как если бы черты над производной в левой его части тоже не было. Решение уравнения (26.7) имеет вид

$$|A|^{-2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \mathrm{const}\cdot e^{-2\gamma_1 t}.$$

Отсюда видно, что $|A|^2$ асимптотически стремится к конечному пределу

$$|A|^2_{\max} = 2\gamma_1/\alpha. \tag{26.8}$$

Величина γ_1 зависит от R; вблизи $\mathrm{R}_{\text{кр}}$ функция $\gamma_1(\mathrm{R})$ может быть разложена по степеням $\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}}$. Но $\gamma_1(\mathrm{R}_{\text{кр}}) = 0$ по самому определению критического числа Рейнольдса; поэтому приближенно имеем

$$\gamma_1 = \mathrm{const}\cdot(\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}}). \tag{26.9}$$

Подставив это в (26.8), находим следующую зависимость устанавливающейся амплитуды возмущения от «степени надкритичности»:

$$|A|_{\max} \sim (\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}})^{1/2}. \tag{26.10}$$

Остановимся кратко на случае, когда в уравнении (26.7) $\alpha < 0$. Для определения предельной амплитуды возмущения два члена разложения (26.7) теперь недостаточны, и надо учесть отрицательный член более высокого порядка; пусть это будет член $-\beta|A|^6$ с $\beta > 0$. Тогда

$$|A|^2_{\max} = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \left[\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta}\gamma_1\right]^{1/2} \tag{26.11}$$

с γ_1 из (26.9). Эта зависимость изображена на рис. 13 *б* (рис. 13 *а* отвечает случаю $\alpha > 0$, формула (26.10)). При $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}}$ стационарное движение не может существовать вовсе; при $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$

возмущение скачком возрастает до конечной амплитуды (которая, конечно, предполагается все же настолько малой, что используемое разложение по степеням $|A|^2$ применимо) [1]. В интервале $\mathrm{R}'_{\text{кр}} < \mathrm{R} < \mathrm{R}_{\text{кр}}$ основное движение *метастабильно* — устойчиво по отношению к бесконечно малым, но неустойчиво по отношению к возмущениям конечной амплитуды (сплошная линия; штриховая кривая ветвь неустойчива).

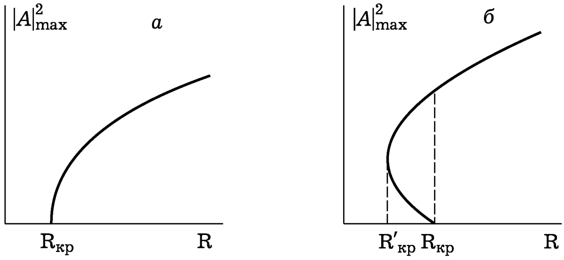


Рис. 13

Вернемся к нестационарному движению, возникающему при $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}}$ в результате неустойчивости по отношению к малым возмущениям. При R, близких к $\mathrm{R}_{\text{кр}}$, это движение может быть представлено в виде наложения стационарного движения $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ и периодического движения $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ с малой, но конечной амплитудой, растущей по мере увеличения R по закону (26.10). Распределение скоростей в этом движении имеет вид

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{r})e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)}, \tag{26.12}$$

где $\mathbf{f}$ — комплексная функция координат, а β_1 — некоторая начальная фаза. При больших разностях $\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}}$ разделение скорости на две части $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ уже не имеет смысла. Мы имеем при этом дело просто с некоторым периодическим движением с частотой ω_1. Если вместо времени пользоваться в качестве независимой переменной фазой $\varphi_1 \equiv \omega_1 t + \beta_1$, то можно сказать, что функция $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \varphi)$ является периодической функцией от φ с периодом 2π. Эта функция, однако, не есть теперь простая тригонометрическая. В ее разложение в ряд Фурье

$$\mathbf{v} = \sum_p \mathbf{A}_p(\mathbf{r})e^{-i\varphi_1 p} \tag{26.13}$$

(суммирование по всем положительным и отрицательным целым числам p) входят члены не только с основной частотой ω_1, но и с кратными ей.

Уравнением (26.7) определяется только абсолютная величина временного множителя $A(t)$, но не его фаза φ_1. Последняя

[1]) В механике о таких системах говорят как о системах с жестким самовозбуждением, в отличие от систем с мягким самовозбуждением, неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям.

остается по существу неопределенной и зависит от случайных начальных условий. В зависимости от этих условий, начальная фаза β_1 может иметь любое значение. Таким образом, изучаемое периодическое движение не определяется однозначно теми заданными стационарными внешними условиями, в которых оно происходит. Одна из величин — начальная фаза скорости — остается произвольной. Можно сказать, что это движение обладает одной степенью свободы, между тем как стационарное движение, полностью определяющееся внешними условиями, не обладает степенями свободы вовсе.

З а д а ч а

Вывести уравнение, выражающее баланс энергии между основным течением и наложенным на него возмущением, не предполагая последнее слабым.

Р е ш е н и е. Подставив (26.2) в уравнение (26.1), но не опустив в нем член второго порядка по $\mathbf{v}_1$, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_1 = -\nabla p_1 + \mathrm{R}^{-1}\Delta\mathbf{v}_1 \tag{1}$$

(предполагается, что все величины приведены к безразмерному виду, как объяснено в § 19). Умножив это уравнение на $\mathbf{v}_1$, и преобразовав с учетом равенств $\operatorname{div}\mathbf{v}_0 = \operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{v_1^2}{2} = -v_{1i}v_{1k}\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} - \mathrm{R}^{-1}\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{1}{2}v_1^2\left(v_{0k} + v_{1k}\right) - p_1 v_{1k} + \mathrm{R}^{-1}v_{1i}\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\right].$$

Последний член в правой части уравнения исчезает после интегрирования по всей области движения в силу условий $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = 0$ на ограничивающих область стенках или на бесконечности. В результате находим искомое соотношение:

$$\dot{E}_1 = T - \mathrm{R}^{-1}D, \tag{2}$$

где

$$E_1 = \int \frac{v_1^2}{2}\,dV, \quad T = -\int v_{1i}v_{1k}\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k}\,dV, \quad D = \int \left(\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\right)^2 dV. \tag{3}$$

Функционал T описывает обмен энергией между основным движением и возмущением; он может иметь оба знака. Функционал D — диссипативная потеря энергии, всегда $D > 0$. Обратим внимание на то, что нелинейный по $\mathbf{v}_1$ член в (1) не дает вклада в соотношение (2).

Соотношение (2) позволяет найти оценку снизу для числа $\mathrm{R}_{\text{кр}}$ (*O. Reynolds*, 1894; *W. Orr*, 1907): производная dE/dt заведомо отрицательна, т. е. возмущение затухает со временем, если $\mathrm{R} < \mathrm{R}_E$, где

$$\mathrm{R}_E = \min(D/T), \tag{4}$$

причем минимум функционала берется по отношению к функциям $\mathbf{v}_1(\mathbf{r})$, удовлетворяющим граничным условиям и уравнению $\operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0$. Существование конечного минимума математически связано с одинаковой (второй) степенью однородности функционалов T и D. Тем самым доказывается су-

ществование нижней (по R) границы метастабильности, ниже которой основное движение устойчиво по отношению к любым возмущениям. Даваемая выражением (4) оценка (ее называют энергетической), однако, в большинстве случаев оказывается очень заниженной.

§ 27. Устойчивость вращательного движения жидкости

Для исследования устойчивости стационарного движения жидкости в пространстве между двумя вращающимися цилиндрами (§ 18) в предельном случае сколь угодно больших чисел Рейнольдса можно применить простой способ, аналогичный примененному в § 4 при выводе условия механической устойчивости неподвижной жидкости в поле тяжести (*Rayleigh*, 1916). Идея метода состоит в том, что рассматривается какой-нибудь произвольный малый участок жидкости и предполагается, что этот участок смещается с той траектории, по которой он движется в рассматриваемом течении. При таком смещении появляются силы, действующие на смещенный участок жидкости. Для устойчивости основного движения необходимо, чтобы эти силы стремились вернуть смещенный элемент в исходное положение.

Каждый элемент жидкости в невозмущенном течении движется по окружности $r = \text{const}$ вокруг оси цилиндров. Пусть $\mu(r) = mr^2\dot{\varphi}$ есть момент импульса элемента с массой m ($\dot{\varphi}$ — угловая скорость). Действующая на него центробежная сила равна μ^2/mr^3; эта сила уравновешивается соответствующим радиальным градиентом давления, возникающим во вращающейся жидкости. Предположим теперь, что элемент жидкости, находящийся на расстоянии r_0 от оси, подвергается малому смещению со своей траектории, так что попадает на расстояние $r > r_0$ от оси. Сохраняющийся момент импульса элемента остается при этом равным своему первоначальному значению $\mu_0 = \mu(r_0)$. Соответственно в его новом положении на него будет действовать центробежная сила, равная $\mu_0^2/(mr^3)$. Для того чтобы элемент стремился возвратиться в исходное положение, эта центробежная сила должна быть меньше, чем ее равновесное значение $\mu^2/(mr^3)$, уравновешивающееся имеющимся на расстоянии r градиентом давления. Таким образом, необходимое условие устойчивости гласит: $\mu^2 - \mu_0^2 > 0$; разлагая $\mu(r)$ по степеням положительной разности $r - r_0$, напишем это условие в виде

$$\mu \frac{d\mu}{dr} > 0. \tag{27.1}$$

Согласно формуле (18.3) угловая скорость $\dot{\varphi}$ частиц движущейся жидкости равна

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Вычисляя μ как $mr^2\dot{\varphi}$ и опуская все заведомо положительные множители, пишем условие (27.1) в виде

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)\dot{\varphi} > 0. \tag{27.2}$$

Угловая скорость $\dot{\varphi}$ монотонно меняется с r от значения Ω_1 на внутреннем до значения Ω_2 на внешнем цилиндре. Если оба цилиндра вращаются в противоположных направлениях, т. е. Ω_1 и Ω_2 имеют различные знаки, то функция $\dot{\varphi}$ меняет знак в пространстве между цилиндрами и ее произведение на постоянное число $\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2$ не может быть везде положительным. Таким образом, в этом случае (27.2) не выполняется во всем объеме жидкости, и движение неустойчиво.

Пусть теперь оба цилиндра вращаются в одну сторону; выбирая это направление вращения в качестве положительного, имеем $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$. Тогда $\dot{\varphi}$ везде положительно, и для выполнения условия (27.2) необходимо, чтобы было

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2. \tag{27.3}$$

Если же $\Omega_2 R_2^2$ меньше, чем $\Omega_1 R_1^2$, то движение неустойчиво. Так, если внешний цилиндр покоится ($\Omega_2 = 0$), а вращается только внутренний, то движение неустойчиво. Напротив, если покоится внутренний цилиндр ($\Omega_1 = 0$), то движение устойчиво.

Подчеркнем, что в изложенных рассуждениях совершенно не учитывалось влияние вязких сил трения при смещении элемента жидкости. Поэтому использованный метод применим лишь при достаточно малой вязкости, т. е. достаточно больших числах Рейнольдса.

Исследование устойчивости движения при произвольных R должно производиться общим методом, основанным на уравнениях (26.4); для движения между вращающимися цилиндрами это было сделано впервые *Тэйлором* (*G.I. Taylor*, 1924).

В данном случае невозмущенное распределение скоростей v_0 зависит только от цилиндрической координаты r и не зависит ни от угла φ, ни от координаты z вдоль оси цилиндров. Полную систему независимых решений уравнений (26.4) можно поэтому искать в виде

$$\mathbf{v}_1(r, \varphi, z) = e^{i(n\varphi + kz - \omega t)}\mathbf{f}(r) \tag{27.4}$$

с произвольно направленным вектором $\mathbf{f}(r)$. Волновое число k, пробегающее непрерывный ряд значений, определяет периодичность возмущения вдоль оси z. Число же n пробегает лишь целые значения $0, 1, 2, \ldots$, как это следует из условия однозначности функции по переменной φ; значению $n = 0$ отвечают осесимметричные возмущения. Допустимые значения частоты ω получаются в результате решения уравнений с надлежащими граничными условиями в плоскости $z = \mathrm{const}$ (скорость $\mathbf{v}_1 = 0$ при $r = R_1$

и $r = R_2$). Поставленная таким образом задача определяет при заданных значениях n и k, вообще говоря, дискретный ряд собственных частот ($\omega = \omega_n^{(j)}(k)$, где индекс j нумерует различные ветви функции $\omega_n(k)$; эти частоты, вообще говоря, комплексны.

Роль числа Рейнольдса в данном случае может играть величина $\Omega_1 R_1^2/\nu$ или $\Omega_2 R_2^2/\nu$ — при заданных значениях отношений R_1/R_2 и Ω_1/Ω_2, определяющих «тип движения». Будем следить за изменением какой-либо из собственных частот $\omega = \omega_n^{(j)}(k)$ при постепенном увеличении числа Рейнольдса. Момент возникновения неустойчивости (по отношению к данному виду возмущений) определяется тем значением R, при котором функция $\gamma(k) = \operatorname{Im}\omega$ впервые обращается в нуль при каком-либо значении k. При $\mathrm{R} < \mathrm{R}_{\text{кр}}$ функция $\gamma(k)$ везде отрицательна, а при $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}}$ она положительна в некотором интервале значений k. Пусть $k_{\text{кр}}$ — то значение k, для которого (при $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$) функция $\gamma(k)$ обращается в нуль. Соответствующая функция (27.4) определяет характер того (накладывающегося на основное) движения, которое возникает в жидкости в момент потери устойчивости; оно периодично вдоль оси цилиндров с периодом $2\pi/k_{\text{кр}}$. При этом, конечно, фактическая граница устойчивости определяется тем видом возмущений (т. е. той функцией $\omega_n^{(j)}(k)$)), которая дает наименьшее значение $\mathrm{R}_{\text{кр}}$; именно эти «наиболее опасные» возмущения интересуют нас здесь. Как правило (см. ниже), ими являются осесимметричные возмущения. Ввиду большой сложности, достаточно полное исследование этих возмущений было произведено лишь для случая узкого зазора между цилиндрами ($h \equiv R_2 - R_1 \ll R \equiv (R_1 + R_2)/2$). Оно приводит к следующим результатам [1]).

Оказывается, что решению, приводящему к наименьшему значению $\mathrm{R}_{\text{кр}}$, отвечает чисто мнимая функция $\omega(k)$. Поэтому при $k = k_{\text{кр}}$ не только $\operatorname{Im}\omega = 0$, но и вообще $\omega = 0$. Это значит, что первая потеря устойчивости стационарным вращением жидкости приводит к возникновению другого, тоже стационарного течения [2]). Оно представляет собой тороидальные вихри (их называют *тэйлоровскими*), регулярно расположенные вдоль длины

---

[1]) Подробное изложение можно найти в книгах: *Кочин Н.Е.*, *Кибель И.А.*, *Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2; *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. — Oxford, 1961; *Drazin P.G.*, *Reid W.H.* Hydrodynamic stability. — Cambridge, 1981.

[2]) В таких случаях говорят о *смене устойчивостей*. Экспериментальные данные, а также числовые результаты для ряда частных случаев, дают основание считать, что это свойство имеет для рассматриваемого движения общий характер и не связано с малостью h.

цилиндров. Для случая вращения обоих цилиндров в одну сторону, на рис. 14 схематически изображены проекции линий тока этих вихрей на плоскость меридионального сечения цилиндров (скорость v_1 имеет в действительности также и азимутальную компоненту). На длине $2\pi/k_{\text{кр}}$ каждого периода расположены два вихря с противоположными направлениями вращения.

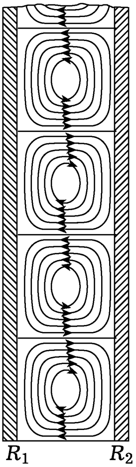


Рис. 14

При R, несколько превышающем $\text{R}_{\text{кр}}$, имеется уже не одно, а целый интервал значений k, для которых $\operatorname{Im}\omega > 0$. Не следует, однако, думать, что возникающее при этом движение будет представлять собой одновременное наложение движений с различными периодичностями. В действительности при каждом R возникает движение с вполне определенной периодичностью, стабилизирующее все течение в целом. Определение этой периодичности, однако, уже невозможно с помощью линеаризованного уравнения (26.4).

На рис. 15 изображен примерный вид кривой, разделяющей области устойчивости и неустойчивости (последняя заштрихована) при заданном значении R_1/R_2. Правая ветвь кривой, соответствующая вращению цилиндров в одну сторону, имеет в качестве асимптоты прямую $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$ (это свойство имеет в действительности общий характер и не связано с малостью h). Увеличению числа Рейнольдса для заданного типа движения отвечает перемещение вверх по прямой, выходящей из начала координат и отвечающей данному значению Ω_1/Ω_2. На правой части диаграммы все такие прямые, для которых $\Omega_2 R_2^2/\Omega_1 R_1^2 > 1$ нигде не пересекают границы области неустойчивости. Напротив, при $\Omega_2 R_2^2/\Omega_1 R_1^2 < 1$ и достаточном увеличении числа Рейнольдса мы всегда попадем в область неустойчивости — в согласии с условием (27.3). На левой части диаграммы

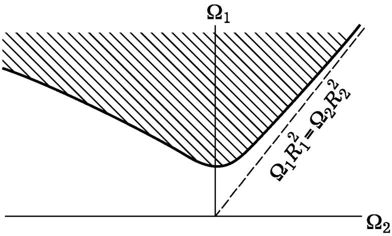


Рис. 15

(Ω_1 и Ω_2 имеют различные знаки) всякая прямая, проведенная из начала координат, пересекает границу заштрихованной области, т. е. при достаточном увеличении числа Рейнольдса стационарное движение в конце концов теряет устойчивость при любом отношении $|\Omega_2/\Omega_1|$ — снова в согласии с полученными выше результатами. При $\Omega_2 = 0$ (вращается только внутренний цилиндр) неустойчивость наступает при числе Рейнольдса (определенном

как $\mathrm{R} = h\Omega_1 R_1/\nu$), равном

$$\mathrm{R}_{\text{кр}} = 41{,}3\sqrt{\frac{R}{h}}. \tag{27.5}$$

Отметим, что в рассматриваемом движении вязкость оказывает стабилизирующее влияние: движение, устойчивое при $\nu = 0$, остается устойчивым и при учете вязкости; движение же, неустойчивое при $\nu = 0$, может оказаться устойчивым для вязкой жидкости.

Неосесимметричные возмущения движения между вращающимися цилиндрами не исследованы систематически. Результаты расчетов частных случаев дают основание считать, что на правой стороне диаграммы рис. 15 наиболее опасными всегда остаются осесимметричные возмущения. Напротив, на левой стороне диаграммы, при достаточно больших значениях $|\Omega_2/\Omega_1|$, учет неосесимметричных возмущений, по-видимому, несколько изменяет форму граничной кривой. При этом вещественная часть частоты возмущения не обращается в нуль, так что возникающее движение нестационарно; это существенно меняет характер неустойчивости.

Предельным (при $h \to 0$) случаем движения между вращающимися цилиндрами является движение жидкости между двумя движущимися друг относительно друга параллельными плоскостями (см. § 17). Это движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых значениях числа $\mathrm{R} = hu/\nu$ (u — относительная скорость плоскостей).

§ 28. Устойчивость движения по трубе

Совершенно особым характером потери устойчивости обладает стационарное течение жидкости по трубе (рассмотренное в § 17).

Ввиду однородности потока вдоль оси x (вдоль длины трубы) невозмущенное распределение скоростей $\mathbf{v}_0$ не зависит от координаты x. Аналогично изложенному в предыдущем параграфе мы можем поэтому искать решения уравнений (26.4) в виде

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(kx-\omega t)}\mathbf{f}(y,\, z). \tag{28.1}$$

И здесь будет существовать такое значение $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$, при котором $\gamma = \operatorname{Im}\omega$ впервые обращается при некотором значении k в нуль. Существенно, однако, что вещественная часть функции $\omega(k)$ теперь уже отнюдь не будет равна нулю.

Для значений R, лишь немного превышающих $\mathrm{R}_{\text{кр}}$, интервал значений k, в котором $\gamma(k) > 0$, мал и расположен вокруг точки,

в которой $\gamma(k)$ имеет максимум, т. е. $d\gamma/dk = 0$ (как это ясно из рис. 16). Пусть в некотором участке потока возникает слабое возмущение; оно представляет собой волновой пакет, получающийся путем наложения ряда компонент вида (28.1). С течением времени будут усиливаться те из этих компонент, для которых: $\gamma(k) > 0$; остальные же компоненты затухнут. Возникающий таким образом усиливающийся волновой пакет будет в то же время «сноситься» вниз по течению со скоростью, равной групповой скорости пакета $d\omega/dk$ (§ 67); поскольку речь идет теперь о волнах со значениями волновых векторов в малом интервале вокруг точки, в которой $d\gamma/dk = 0$, то величина

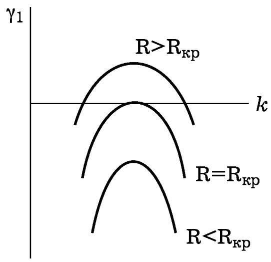


Рис. 16

$$\frac{d\omega}{dk} \approx \frac{d}{dk}\,\mathrm{Re}\,\omega \tag{28.2}$$

вещественна и потому действительно представляет собой истинную скорость распространения пакета.

Этот снос возмущений вниз по течению весьма существен и придает всему явлению потери устойчивости совершенно иной характер по сравнению с тем, который был описан в § 27.

Поскольку положительность $\mathrm{Im}\,\omega$ сама по себе означает теперь лишь усиление перемещающегося вниз по течению возмущения, то открываются две возможности. В одном случае, несмотря на перемещение волнового пакета, возмущение неограниченно возрастает со временем в любой фиксированной в пространстве точке потока; такую неустойчивость по отношению к сколь угодно малым возмущениям будем называть *абсолютной*. В другом же случае пакет сносится так быстро, что в каждой фиксированной точке пространства возмущение стремится при $t \to \infty$ к нулю; такую неустойчивость будем называть *сносовой*, или *конвективной* [1]). Для пуазейлевого течения, по-видимому, имеет место второй случай (см. ниже примеч. на с. 150).

Следует сказать, что различие между обоими случаями имеет относительный характер в том смысле, что зависит от выбора системы отсчета, по отношению к которой рассматривается неустойчивость: конвективная в некоторой системе неустойчивость становится абсолютной в системе, движущейся «вместе с пакетом», а абсолютная неустойчивость становится конвективной в системе, достаточно быстро «уходящей» от пакета. В данном случае, однако, физический смысл этого различия устанавливается существованием выделенной системы отсчета, по отношению к

[1]) Общий метод, позволяющий установить характер неустойчивости, описан в другом томе этого курса (см. X, § 62).

которой и следует рассматривать неустойчивость — системы, в которой покоятся стенки трубы. Более того, поскольку реальные трубы имеют хотя и большую, но конечную длину, возникающее где-либо возмущение может, в принципе, оказаться вынесенным из трубы раньше, чем оно приведет к истинному срыву ламинарного течения.

Поскольку возмущения возрастают с координатой x вниз по течению, а не со временем в заданной точке пространства, то при исследовании этого типа неустойчивости разумно поставить вопрос следующим образом. Предположим, что в заданном месте пространства на поток накладывается непрерывно действующее возмущение с определенной частотой ω, и посмотрим, что будет происходить с этим возмущением при его сносе вниз по течению. Обращая функцию $\omega(k)$, мы найдем, какой волновой вектор k соответствует заданной (вещественной) частоте. Если $\operatorname{Im} k < 0$, то множитель e^{ikx} возрастает с увеличением x, т. е. возмущение усиливается. Кривая в плоскости $\omega\mathrm{R}$, определяемая уравнением $\operatorname{Im} k(\omega, \mathrm{R}) = 0$ (ее называют кривой *нейтральной устойчивости* или просто *нейтральной кривой*) дает границу устойчивости, разделяя для каждого R области значений частоты возмущений, усиливающихся или затухающих вниз по течению.

Фактическое проведение вычислений чрезвычайно сложно. Полное исследование было произведено аналитическими методами лишь для плоского пуазейлевого течения — течения между двумя параллельными плоскостями (*C.C. Lin*, 1945). Укажем здесь результаты такого исследования [1]).

Течение (невозмущенное) между плоскостями однородно не только вдоль направления своей скорости (ось x), но и во всей плоскости xz (ось y перпендикулярна плоскостям). Поэтому можно искать решения уравнений (26.4) в виде

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}\mathbf{f}(y) \tag{28.3}$$

с волновым вектором k в произвольном направлении в плоскости xz. Нас, однако, интересуют лишь те возрастающие возмущения, которые появляются (при увеличении R) первыми; именно они определяют границу устойчивости. Можно показать, что при заданной величине волнового вектора первым становится незатухающим возмущение с $\mathbf{k}$ вдоль оси x, причем $f_z = 0$. Таким образом, достаточно рассматривать только двумерные (как и

[1]) См. книгу: *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ, 1958 [*Lin C.C.* The theory of hydrodynamic stability. — Cambridge, 1955]. Изложение этих, а также и более поздних исследований по данному вопросу дано в указанной в примеч. на с. 145 книге Дразина и Рейда.

основное течение) возмущения в плоскости xy, не зависящие от координаты z [1]).

Нейтральная кривая для течения между плоскостями изображена схематически на рис. 17. Заштрихованная область внутри кривой — область неустойчивости [2]). Наименьшее значение R, при котором появляются незатухающие возмущения, оказывается равным $\mathrm{R}_{\text{кр}} = 5772$ (по более поздним уточненным расчетам, *S.A. Orszag*, 1971); число Рейнольдса определено здесь как

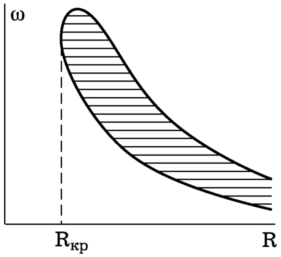


Рис. 17

$$\mathrm{R} = U_{\max} h/(2\nu), \tag{28.4}$$

где $U_{\max}$ — максимальная скорость течения, а $h/2$ — половина расстояния между плоскостями, т. е. расстояние, на котором скорость возрастает от нуля до максимума [3]). Значению $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$ отвечает волновой вектор возмущения $k_{\text{кр}} = 2{,}04/h$. При $\mathrm{R} \to \infty$ обе ветви нейтральной кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс по законам

$$\omega h/U_{\max} \approx \mathrm{R}^{-3/11} \text{ и } \omega h/U_{\max} \approx \mathrm{R}^{-3/7}$$

соответственно для верхней и нижней ветвей; при этом на обеих ветвях ω и k связаны соотношениями вида $\omega h/U \approx (kh)^3$.

Таким образом, для всякой отличной от нуля частоты ω, не превышающей определенного максимального значения ($\sim U/h$), существует конечный интервал значений R, в котором возмущения усиливаются [4]). Интересно, что малая, но конечная вязкость

---

[1]) Доказательство этого утверждения (*H.B. Squire*, 1933) состоит в том, что система уравнений (26.4) для возмущений вида (26.2) может быть приведена к виду, в котором она отличается от уравнений для двумерных возмущений лишь заменой R на $\mathrm{R}\cos\varphi$, где φ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}_0$ (в плоскости xz). Поэтому критическое число $\widetilde{\mathrm{R}}_{\text{кр}}$ для трехмерных возмущений (с заданным k) $\widetilde{\mathrm{R}}_{\text{кр}} = \mathrm{R}_{\text{кр}}/\cos\varphi > \mathrm{R}_{\text{кр}}$, где $\mathrm{R}_{\text{кр}}$ вычислено для двумерных возмущений.

[2]) Нейтральная кривая в плоскости $k\mathrm{R}$ имеет аналогичный вид. Поскольку на нейтральной кривой вещественны как ω, так и k, то эти кривые в обоих плоскостях — это одна и та же зависимость, выраженная в различных переменных.

[3]) В литературе используется также и другое определение R для плоского пуазейлевого течения — как отношения $h\overline{U}/\nu$, где $\overline{U}$ — средняя (по сечению) скорость жидкости. Ввиду равенства $\overline{U} = 2U_{\max}/3$, имеем $h\overline{U}/\nu = 4\mathrm{R}/3$, где R определено согласно (28.4).

[4]) Доказательство конвективного характера неустойчивости плоского пуазейлевого течения дано в статье: *Иорданский С.В.*, *Куликовский А.Г.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 1326. Доказательство, однако, относится лишь к области очень больших значений R, в которой обе ветви нейтральной кривой близки к оси абсцисс, т. е. на обоих ветвях $kh \ll 1$. Для чисел R, при которых на нейтральной кривой $kh \sim 1$, вопрос остается открытым.

жидкости оказывает в данном случае в известном смысле дестабилизирующее влияние на устойчивость по сравнению с тем, что имело бы место для строго идеальной жидкости [1]). Действительно, при $\mathrm{R} \to \infty$ возмущения со всякой частотой затухают; при введении же конечной вязкости мы в конце концов попадем в область неустойчивости, пока дальнейшее увеличение вязкости (уменьшение R) не выведет снова из этой области.

Для течения в трубе кругового сечения полное теоретическое исследование устойчивости еще отсутствует, но имеющиеся результаты дают веские основания полагать, что это движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям (как в абсолютном, так и в конвективном смысле) при любых числах Рейнольдса. В силу аксиальной симметрии основного течения, возмущения можно искать в виде

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(n\varphi + kz - \omega t)}\mathbf{f}(r) \tag{28.5}$$

(как и в (27.4)). Можно считать доказанным, что осесимметричные ($n = 0$) возмущения всегда затухают. Среди исследованных неосесимметричных колебаний (с определенными значениями n в определенных интервалах значений числа Рейнольдса) тоже не оказалось незатухающих. На устойчивость течения в трубе указывает и то обстоятельство, что при очень тщательном устранении возмущений у входа в трубу удается поддерживать ламинарное течение до очень больших значений R (фактически его удавалось наблюдать вплоть до $\mathrm{R} \approx 10^5$, где

$$\mathrm{R} = U_{\max} d/(2\nu) = \overline{U} d/\nu, \tag{28.6}$$

d — диаметр трубы, $U_{\max}$ — скорость жидкости на оси трубы).

Течение между плоскостями и течение в трубе кругового сечения можно рассматривать как предельные случаи течения в трубе кольцевого сечения, т. е. между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями (радиусов R_1 и R_2, $R_2 > R_1$). При $R_1 = 0$ мы возвращаемся к трубе кругового сечения, а пределу $R_1 \to R_2$ отвечает течение между плоскостями. По-видимому, критическое число $\mathrm{R}_{\text{кр}}$ существует при всех отличных от нуля значениях отношения $R_1/R_2 < 1$, а при $R_1/R_2 \to 0$ оно стремится к бесконечности.

Для всех этих пуазейлевых течений существует также критическое число $\mathrm{R}'_{\text{кр}}$, определяющее границу устойчивости по отношению к возмущениям конечной интенсивности. При $\mathrm{R} < \mathrm{R}'_{\text{кр}}$ в трубе вообще не может существовать незатухающего нестационарного движения. Если в каком-либо участке возникает турбулентность, то при $\mathrm{R} < \mathrm{R}'_{\text{кр}}$ турбулентная область, сносясь вниз

[1]) Это свойство было впервые обнаружено *Гейзенбергом* (*W. Heisenberg*, 1924).

по течению, в то же время сужается, пока не исчезнет совсем; напротив, при $R > R'_{кр}$ она будет с течением времени расширяться, захватывая все больший участок потока. Если возмущения течения непрерывно происходят у входа в трубу, то при $R < R'_{кр}$ они непременно затухнут на некотором расстоянии от входа, сколь бы сильны они не были. Напротив, при $R > R'_{кр}$ движение станет турбулентным на всем протяжении трубы, причем для этого достаточны тем более слабые возмущения, чем больше R. В интервале между $R'_{кр}$ и $R_{кр}$ ламинарное течение метастабильно. Для трубы кругового сечения незатухающая турбулентность наблюдалась уже при $R \approx 1800$, а для течения между параллельными плоскостями — начиная с $R \approx 1000$.

Ввиду «жесткости» срыва ламинарного течения в трубе, он сопровождается скачкообразным изменением силы сопротивления. При течении по трубе при $R > R'_{кр}$ имеется, по существу, два различных закона сопротивления (зависимости силы сопротивления от R) — один для ламинарного и другой для турбулентного течений (см. ниже § 43). При каком бы значении R ни произошел переход одного в другое, сила сопротивления испытывает скачок.

В заключение этого параграфа сделаем еще следующее замечание. Граница устойчивости (нейтральная кривая), полученная для течения в неограниченно длинной трубе, имеет еще и другой смысл. Рассмотрим течение в трубе очень большой (по сравнению с ее шириной), но конечной длины. Пусть на каждом из ее концов поставлены определенные граничные условия — задан профиль скорости (например, можно представить себе концы трубы закрытыми пористыми стенками, создающими однородный профиль); везде, за исключением концевых отрезков трубы, профиль (невозмущенный) скорости можно считать пуазейлевским, не зависящим от x. Для определенной таким образом конечной системы можно поставить задачу об устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям (общий метод установления критерия такой устойчивости, которую называют *глобальной*, описан в X, § 65). Можно показать, что упомянутая выше нейтральная кривая для бесконечной трубы является в то же время границей глобальной устойчивости в конечной трубе, независимо от конкретных граничных условий на ее концах [1]).

§ 29. Неустойчивость тангенциальных разрывов

Движением несжимаемой жидкости, неустойчивым в идеальной жидкости, являются течения, при которых два слоя жидкости двигались бы друг относительно друга, «скользя» один по

[1]) См. *Куликовский А.Г.* // Прикл. мат. и мех. 1968. Т. 32. С. 112.

другому; поверхность раздела между этими двумя слоями жидкости была бы поверхностью *тангенциального разрыва*, на которой скорость жидкости (направленная по касательной к поверхности) испытывала бы скачок (*H. Helmholtz*, 1868; *W. Kelvin*, 1871). В дальнейшем мы увидим, к какой картине фактически осуществляющегося движения приводит эта неустойчивость (§ 35); здесь же проведем доказательство сделанного утверждения.

Рассматривая небольшой участок поверхности разрыва и течение жидкости вблизи него, мы можем считать этот участок плоским, а скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ жидкости по обеим его сторонам постоянными. Не ограничивая общности, можно считать, что одна из этих скоростей равна нулю; этого всегда можно добиться соответствующим выбором системы координат. Пусть $\mathbf{v}_2 = 0$, а $\mathbf{v}_1$ обозначим просто как $\mathbf{v}$; направление $\mathbf{v}$ выберем в качестве оси x, а ось z направим по нормали к поверхности.

Пусть поверхность разрыва испытывает слабое возмущение («рябь»), при котором все величины — координаты точек самой поверхности, давление и скорость жидкости — являются периодическими функциями, пропорциональными $e^{i(kx-\omega t)}$. Рассмотрим жидкость с той стороны от поверхности разрыва, где ее скорость равна $\mathbf{v}$, и обозначим через $\mathbf{v}'$ малое изменение скорости при возмущении. Согласно уравнениям (26.4) (с постоянным $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ и $\nu = 0$) имеем для возмущения $\mathbf{v}'$ следующую систему:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}' = -\frac{\nabla p'}{\rho}.$$

Поскольку $\mathbf{v}$ направлено по оси x, то второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} = -\frac{\nabla p'}{\rho}. \tag{29.1}$$

Если применить к обеим его частям операцию div, то в силу первого уравнения мы получим слева нуль, так что p' должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta p' = 0. \tag{29.2}$$

Пусть $\zeta = \zeta(x,\, t)$ есть смещение вдоль оси z точек поверхности разрыва при возмущении. Производная $\partial\zeta/\partial t$ есть скорость изменения координаты ζ поверхности при заданной координате x. Поскольку нормальная к поверхности разрыва компонента скорости жидкости равна скорости перемещения самой поверхности, то в требуемом приближении имеем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v'_z - v\frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{29.3}$$

(для v'_z надо, конечно, брать ее значение на самой поверхности).

Будем искать p' в виде

$$p' = f(z)e^{i(kx-\omega t)}.$$

Подстановка в (29.2) дает для $f(z)$ уравнение

$$\frac{d^2f}{dz^2} - k^2 f = 0,$$

откуда $f = \text{const}\cdot e^{\pm kz}$. Пусть пространство с рассматриваемой стороны поверхности разрыва (сторона *1*) соответствует положительным z. Тогда мы должны взять $f = \text{const}\cdot e^{-kz}$, так что

$$p_1' = \text{const}\cdot e^{i(kx-\omega t)}e^{-kz}. \tag{29.4}$$

Подставляя это выражение в z-компоненту уравнения (29.1), найдем [1])

$$v_z' = \frac{kp_1'}{i\rho_1(kv-\omega)}. \tag{29.5}$$

Смещение ζ тоже ищем в виде, пропорциональном такому же экспоненциальному множителю $e^{i(kx-\omega t)}$, и получаем из (29.3)

$$v_z' = i\zeta(kv-\omega).$$

Вместе с (29.5) это дает

$$p_1' = -\zeta\frac{\rho_1(kv-\omega)^2}{k}. \tag{29.6}$$

Давление p_2' по другую сторону поверхности выразится такой же формулой, в которой надо теперь положить $v = 0$, и, кроме того, изменить общий знак (соответственно тому, что в этой области $z < 0$ и все величины должны быть пропорциональны e^{kz}, а не e^{-kz}). Таким образом,

$$p_2' = \zeta\frac{\rho_2\omega^2}{k}. \tag{29.7}$$

Мы пишем различные плотности ρ_1 и ρ_2, имея в виду охватить также и случай, когда речь идет о границе раздела между двумя различными несмешивающимися жидкостями.

Наконец, из условия равенства давлений p_1' и p_2' на поверхности разрыва получаем

$$\rho_1(kv-\omega)^2 = -\rho_2\omega^2,$$

откуда находим искомую зависимость между ω и k:

$$\omega = kv\frac{\rho_1 \pm i\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1+\rho_2}.$$

[1]) Случай $kv = \omega$, в принципе возможный, нас не интересует, так как неустойчивость может быть связана только с комплексными, а не вещественными частотами ω.

Мы видим, что ω оказывается комплексной величиной, причем всегда имеются ω с положительной мнимой частью. Таким образом, тангенциальные разрывы неустойчивы — уже по отношению к бесконечно малым возмущениям [1]. В таком виде этот результат относится к сколь угодно малой вязкости. В этом случае не имеет смысла различать неустойчивость сносового типа от абсолютной неустойчивости, поскольку с увеличением k мнимая часть ω неограниченно возрастает, и потому коэффициент усиления возмущения при его сносе может быть сколь угодно велик.

При учете конечной вязкости тангенциальный разрыв теряет свою резкость; изменение скорости от одного до другого значения происходит в слое конечной толщины. Вопрос об устойчивости такого движения в математическом отношении вполне аналогичен вопросу об устойчивости в ламинарном пограничном слое с перегибом в профиле скоростей (§ 41). Экспериментальные данные и численные расчеты показывают, что в данном случае неустойчивость наступает очень рано, возможно даже, что всегда [2].

§ 30. Квазипериодическое движение и синхронизация частот [3]

В последующем изложении (§ 30–32) будет удобным пользоваться определенными геометрическими образами. Для этого введем математическое представление о *пространстве состояний* жидкости, каждая точка которого отвечает определенному распределению (полю) скоростей в ней. Состояниям в близкие моменты времени соответствуют при этом близкие точки [4].

Образом стационарного движения служит точка, а образом периодического движения — замкнутая линия (траектория) в

[1] Если направление волнового вектора k (в плоскости xy) не совпадает с направлением $\mathbf{v}$, а образует с ним угол φ, то в (29.8) v заменится на $v\cos\varphi$; это ясно из того, что невозмущенная скорость входит в исходное линеаризованное уравнение Эйлера только в комбинации $(\mathbf{v}\nabla)$. Очевидно, что и такие возмущения будут неустойчивы.

[2] Численные расчеты устойчивости производились для плоскопараллельных течений с профилем скоростей, меняющихся между двумя значениями $\pm v_0$ по некоторому закону, например, $v = v_0\,\mathrm{th}\,(z/h)$ (роль числа Рейнольдса играет при этом $\mathrm{R} = v_0 h/\nu$). Нейтральная кривая в плоскости $k\mathrm{R}$ оказывается выходящей из начала координат, так что для каждого значения R имеется интервал значений k (возрастающий с увеличением R), для которых течение неустойчиво.

[3] Параграфы 30–32 написаны совместно с М.И. Рабиновичем.

[4] В математической литературе это бесконечномерное функциональное пространство (или конечномерные пространства, которыми оно может быть в некоторых случаях заменено — см. ниже) часто называют фазовым. Мы не пользуемся здесь этим термином во избежание смешения с более конкретным смыслом, который он обычно имеет в физике.

пространстве состояний; о них говорят соответственно как о *предельной точке* или *предельном цикле*. Если эти движения устойчивы, то это значит, что соседние траектории, описывающие процесс установления движения, стремятся (при $t \to \infty$) к предельной точке или предельному циклу.

Предельный цикл (или точка) имеет в пространстве состояний определенную *область притяжения*: начинающиеся в этой области траектории в конце концов выходят на цикл. В этой связи о предельном цикле говорят как об *аттракторе* [1]. Подчеркнем, что для движения жидкости в заданном объеме с определенными граничными условиями (и при заданном значении R) аттрактор может быть не единствен. Возможны ситуации, когда в пространстве состояний существуют различные аттракторы, каждый из которых имеет свою область притяжения. Другими словами, при $R > R_{кр}$ может оказаться более чем один устойчивый режим движения и различные режимы осуществляются в зависимости от способа достижения данного значения R. Подчеркнем, что эти различные устойчивые режимы являются решениями нелинейной (!) системы уравнений движения [2].

Обратимся к изучению явлений, возникающих при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса, после достижения им критического значения и установления рассматривавшегося в § 26 периодического течения. По мере увеличения R наступает в конце концов момент, когда становится неустойчивым и это периодическое движение. Исследование этой неустойчивости должно, в принципе, производиться аналогично изложенному в § 26 способу определения неустойчивости исходного стационарного движения. Роль невозмущенного движения играет теперь периодическое движение $\mathbf{v}_0(r,\, t)$ (с частотой ω_1), а в уравнения движения подставляется $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_2$ — малая поправка. Для $\mathbf{v}_2$ получается снова линейное уравнение, но его коэффициенты являются теперь функциями не только координат, но и времени, причем по времени эти коэффициенты представляют собой периодические функции с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Решение такого уравнения должно разыскиваться в виде

$$\mathbf{v}_2 = \Pi(\mathbf{r},\, t)e^{-i\omega t}, \tag{30.1}$$

где $\Pi(\mathbf{r},\, t)$ — периодическая функция времени (с тем же периодом T_1). Неустойчивость наступает снова при появлении частоты $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$, у которой мнимая часть $\gamma_2 > 0$, а вещественная часть ω_2 определяет новую появляющуюся частоту.

---

[1]) От английского слова attraction — притяжение.

[2]) Такова, например, ситуация при потере устойчивости куэттовским течением; устанавливающееся новое движение фактически зависит от истории процесса, которым цилиндры приводятся во вращение с определенными угловыми скоростями.

За период T_1 возмущение (30.1) меняется в $\mu \equiv e^{-i\omega T_1}$ раз. Этот множитель называют *мультипликатором* периодического движения; он является удобной характеристикой усиления или затухания возмущений этого движения. Периодическому движению непрерывной среды (жидкости) соответствует бесконечное множество мультипликаторов, отвечающих бесконечному числу возможных независимых возмущений. Потеря им устойчивости происходит при числе $\mathrm{R}_{\text{кр}2}$, при котором один или более мультипликаторов по модулю становятся равными 1, т. е. в комплексной плоскости значения μ пересекают единичную окружность. Ввиду вещественности уравнений проходить через эту окружность мультипликаторы могут только комплексно-сопряженными парами, или поодиночке, оставаясь вещественными, т. е. в точках $+1$ или -1. Потеря устойчивости периодическим движением сопровождается определенной качественной перестройкой поведения траекторий в пространстве состояний в окрестности ставшего неустойчивым предельного цикла или, как говорят, своей локальной *бифуркацией*. Характер бифуркации в значительной степени определяется именно тем, в каких точках единичной окружности мультипликаторы ее пересекают [1]).

Рассмотрим бифуркацию при пересечении единичной окружности парой комплексно-сопряженных мультипликаторов вида $\mu = \exp(\mp 2\pi\alpha i)$, где α — иррациональное число. Это приводит к появлению вторичного течения с новой независимой частотой $\omega_2 = \alpha\omega_1$, т. е. в результате возникает некоторое квазипериодическое движение, характеризующееся двумя несоизмеримыми частотами. Геометрическим образом этого движения в пространстве состояний служит траектория в виде незамкнутой намотки на двумерном торе [2]), причем ставший неустойчивым предельный цикл служит образующей тора; частота ω_1 соответствует вращению по образующей тора, частота ω_2 — вращению на торе (рис. 18). Подобно тому, как после появления первого периодического движения течение обладало одной степенью свободы, теперь две величины (фазы) являются произвольными, т. е. движение обладает двумя степенями свободы. Потеря устойчивости периодическим движением, сопровождающаяся «рождением» двумерного тора, типична для гидродинамики.

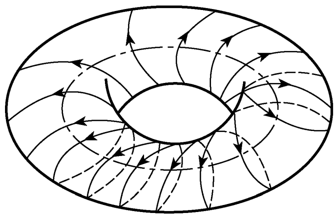


Рис. 18

[1]) Отметим, что мультипликатор не может быть равным нулю: возмущение не может обратиться в нуль за конечное время (один период T_1).

[2]) Мы пользуемся математической терминологией, согласно которой тором называют поверхность без заключенного в ней объема. Так, двумерный тор — двумерная поверхность трехмерного «бублика».

Обсудим гипотетическую картину усложнения течения, возникшего в результате такой бифуркации, при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса, $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}2}$. Естественно было бы предположить, что при последующем увеличении R будут последовательно появляться все новые периоды. На языке геометрических образов это означает потерю устойчивости двумерным тором с возникновением в его окрестности трехмерного тора, затем в результате очередной бифуркации ему на смену придет четырехмерный тор и т. д. Интервалы между числами Рейнольдса, соответствующими появлению новых частот, быстро падают, а появляющиеся движения имеют все меньшие масштабы. Таким образом, движение быстро приобретает сложный и запутанный характер; его называют *турбулентным* в отличие от *ламинарного*, правильного течения, при котором жидкость движется как бы слоями, обладающими различными скоростями.

Полагая сейчас, что такой путь (или, как говорят, сценарий) возникновения турбулентности действительно возможен [1]), напишем общий вид функции $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, зависимость которой от времени определяется некоторым числом N различных частот ω_i. Ее можно рассматривать как функцию N различных фаз ($\varphi_i = \omega_i t + \beta_i$ (и от координат), причем по каждой из них она периодична с периодом 2π. Такая функция может быть представлена в виде ряда

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum \mathbf{A}_{p_1 p_2 \ldots p_N}(\mathbf{r}) \exp\left(-i\sum_{i=1}^{N} p_i\varphi_i\right), \tag{30.2}$$

представляющего собой обобщение (26.13) (суммирование по всем целым числам $p_1, p_2, \ldots, p_N$). Описываемое такой формулой движение обладает N степенями свободы — в него входят N произвольных начальных фаз β_i [2]).

Состояния, фазы которых отличаются только на целое кратное 2π, физически тождественны. Другими словами, все существенно различные значения каждой из фаз лежат в интервале $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi$. Рассмотрим какую-нибудь пару фаз $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ и $\varphi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Пусть в некоторый момент времени фаза φ_1 имеет значение α. Тогда «одинаковые» с α значения фаза φ_1 будет иметь и во все моменты времени

$$t = \frac{\alpha - \beta_1}{\omega_1} + 2\pi s\frac{1}{\omega_1},$$

[1]) Он был выдвинут *Л.Д. Ландау* (1944) и затем независимо *Хопфом* (*E. Hopf*, 1948).

[2]) Если выбрать фазы φ_i в качестве координат, описывающих траекторию на N-мерном торе, то соответствующие скорости будут постоянными величинами: $\dot\varphi_i = \omega_i$. В связи с этим о квазипериодическом движении говорят как о движении на торе с постоянной скоростью.

где s — любое целое число. Фаза φ_2 в эти моменты имеет значения

$$\varphi_2 = \beta_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1}(\alpha - \beta_1 + 2\pi s).$$

Но различные частоты несоизмеримы друг с другом, так что ω_2/ω_1 — иррациональное число. Приводя каждый раз посредством вычитания должного целого кратного от 2π значение φ_2 к интервалу между 0 и 2π, мы получим поэтому, при пробегании числом s значений от 0 до ∞, для φ_2 значения, сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу в этом интервале. Другими словами, в течение достаточно большого промежутка времени φ_1 и φ_2 одновременно пройдут сколь угодно близко к любой паре наперед заданных значений. То же самое относится и ко всем фазам. Таким образом, в рассматриваемой модели турбулентности в течение достаточно долгого времени жидкость проходит через состояния, сколь угодно близкие к любому наперед заданному состоянию, определенному любым возможным набором одновременных значений фаз φ_i. Время возврата, однако, очень быстро растет с увеличением N и становится столь большим, что фактически никакого следа какой-либо периодичности не остается [1].

Подчеркнем теперь, что рассмотренный путь возникновения турбулентности базируется, по существу, на линейных представлениях. Действительно, фактически предполагалось, что при появлении в результате развития вторичных неустойчивостей новых периодических решений уже имевшиеся периодические решения не только не исчезают, но и почти не меняются. В данной модели турбулентное движение есть просто суперпозиция большого числа таких неизменяющихся решений. В общем же случае, однако, характер решений при увеличении числа Рейнольдса и потери ими устойчивости изменяется. Возмущения взаимодействуют друг с другом, причем это может привести как к упрощению движения, так и к его усложнению. Проиллюстрируем первую возможность.

Ограничимся простейшим случаем: будем полагать, что возмущенное решение содержит всего лишь две независимые частоты. Как уже говорилось, геометрическим образом такого течения является незамкнутая намотка на двумерном торе. Возмущение на частоте ω_1, возникшее при $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}1}$, естественно считать в окрестности числа $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}2}$ (при котором возникает возмущение частоты ω_2) более интенсивным и поэтому полагать его неизмен-

[1]) В установившемся турбулентном режиме описанного типа вероятность нахождения системы (жидкости) в заданном малом объеме вокруг избранной точки пространства фаз $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ дается отношением величины этого объема $(\delta\varphi)^N$ к полному объему $(2\pi)^N$. Поэтому можно сказать, что за достаточно большой промежуток времени лишь в течение его доли $e^{-\varkappa N}$ (где $\varkappa = \ln(2\pi/\delta\varphi)$) система будет находиться в окрестности заданной точки.

ным при относительно небольших изменениях числа R в этой окрестности. Имея это в виду, для описания эволюции возмущения с частотой ω_2 на фоне периодического движения частоты ω_1 введем новую переменную

$$a_2(t) = |a_2(t)|e^{-i\varphi_2(t)}; \tag{30.3}$$

модуль $|a_2|$ — кратчайшее расстояние до образующей тора (ставшего неустойчивым предельного цикла частоты ω_1), т. е. относительная амплитуда вторичного периодического течения, а φ_2 — его фаза. Рассмотрим поведение $a_2(t)$ в дискретные моменты времени, кратные периоду $T_1 = 2\pi/\omega_1$. За время одного периода возмущение частоты ω_2 меняется в μ раз, где

$$\mu = |\mu| \exp\left(-2\pi i\omega_2/\omega_1\right)$$

— его мультипликатор; по истечении целого числа τ таких периодов функция a_2 умножится на μ^τ. Мы считаем надкритичность $\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}2}$ малой; тогда инкремент возрастания возмущения тоже мал и, соответственно, разность $|\mu| - 1$ хоть и положительна, но мала, так что за период T_1 возмущение a_2 меняется по модулю незначительно; фаза же φ_2 меняется просто пропорционально τ. Имея все это в виду, можно перейти к рассмотрению дискретной переменной τ как непрерывной и описывать ход изменения функции $a_2(\tau)$ дифференциальным по τ уравнением.

Понятие о мультипликаторе относится к самым малым временам после наступления неустойчивости, когда возмущение еще описывается линейными уравнениями. В этой области функция $a_2(\tau)$ меняется, согласно сказанному, как μ^τ, а ее производная

$$\frac{da_2}{d\tau} = \ln\mu \cdot a_2(\tau),$$

причем для малых надкритичностей:

$$\ln\mu = \ln|\mu| - 2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx |\mu| - 1 - 2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{30.4}$$

Это выражение — первый член разложения $da_2/d\tau$ по степеням a_2 и a_2^*, и при увеличении модуля $|a_2|$ (но пока он все же остается малым) надо учесть следующий член. Член, содержащий тот же осциллирующий множитель $e^{-i\varphi_2}$, есть член третьего порядка: $\sim a_2|a_2|^2$. Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{da_2}{d\tau} = \ln\mu \cdot a_2 - \beta_2 a_2|a_2|^2, \tag{30.5}$$

где β_2 (как и μ) — комплексный параметр, зависящий от R, причем $\operatorname{Re}\beta_2 > 0$ (ср. аналогичные рассуждения в связи с уравнением (26.7)). Вещественная часть этого уравнения сразу определяет стационарное значение модуля:

$$|a_2^{(0)}|^2 = (|\mu| - 1)/\operatorname{Re}\beta_2.$$

Мнимая же часть дает уравнение для фазы $\varphi_2(\tau)$; после установления стационарного значения модуля, оно принимает вид

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1} + \operatorname{Im}\beta_2 \cdot |a_2^{(0)}|^2. \tag{30.6}$$

Согласно этому уравнению фаза φ_2 вращается с постоянной скоростью. Это свойство, однако, связано лишь с рассматриваемым приближением; с ростом надкритичности $\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}2}$ равномерность нарушается и скорость вращения по тору становится сама функцией φ_2. Чтобы учесть это, добавим в правую часть уравнения (30.6) малое возмущение $\Phi(\varphi_2)$; поскольку все физически различные значения φ_2 заключены в одном интервале от 0 до 2π, функция $\Phi(\varphi_2)$ — периодическая с периодом 2π. Далее, аппроксимируем иррациональное отношение ω_2/ω_1 рациональной дробью (это можно сделать со сколь угодной степенью точности) $\omega_2/\omega_1 = m_2/m_1 + \Delta$, где m_1, m_2 — целые числа. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = 2\pi\frac{m_2}{m_1} + \Delta + \operatorname{Im}\beta_2 \cdot |a_2^{(0)}|^2 + \Phi(\varphi_2). \tag{30.7}$$

Будем теперь рассматривать значения фазы лишь в моменты времени, кратные m_1T_1, т. е. при значениях переменной $\tau = m_1\overline{\tau}$, где τ — целое число. Первый член в правой части (30.7) приводит за время m_1T_1 к изменению фазы на $2\pi m_2$, т. е. на целое, кратное 2π, которое можно просто опустить. После этого вся правая часть уравнения оказывается малой величиной, и это позволяет описывать изменение функции $\varphi_2(\overline{\tau})$ дифференциальным уравнением по непрерывной переменной $\overline{\tau}$:

$$\frac{1}{m_1}\frac{d\varphi_2}{d\overline{\tau}} = \Delta + \operatorname{Im}\beta_2 \cdot |a_2^{(0)}|^2 + \Phi(\varphi_2) \tag{30.8}$$

(на одном шаге изменения дискретной переменной $\overline{\tau}$ функция φ_2/m_1 меняется незначительно).

В общем случае уравнение (30.8) имеет стационарные решения $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$, определяющиеся обращением в нуль правой части уравнения. Но неизменность фазы φ_2 в моменты времени, кратные m_1T_1, означает, что на торе существует предельный цикл — траектория через m_1 оборотов замыкается. Ввиду периодичности функции $\Phi(\varphi_2)$ такие решения появляются парами (в простейшем случае — одна пара): одно решение на возрастающем, а другое — на убывающем участках функции $\Phi(\varphi_2)$. Из этих двух решений устойчиво только последнее, для которого вблизи точки $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$ уравнение (30.8) имеет вид

$$\frac{d\varphi_2}{d\overline{\tau}} = -\mathrm{const} \cdot (\varphi_2 - \varphi_2^{(0)})$$

(с коэффициентом const > 0) и действительно имеет решение, стремящееся к $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$; второе же решение неустойчиво (для него const < 0).

Рождение устойчивого предельного цикла на торе означает *синхронизацию* колебаний [1]) — исчезновение квазипериодического и установление нового периодического режима. Это явление, которое в системе со многими степенями свободы может произойти многими способами, препятствует возникновению режима, представляющего собой суперпозицию движений с большим числом несоизмеримых частот. В этом смысле можно сказать, что вероятность реального осуществления именно сценария Ландау–Хопфа очень мала (этим не исключается, конечно, в частных случаях возможность возникновения нескольких несоизмеримых частот прежде, чем произойдет их синхронизация).

§ 31. Странный аттрактор

Исчерпывающей теории возникновения турбулентности в различных типах гидродинамических течений в настоящее время еще не существует. Был выдвинут, однако, ряд возможных сценариев процесса хаотизации движения, основанных главным образом на компьютерном исследовании модельных систем дифференциальных уравнений, и частично подтвержденных реальными гидродинамическими экспериментами. Дальнейшее изложение в этом и следующем параграфах имеет своей целью лишь дать представление об этих идеях, не входя в обсуждение соответствующих компьютерных и экспериментальных результатов. Отметим лишь, что экспериментальные данные относятся к гидродинамическим движениям в ограниченных объемах; именно такие движения мы и будем иметь в виду ниже [2]).

Прежде всего сделаем следующее общее важное замечание. При анализе устойчивости периодического движения интересны лишь те мультипликаторы, которые по модулю близки к 1 — именно они при небольшом изменении R могут пересечь единичную окружность. Для течения вязкой жидкости число таких «опасных» мультипликаторов всегда конечно по следующей причине. Допускаемые уравнениями движения различные типы (моды) возмущений обладают разными пространственными масштабами (т. е. длинами расстояний, на которых существенно меняется скорость $\mathbf{v}_2$). Чем меньше масштаб движения, тем

[1]) По английской терминологии — frequency locking.

[2]) Фактически речь идет о тепловой конвекции в ограниченных объемах и о куэттовском движении между двумя коаксиальными цилиндрами конечной длины. Теоретические представления о механизме турбулизации пограничного слоя и следа за обтекаемым конечным телом в настоящее время еще слабо развиты, несмотря на накопленный значительный экспериментальный материал.

больше градиенты скорости в нем и тем сильнее оно тормозится вязкостью. Если расположить допустимые моды в порядке убывания их масштабов, то опасным может оказаться только некоторое конечное число первых из них; достаточно далекие в этом ряду заведомо окажутся сильно затухающими, т. е. им будут отвечать малые по модулю мультипликаторы. Это обстоятельство позволяет считать, что выяснение возможных типов потери устойчивости периодическим движением вязкой жидкости может производиться по существу так же, как и анализ устойчивости периодического движения диссипативной дискретной механической системы, описываемой конечным числом переменных (в гидродинамическом аспекте этими переменными могут, например, быть амплитуды компонент разложения поля скоростей в ряд Фурье по координатам). Соответственно этому становится конечномерным и пространство состояний.

С математической точки зрения речь идет об исследовании эволюции системы, описываемой уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{31.1}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — вектор в пространстве n величин $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ... , $x^{(n)}$, описывающих систему; функция $\mathbf{F}$ зависит от параметра, изменение которого может приводить к изменению характера движения [1]. Для диссипативной системы дивергенция вектора $\dot{\mathbf{x}}$ в $\mathbf{x}$-пространстве отрицательна, чем выражается сокращение объемов $\mathbf{x}$-пространства при движении [2]:

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}}(t) = \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \partial F^{(i)}/\partial x^{(i)} < 0. \tag{31.2}$$

Вернемся к обсуждению возможных результатов взаимодействия разных периодических движений. Явление синхронизации упрощает движение. Но взаимодействие может разрушить квазипериодичность также и в направлении существенного усложнения картины. До сих пор молчаливо подразумевалось, что при потере устойчивости периодическим движением возникает в дополнение к нему другое периодическое движение. Логически же это вовсе не обязательно. Ограниченность амплитуд пульсаций скорости обеспечивает лишь ограниченность объема пространства состояний, внутри которого располагаются траектории, соответствующие установившемуся режиму течения вязкой жидкости, но как выглядит картина траекторий в этом объеме априори ничего сказать нельзя. Траектории могут стремиться к предельному

[1]) По математической терминологии функцию $\mathbf{F}$ называют векторным полем системы. Если оно не зависит явно от времени (как в (31.1)), систему называют автономной.

[2]) Напомним, что для гамильтоновой механической системы эта дивергенция равна нулю согласно теореме Лиувилля; компонентами вектора x являются при этом обобщенные координаты q и импульсы p системы.

циклу или к незамкнутой намотке на торе (соответственно образам периодического или квазипериодического движений), но могут вести себя и совершенно по-иному — сложно и запутанно. Именно эта возможность чрезвычайно существенна для понимания математической природы и выяснения механизма возникновения турбулентности.

Представить себе сложное и запутанное поведение траекторий внутри ограниченного объема, куда траектории только входят, можно, если предположить, что все траектории в нем неустойчивы. Среди них могут быть не только неустойчивые циклы, но и незамкнутые траектории бесконечно блуждающие внутри ограниченной области, не выходя из нее. Неустойчивость означает, что две сколь угодно близкие точки пространства состояний, передвигаясь в дальнейшем по проходящим через них траекториям, далеко разойдутся; первоначально близкие точки могут относиться и к одной и той же траектории: ввиду ограниченности области незамкнутая траектория может подойти к самой себе сколь угодно близко. Именно такое сложное, нерегулярное поведение траекторий и ассоциируется с турбулентным движением жидкости.

Эта картина имеет еще и другой аспект — чувствительная зависимость течения от малого изменения начальных условий. Если движение устойчиво, то малая неточность в задании начальных условий приведет лишь к аналогичной неточности в определении конечного состояния. Если же движение неустойчиво, то исходная неточность со временем нарастает и дальнейшее состояние системы уже невозможно предвидеть (*Н.С. Крылов*, 1944; *M. Born*, 1952).

Притягивающее множество неустойчивых траекторий в пространстве состояний диссипативной системы действительно может существовать (*E. Lorenz*, 1963); его принято называть *стохастическим*, или *странным аттрактором* [1]).

На первый взгляд, требование о неустойчивости всех траекторий, принадлежащих аттрактору, и требование о том, чтобы все соседние траектории при $t \to \infty$ к нему стремились, кажутся несовместимыми, поскольку неустойчивость означает разбегание траекторий. Это кажущееся противоречие устраняется если учесть, что траектории могут быть неустойчивыми по одним направлениям в пространстве состояний и устойчивыми (т. е. притягивающими) по другим. В n-мерном пространстве

[1]) В отличие от обычных аттракторов (устойчивые предельные циклы, предельные точки и т. п.); название, аттрактора «странный» связано со сложностью его структуры, о которой будет идти речь ниже. В физической литературе термином «странный аттрактор» обозначают и более сложные притягивающие множества, содержащие помимо неустойчивых также и устойчивые траектории, но со столь малыми областями притяжения, что ни в физическом, ни в численном экспериментах их нельзя обнаружить.

состояний траектории, принадлежащие странному аттрактору, не могут быть неустойчивы по всем $(n-1)$-направлениям (одно направление отвечает движению вдоль траектории), так как это означало бы непрерывный рост начального объема в пространстве состояний, что для диссипативной системы невозможно. Следовательно, по одним направлениям соседние траектории стремятся к траекториям аттрактора, а по другим — неустойчивым — от них уходят (рис. 19). Такие траектории называют *седловыми*, и именно множество таких траекторий составляет странный аттрактор.

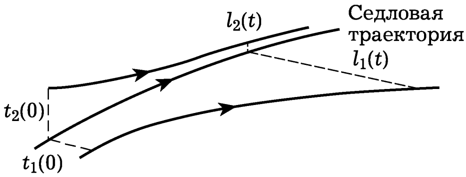


Рис. 19

Странный аттрактор может появиться уже после нескольких бифуркаций возникновения новых периодов: даже сколь угодно малая нелинейность может разрушить квазипериодический режим (незамкнутая обмотка на торе), создав на торе странный аттрактор (*D. Ruelle*, *F. Tokens*, 1971). Это, однако, не может произойти на второй (начиная с разрушения стационарного режима) бифуркации. При этой бифуркации появляется незамкнутая обмотка на двумерном торе. Учет малой нелинейности не разрушает тора, так что странный аттрактор должен был бы быть расположен на нем. Но на двумерной поверхности невозможно существование притягивающего множества неустойчивых траекторий. Дело в том, что траектории в пространстве состояний не могут пересекаться друг с другом (или сами с собой); это противоречило бы причинности поведения классических систем: состояние системы в каждый момент времени однозначно определяет ее поведение в следующие моменты. На двумерной поверхности невозможность пересечений настолько упорядочивает поток траекторий, что его хаотизация невозможна.

Но уже на третьей бифуркации возникновение странного аттрактора становится возможным (хотя и не обязательным!). Такой аттрактор, приходящий на смену трехчастотному квазипериодическому режиму, расположен на трехмерном торе (*S. Newhouse*, *D. Ruelle*, *F. Tokens*, 1978).

Принадлежащие странному аттрактору сложные, запутанные траектории расположены в ограниченном объеме пространства состояний. Классификация возможных типов странных аттракторов, которые могут встретиться в реальных гидродинамических задачах, в настоящее время неизвестна; неясны даже критерии, на которых должна была бы основываться такая классификация. Существующие знания о структуре странных аттракторов основаны в основном лишь на изучении примеров, возникающих при

компьютерном решении модельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, довольно далеких от реальных гидродинамических уравнений. О структуре странного аттрактора можно, однако, высказать некоторые общие суждения, следующие уже из неустойчивости (седлового типа) траекторий и диссипативности системы.

Для наглядности будем говорить о трехмерном пространстве состояний и представлять себе аттрактор расположенным внутри двумерного тора. Рассмотрим пучок траекторий на пути к аттрактору (ими описываются переходные режимы движения жидкости, ведущие к установлению «стационарной» турбулентности). В поперечном сечении пучка траектории (точнее — их следы) заполняют определенную площадь; проследим за изменением величины и формы этой площади вдоль пучка. Учтем, что элемент объема в окрестности седловой траектории в одном из (поперечных) направлений растягивается, а в другом — сжимается; ввиду диссипативности системы сжатие сильнее, чем растяжение — объемы должны уменьшаться. По ходу траекторий эти направления должны меняться — в противном случае траектории ушли бы слишком далеко (что означало бы слишком большое изменение скорости жидкости). Все это приведет к тому, что сечение пучка уменьшится по площади и приобретет сплющенную, и в то же время изогнутую форму. Но этот процесс должен происходить не только с сечением пучка в целом, но и с каждым элементом его площади. В результате сечение пучка разбивается на систему вложенных друг в друга полос, разделенных пустотами. С течением времени (т. е. вдоль пучка траекторий) число полос быстро возрастает, а их ширины убывают. Возникающий в пределе $t \to \infty$ аттрактор представляет собой несчетное множество бесконечного числа не касающихся друг друга слоев — поверхностей, на которых располагаются седловые траектории (своими притягивающими направлениями обращенные «наружу» аттрактора). Своими боковыми сторонами и своими концами эти слои сложным образом соединяются друг с другом; каждая из принадлежащих аттрактору траекторий блуждает по всем слоям и по прошествии достаточно большого времени пройдет достаточно близко к любой точке аттрактора (свойство *эргодичности*). Общий объем слоев и общая площадь их сечений равны нулю.

По математической терминологии, такие множества по одному из направлений относятся к категории *канторовых*. Именно канторовость структуры следует считать наиболее характерным свойством аттрактора и в более общем случае n-мерного ($n > 3$) пространства состояний.

Объем странного аттрактора в своем пространстве состояний всегда равен нулю. Он может, однако, быть ненулевым в дру-

гом пространстве — меньшей размерности. Последнее определяется следующим образом. Разобьем все n-мерное пространство на малые кубики с длиной ребра ε и объемом ε^n. Пусть $N(\varepsilon)$ — минимальное число кубиков, совокупность которых полностью покрывает аттрактор. Определим размерность D аттрактора как предел [1])

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)}. \tag{31.3}$$

Существование этого предела означает конечность объема аттрактора в D-мерном пространстве: при малом ε имеем $N(\varepsilon) \approx \approx V\varepsilon^{-D}$ (где V — постоянная), откуда видно, что $N(\varepsilon)$ можно рассматривать как число D-мерных кубиков, покрывающих в D-мерном пространстве объем V. Определенная согласно (31.3) размерность не может, очевидно, превышать полную размерность n пространства состояний, но может быть меньше его и, в отличие от привычной размерности, может быть дробной; именно такова она для канторовых множеств [2]).

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. Если турбулентное движение уже установилось (течение «вышло на странный аттрактор»), то такое движение диссипативной системы (вязкой жидкости) в принципе не отличается от стохастического движения бездиссипативной системы с меньшей размерностью пространства состояний. Это связано с тем, что для установившегося движения вязкая диссипация энергии в среднем за большое время компенсируется энергией, поступающей от среднего течения (или от другого источника неравновесности). Следовательно, если следить за эволюцией во времени принадлежащего аттрактору элемента «объема» (в некотором пространстве, размерность которого определяется размерностью аттрактора), то этот объем в среднем будет сохраняться — его сжатие в одних направлениях будет в среднем компенсироваться растяжением за счет расходимости близких траекторий в других направлениях. Этим свойством можно воспользоваться, чтобы получить иным способом оценку размерности аттрактора.

Ввиду упомянутой уже эргодичности движения на странном аттракторе, его средние характеристики могут быть установлены путем анализа движения уже вдоль одной принадлежащей аттрактору неустойчивой траектории в пространстве состояний.

---

[1]) Эта величина известна в математике как предельная емкость множества. Ее определение близко к определению так называемой хаусдорфовой (или фрактальной) размерности.

[2]) Покрывающие множество n-мерные кубики могут оказаться «почти пустыми»; именно поэтому может быть $D < n$. Для обычных множеств определение (31.3) дает очевидные результаты. Так, для множества N изолированных точек имеем $N(\varepsilon) = N$ и $D = 0$; для отрезка L линии: $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$, $D = 1$; для площадки S двумерной поверхности: $N(\varepsilon) = S/\varepsilon^2$, $D = 2$, и т. д.

Другими словами, предполагаем, что индивидуальная траектория воспроизводит свойства аттрактора, если двигаться по ней бесконечно долгое время.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$ — уравнение такой траектории, одно из решений уравнений (31.1). Рассмотрим деформацию «сферического» элемента объема при его перемещении вдоль этой траектории. Она определяется уравнениями (31.1), линеаризованными по разности $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)$ — отклонению траекторий, соседних с данной. Эти уравнения, написанные в компонентах, имеют вид

$$\dot{\xi}^{(i)} = A_{ik}(t)\xi^{(k)}, \quad A_{ik}(t) = \left.\frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}}\right|_{x=x_0(t)}. \tag{31.4}$$

При сдвиге вдоль траектории элемент объема в одних направлениях сжимается, в других растягивается и сфера превращается в эллипсоид. По мере движения вдоль траектории как направления полуосей эллипсоида, так и их длины меняются; обозначим последние через $l_s(t)$, где индекс s нумерует направления. *Ляпуновскими характеристическими показателями* называют предельные значения

$$L_s = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{l_s(t)}{l(0)}, \tag{31.5}$$

где $l(0)$ — радиус исходной сферы (в момент времени, условно выбранный как $t = 0$). Определенные таким образом величины — вещественные числа, число которых равно размерности n пространства. Одно из этих чисел (отвечающее направлению вдоль самой траектории) равно нулю [1]).

Сумма ляпуновских показателей определяет среднее вдоль траектории изменение элементарного объема в пространстве состояний. Локальное относительное изменение объема в каждой точке траектории дается дивергенцией $\operatorname{div} \mathbf{x} = \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = A_{ii}(t)$. Можно показать, что среднее вдоль траектории значение дивергенции [2]):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}\, dt = \sum_{s=1}^{n} L_s. \tag{31.6}$$

Для диссипативной системы эта сумма отрицательна — объемы в n-мерном пространстве состояний сжимаются. Размерность же

[1]) Разумеется, решение уравнений (31.4) (с заданными начальными условиями при $t = 0$) фактически описывает соседнюю траекторию лишь до тех пор, пока все расстояния $l_s(t)$ остаются малыми. Это обстоятельство, однако, не лишает смысла определение (31.5), в котором используются сколь угодно большие времена: для всякого большого t можно выбрать настолько малое $l(0)$, что линеаризованные уравнения останутся справедливыми для всего этого времени.

[2]) См.: *Оселедец В.И.* // Тр. Московск. матем. Общества. 1968. Т. 19. С. 179.

странного аттрактора определим таким образом, чтобы в «его пространстве» объемы в среднем сохранялись. Для этого расположим ляпуновские показатели в порядке $L_1 \geqslant L_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant L_n$ и учтем столько устойчивых направлений, сколько надо для компенсации растяжения сжатием. Определенная таким образом размерность аттрактора (обозначим ее через D_L) будет лежать между m и $m+1$, где m — число показателей в указанной последовательности, сумма которых еще положительна, но после прибавления L_{m+1} становится отрицательной [1]). Дробная часть размерности $D_L = m + d$ $(d < 1)$ находится из равенства

$$\sum_{s=1}^{m} L_s + L_{m+1} d = 0 \tag{31.7}$$

(*F. Ledrappier*, 1981). Поскольку при вычислении d учитываются лишь наименее устойчивые направления (отбрасываются наибольшие по абсолютной величине отрицательные показатели L_s в конце их последовательности), то даваемая величиной D_L оценка размерности есть, вообще говоря, оценка сверху. Эта оценка открывает, в принципе, путь для определения размерности аттрактора по экспериментальным измерениям временного хода пульсаций скорости в турбулентном потоке.

§ 32. Переход к турбулентности путем удвоения периодов

Рассмотрим теперь потерю устойчивости периодическим движением путем прохождения мультипликатора через значение -1 или $+1$.

В n-мерном пространстве состояний $n-1$ мультипликаторов определяют поведение траекторий в $n-1$ различных направлениях в окрестности рассматриваемой периодической траектории (отличных от направления касательной в каждой точке самой этой траектории). Пусть близкий к ± 1 мультипликатор отвечает некоторому l-му направлению. Остальные $n-2$ мультипликаторов малы по модулю; поэтому по соответствующим им $n-2$ направлениям все траектории будут со временем прижиматься к некоторой двумерной поверхности (назовем ее Σ), которой принадлежат l-е направление и направление указанных касательных. Можно сказать, что в окрестности предельного цикла пространство состояний при $t \to \infty$ оказывается почти двумерным (строго двумерным оно не может быть — траектории могут располагаться по обе стороны Σ и переходить с одной стороны поверхности на другую). Разрежем поток траекторий вблизи Σ

[1]) Учет равного нулю ляпуновского показателя вносит в размерность D_L вклад $+1$, отвечающий размерности вдоль самой траектории.

некоторой секущей поверхностью σ. Каждая траектория, повторно пересекая σ, ставит в соответствие исходной точке пересечения (назовем ее $\mathbf{x}_j$) точку пересечения в момент следующего возврата $\mathbf{x}_{j+1}$. Связь $\mathbf{x}_{j+1} = f(\mathbf{x}_j;\ \mathrm{R})$ называют *отображением Пуанкаре* (или *отображением последования*); она зависит от параметра R (в данном случае — числа Рейнольдса [1])), значение которого определяет степень близости к бифуркации — потере устойчивости периодическим движением. Поскольку все траектории тесно прижаты к поверхности Σ, множество точек пересечения поверхности σ траекториями оказывается почти одномерным, и его можно приближенно аппроксимировать линией; отображение Пуанкаре станет одномерным преобразованием

$$x_{j+1} = f(x_j;\ R), \tag{32.1}$$

причем x будет просто координатой на указанной линии [2]) . Дискретная переменная j играет роль времени, измеряемого в единицах периода движения.

Отображение (32.1) дает альтернативный способ определения характера течения вблизи бифуркации. Самому периодическому движению отвечает *неподвижная точка* преобразования (32.1) — значение $x_j = x_*$, не меняющееся при отображении, т. е. для которого $x_{j+1} = x_j$. Роль мультипликатора играет производная $\mu = dx_{j+1}/dx_j$, взятая в точке $x_j = x_*$. Точки $x_j = x_* + \xi$ в окрестности x_* в результате отображения переходят в $x_{j+1} \approx \approx x_* + \mu\xi$. Неподвижная точка устойчива (и является аттрактором отображения), если $|\mu| < 1$: повторно применяя (*итерируя*) отображение и начав с какой-либо точки в окрестности точки x_*, мы будем асимптотически приближаться к последней (по закону $|\mu|^r$, где r — число итераций). Напротив, при $|\mu| > 1$ неподвижная точка неустойчива.

Рассмотрим потерю устойчивости периодическим движением при переходе мультипликатора через -1. Равенство $\mu = -1$ означает, что начальное возмущение через интервал времени T_0 меняет знак, не меняясь по абсолютной величине: еще через период T_0 возмущение перейдет само в себя. Таким образом, при переходе μ через значение -1 в окрестности предельного цикла с периодом T_0 возникает новый предельный цикл с периодом $2T_0$ — *бифуркация удвоения периода* [3]) . На рис. 20 условно

---

[1]) Или числа Рэлея, если речь идет о тепловой конвекции (§ 56).

[2]) Обозначение x в этом параграфе не имеет, разумеется, ничего общего с координатой в физическом пространстве!

[3]) В этом параграфе основной период, т. е. период первого периодического движения, обозначаем как T_0 (а не T_1). Критические значения числа Рейнольдса, отвечающие последовательным бифуркациям удвоения периода, будем обозначать здесь через R_1, R_2, … , опуская индекс «кр» (число R_1 заменяет прежнее $\mathrm{R}_{\text{кр}2}$).

изображены две последовательные такие бифуркации; на рисунках *а*, *б* сплошными линиями показаны устойчивые циклы периодов $2T_0$, $4T_0$, а штриховыми — ставшие неустойчивыми предыдущие циклы.

Если принять условно неподвижную точку отображения Пуанкаре за точку $x = 0$, то вблизи нее отображение, описывающее бифуркацию удвоения периода можно представить в виде разложения

$$x_{j+1} = -[1 + (\mathrm{R} - \mathrm{R}_1)]x_j + x_j^2 + \beta x_j^3, \tag{32.2}$$

где $\beta > 0$ [1]). При $\mathrm{R} < \mathrm{R}_1$ неподвижная точка $x_* = 0$ устойчива, а при $\mathrm{R} > \mathrm{R}_1$ — неустойчива. Чтобы увидеть, как происходит удвоение периода, надо итерировать отображение (32.2) дважды, т. е. рассмотреть его за два шага (две единицы времени) и определить неподвижные точки вновь полученного отображения; если они существуют и устойчивы, то они и отвечают циклу удвоенного периода.

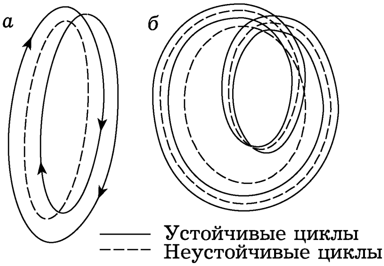


Рис. 20

Двукратная итерация преобразования (32.2) приводит (с нужной точностью по малым величинам x_j и $\mathrm{R} - \mathrm{R}_1$) к отображению

$$x_{j+2} = x_j + 2(\mathrm{R} - \mathrm{R}_1)x_j - 2(1 + \beta)x_j^3. \tag{32.3}$$

Оно всегда имеет неподвижную точку $x_* = 0$. При $\mathrm{R} < \mathrm{R}_1$ эта точка единственна и устойчива (мультипликатор $|dx_{j+2}/dx_j| < 1$); для движения с периодом 1 (в единицах T_0) интервал времени 2 — тоже период. При $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1$ мультипликатор обращается в $+1$ и при $\mathrm{R} > \mathrm{R}_1$ точка $x_* = 0$ становится неустойчивой. В этот момент рождается пара устойчивых неподвижных точек

$$x_*^{(1),\,(2)} = \pm\left[\frac{\mathrm{R} - \mathrm{R}_1}{1 + \beta}\right]^{1/2}, \tag{32.4}$$

которые и соответствуют устойчивому предельному циклу удвоенного периода [2]); преобразование (32.3) оставляет каждую из этих точек на месте, а преобразование (32.2) переводит каждую из них в другую. Подчеркнем, что цикл единичного периода при

---

[1]) Коэффициент при $\mathrm{R} - \mathrm{R}_1$ может быть обращен в единицу соответствующим переопределением R, а коэффициент при x_j^2 обращен в $+1$ переопределением x_j (что и предполагается в (32.2)).

[2]) Или, как мы будем говорить для краткости, 2-*циклу*. Относящиеся к нему неподвижные точки будем называть *элементами цикла*.

описанной бифуркации не исчезает — он остается решением уравнений движения, но неустойчивым.

Вблизи бифуркации движение остается еще «почти периодическим» с периодом 1: точки последовательных возвратов траектории $x_*^{(1)}$ и $x_*^{(2)}$ близки друг к другу. Интервал $x_*^{(1)} - x_*^{(2)}$ между ними является мерой амплитуды колебаний с периодом 2; она растет с надкритичностью как $(\mathrm{R} - \mathrm{R}_1)^{1/2}$ — аналогично закону (26.10) возрастания амплитуды периодического движения после его возникновения в точке потери устойчивости стационарным движением.

Многократное повторение бифуркаций удвоения периода открывает один из возможных путей возникновения турбулентности. В этом сценарии число бифуркаций бесконечно, причем они следуют друг за другом (по мере увеличения R) через все убывающие интервалы; последовательность критических значений R_1, R_2, ... стремится к конечному пределу, за которым периодичность исчезает вовсе и в пространстве возникает сложный апериодический аттрактор, ассоциируемый в этом сценарии с возникновением турбулентности. Мы увидим, что этот сценарий обладает замечательными свойствами универсальности и масштабной инвариантности (*M.J. Feigenbaum*, 1978) [1]).

Излагаемая ниже количественная теория исходит из предпосылки, что бифуркации следуют друг за другом (при увеличении R) настолько быстро, что даже в промежутках между ними занимаемая множеством траекторий область пространства состояний остается почти двумерной, и вся последовательность бифуркаций может быть описана одномерным отображением Пуанкаре, зависящим от одного параметра.

Выбор рассматриваемого ниже отображения естествен в силу следующих соображений. В значительной части интервала изменения переменной x отображение должно быть «растягивающим», $|df(x;\lambda)/dx| > 1$, это дает возможность возникновения неустойчивостей. Отображение должно также возвращать траектории, выходящие за границы некоторого интервала, обратно в него; противное означало бы неограниченное возрастание амплитуд пульсаций скорости, что невозможно. Обоим этим требованиям вместе могут удовлетворять лишь немонотонные функции $f(x;\lambda)$, т. е. не взаимнооднозначные отображения (32.1): значение x_{j+1} однозначно определяется предшествующим значением x_j, но не наоборот. Простейший вид такой функции — функция

[1]) Последовательность бифуркаций удвоения периода (нумеруемых далее порядковыми номерами 1, 2, ...) не обязательно должна начинаться с первой же бифуркации периодического движения. Она может, в принципе, начаться и после нескольких первых бифуркаций с возникновением несоизмеримых частот, после их синхронизации за счет рассмотренного в § 30 механизма.

с одним максимумом; в окрестности максимума положим

$$x_{j+1} = f(x_j;\, \lambda) = 1 - \lambda x_j^2, \tag{32.5}$$

где λ — положительный параметр, который надо рассматривать (в гидродинамическом аспекте) как возрастающую функцию R [1]. Примем условно отрезок $[-1, +1]$ как интервал изменения величины x; при λ между 0 и 2 все итерации отображения (32.5) оставляют x в этом же интервале.

Преобразование (32.5) имеет неподвижную точку — корень уравнения $x_* = 1 - \lambda x_*^2$. Эта точка становится неустойчивой при $\lambda > \Lambda_1$, где Λ_1 — значение параметра λ, для которого мультипликатор $\mu = -2\lambda x_* = -1$; из двух написанных уравнений находим $\Lambda_1 = 3/4$. Это — первое критическое значение параметра λ, определяющее момент первой бифуркации удвоения периода: появления 2-цикла. Проследим за появлением последующих бифуркаций с помощью приближенного приема, позволяющего выяснить некоторые качественные особенности процесса, хотя и не дающего точных значений характерных констант; затем будут сформулированы точные утверждения.

Повторив преобразование (32.5) дважды, получим

$$x_{j+2} = 1 - \lambda + 2\lambda^2 x_j^2 - \lambda^3 x_j^4. \tag{32.6}$$

Пренебрежем здесь последним слагаемым — четвертой степени по x_j. Оставшееся равенство масштабным преобразованием [2]

$$x_j \to x_j/\alpha_0, \quad \alpha_0 = 1/(1-\lambda)$$

приводится к виду

$$x_{j+2} = 1 - \lambda_1 x_j^2,$$

отличающемуся от (32.5) лишь заменой параметра λ на

$$\lambda_1 = \varphi(\lambda) \equiv 2\lambda^2(\lambda - 1). \tag{32.7}$$

---

[1]) Подчеркнем, что допустимость не взаимно-однозначных отображений связана с приближенностью одномерного рассмотрения. Если бы все траектории располагались строго на одной поверхности Σ (так что отображение Пуанкаре было бы строго одномерным), подобная неоднозначность была бы невозможна: она означала бы пересечение траекторий (две траектории с различными x_j пересекались бы в точке x_{j+1}). В этом же смысле следствием приближенности является возможность обращения в нуль мультипликатора — если неподвижная точка отображения расположена в экстремуме отображающей функции (такая точка может быть названа «сверхустойчивой» — приближение к ней происходит по закону более быстрому, чем указанный выше).

[2]) Это преобразование невозможно при значении $\lambda = 1$ (при котором неподвижная точка отображения (32.6) совпадает с центральным экстремумом: $x_* = 0$). Это значение, однако, заведомо не является интересующим нас следующим критическим значением Λ_2.

Повторяя эту операцию с масштабными множителями $\alpha_1 = 1/(1-\lambda_1)$ ..., получим ряд последовательных отображений того же вида:

$$x_{j+2^m} = 1 - \lambda_m x_j^2, \quad \lambda_m = \varphi(\lambda_{m-1}). \tag{32.8}$$

Неподвижные точки отображений (32.8) отвечают 2^m-циклам [1]. Поскольку все эти отображения имеют тот же вид, что и (32.5), то можно сразу заключить, что 2^m-циклы ($m = 1, 2, 3, \dots$) становятся неустойчивыми при $\lambda_m = \Lambda_1 = 3/4$. Соответствующие же критические значения Λ_m исходного параметра λ получаются путем решения цепочки уравнений

$$\Lambda_1 = \varphi(\Lambda_2), \quad \Lambda_2 = \varphi(\Lambda_3), \dots, \Lambda_{m-1} = \varphi(\Lambda_m);$$

графически они даются построением, показанным на рис. 21. Очевидно, что при $m \to \infty$ последовательность этих чисел сходится к конечному пределу Λ_∞ — корню уравнения $\Lambda_\infty = \varphi(\Lambda_\infty)$; он равен $\Lambda_\infty = (1+\sqrt{3})/2 = 1{,}37$. К конечному пределу стремятся и масштабные множители: $\alpha_m \to \alpha$, где $\alpha = 1/(1-\Lambda_\infty) = -2{,}8$.

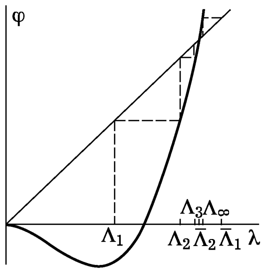


Рис. 21

Легко найти закон, по которому происходит приближение Λ_m к Λ_∞ при больших m. Из уравнения $\Lambda_m = \varphi(\Lambda_{m+1})$ при малых разностях $\Lambda_\infty - \Lambda_m$ находим

$$\Lambda_\infty - \Lambda_{m+1} = \frac{1}{\delta}(\Lambda_\infty - \Lambda_m), \tag{32.9}$$

где $\delta = \varphi'(\Lambda_\infty) = 4+\sqrt{3} = 5{,}73$. Другими словами, $\Lambda_\infty - \Lambda_m \propto \delta^m$, т. е. значения Λ_m приближаются к пределу по закону геометрической прогрессии. По такому же закону меняются интервалы между последовательными критическими числами: (32.9) можно переписать в эквивалентном виде

$$\Lambda_{m+2} - \Lambda_{m+1} = \frac{1}{\delta}(\Lambda_{m+1} - \Lambda_m). \tag{32.10}$$

В гидродинамическом аспекте, как уже указывалось, параметр λ надо рассматривать как функцию числа Рейнольдса, соответственно чему появляются критические значения последнего, отвечающие последовательным бифуркациям удвоения периода и стремящиеся к конечному пределу R_∞. Очевидно, что

[1]) Во избежание недоразумений подчеркнем, что после произведенных масштабных преобразований отображения (32.8) должны быть определены теперь на растянутых интервалах $|x| \leqslant |\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}|$ (а не на $|x| \leqslant 1$, как в (32.5), (32.6)). Однако в силу сделанных пренебрежений выражения (32.8) могут фактически описывать лишь область вблизи центральных экстремумов отображающих функций.

для этих значений справедливы те же предельные законы (32.9), (32.10) (с той же постоянной δ), что и для чисел Λ_m.

Изложенные рассуждения иллюстрируют происхождение основных закономерностей процесса: бесконечное множество бифуркаций, моменты появления которых сходятся к пределу Λ_∞ по закону (32.9), (32.10); появление масштабного множителя α. Полученные при этом значения характерных констант, однако, не точны. Точные значения (полученные путем многократного компьютерного итерирования отображения (32.5)) показателя сходимости δ (*число Фейгенбаума*) и масштабного множителя α:

$$\delta = 4{,}6692\ \ldots\ , \quad \alpha = -2{,}5029\ \ldots \qquad (32.11)$$

а предельное значение $\Lambda_\infty = 1{,}401$ [1]). Обратим внимание на сравнительно большое значение δ; быстрая сходимость приводит к тому, что предельные законы хорошо выполняются уже после небольшого числа удвоений периода.

Дефект произведенного вывода состоит и в том, что после пренебрежения всеми степенями x_j^2, кроме первой, отображение (32.8) позволяет установить лишь факт возникновения следующей бифуркации, но не дает возможности определить все элементы описываемого этим отображением 2^m-цикла [2]). В действительности итерированные отображения (32.5) представляют собой полиномы по x_j^2, степень которых при каждой итерации возрастает вдвое. Они представляют собой сложные функции от x_j с быстро возрастающим числом экстремумов, симметрично расположенных по отношению к точке $x_j = 0$ (которая тоже всегда остается экстремумом).

Замечательно, что не только значения δ и α, но и предельный вид самого бесконечно кратно итерированного отображения оказываются в определенном смысле независящими от вида начального отображения $x_{j+1} = f(x_j;\ \lambda)$: достаточно, чтобы зависящая от одного параметра функция $f(x;\ \lambda)$ была гладкой функцией с одним квадратичным максимумом (пусть это будет в точ-

---

[1]) Значение Λ_∞ имеет несколько условный характер, поскольку оно зависит от способа введения параметра в исходное отображение — функцию $f(x;\ \lambda)$ (значения же δ и α от этого не зависят вовсе).

[2]) То есть все 2^m точки $x_*^{(1)}$, $x_*^{(2)}$, ..., переходящие последовательно друг в друга (периодические) при итерациях отображения (31.5) и неподвижные (и устойчивые) по отношению к 2^m-кратно итерированному отображению. Отметим, во избежание возможных вопросов, что производные dx_{j+2^m}/dx_j во всех точках $x_*^{(1)}$, $x_*^{(2)}$, ... автоматически одинаковы (и потому одновременно проходят через -1 в момент следующей бифуркации); мы не будем приводить здесь рассуждений, использующих правило дифференцирования функции от функции, доказывающих это свойство (необходимость которого заранее очевидна).

ке $x = 0$); она не обязана даже быть симметричной относительно этой точки вдали от нее. Это свойство *универсальности* существенно увеличивает степень общности излагаемой теории. Его точная формулировка состоит в следующем.

Рассмотрим отображение, задаваемое функцией $f(x)$ (функция $f(x;\,\lambda)$ с определенным выбором λ — см. ниже), нормированной условием $f(0) = 1$. Применив его дважды, получим функцию $f(f(x))$. Изменим масштаб как самой этой функции, так и переменной x в $\alpha_0 = l/f(1)$ раз; таким образом получим новую функцию

$$f_1(x) = \alpha_0 f(f(x/\alpha_0)),$$

для которой снова будет $f_1(0) = 1$. Повторяя эту операцию, получим последовательность функций, связанных рекуррентным соотношением [1])

$$f_{m+1}(x) = \alpha_m f_m(f_m(x/\alpha_m)) \equiv \widehat{T} f_m, \;\; \alpha_m = 1/f_m(1). \qquad (32.12)$$

Если эта последовательность стремится при $m \to \infty$ к некоторой определенной предельной функции $f_\infty(x) \equiv g(x)$, эта последняя должна быть «неподвижной функцией» определенного в (32.12) оператора $\widehat{T}$, т. е. должна удовлетворять функциональному уравнению

$$g(x) = \widehat{T} g \equiv \alpha g(g(x/\alpha)), \quad \alpha = 1/g(1), \;\; g(0) = 1. \qquad (32.13)$$

В силу предположенных свойств допустимых функций $f(x)$, функция $g(x)$ должна быть гладкой и иметь квадратичный экстремум в точке $x = 0$; никакого другого следа от конкретного вида $f(x)$ в уравнении (32.13) или в налагаемых на его решение условиях не остается. Подчеркнем, что после произведенных при выводе масштабных преобразований (с $|\alpha_m| > 1$) решение уравнения определяется при всех значениях фигурирующей в нем переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ (а не только на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$). Функция $g(x)$ автоматически является четной по x; она должна быть такой, поскольку среди допустимых функций $f(x)$ имеются четные, а четное отображение заведомо остается четным после любого числа итераций.

Такое решение уравнения (32.13) действительно существует и единственно (хотя и не может быть построено в аналитическом виде); оно представляет собой функцию с бесконечным числом экстремумов, неограниченную по своей величине; постоянная α определяется вместе с самой функцией $g(x)$. Фактически достаточно построить эту функцию на интервале $[-1,\,1]$, после чего она может быть продолжена за его пределы итерированием операции $\widehat{T}$. Обратим внимание на то, что на каждом шаге ите-

[1]) Отметим очевидную аналогию этой процедуры с использованной выше при выводе (32.8).

рирования $\widehat{T}$ в (32.12) значения функции $f_{m+1}(x)$ на интервале $[-1,\ 1]$ определяются значениями функции $f_m(x)$ на сокращенной в $|\alpha_m| \approx |\alpha|$ раз части этого отрезка. Это значит, что в пределе многократных итераций для определения функции $g(x)$ на интервале $[-1,\ 1]$ (а тем самым и на всей оси x) существенны все меньшие и меньшие части исходной функции вблизи ее максимума; в этом и состоит, в конечном итоге, источник универсальности [1]).

Функция $g(x)$ определяет структуру апериодического аттрактора, возникающего в результате бесконечной последовательности удвоений периода. Но это происходит при вполне определенном для функции $f(x;\ \lambda)$ значении параметра $\lambda = \Lambda_\infty$. Ясно поэтому, что функции, образованные из $f(x;\ \lambda)$ путем многократного итерирования преобразования (32.12), действительно сходятся к $g(x)$ лишь при этом изолированном значении λ. Отсюда в свою очередь следует, что неподвижная функция оператора $\widehat{T}$ неустойчива по отношению к ее малым изменениям, отвечающим малым отклонениям параметра λ от значения Λ_∞. Исследование этой неустойчивости дает возможность определения универсальной постоянной δ — снова без всякой связи с конкретным видом функции $f(x)$ [2]).

Масштабный множитель α определяет изменение — уменьшение — геометрических (в пространстве состояний) характеристик аттрактора на каждом шаге удвоений периода; этими характеристиками являются расстояния между элементами предельных циклов на оси x. Поскольку, однако, каждое удвоение сопровождается еще и увеличением числа элементов цикла, это утверждение должно быть конкретизировано и уточнено. При этом заранее ясно, что закон изменения масштаба не может быть одинаковым для расстояний между всякими двумя точками [3]). Дей-

---

[1]) Уверенность в существовании единственного решения уравнения (32.13) основана на компьютерном моделировании. Решение ищется (на интервале $[-1,\ 1]$) в виде полинома высокой степени по x^2; точность моделирования должна быть тем выше, чем до более широкой области значений x (вне указанного отрезка) мы хотели бы затем продолжить функцию итерированием $\widehat{T}$. На интервале $[-1,\ 1]$ функция $g(x)$ имеет один экстремум, вблизи которого $g(x) = 1 - 1{,}528x^2$ (если считать экстремум максимумом; этот выбор условен ввиду инвариантности уравнения (32.13) относительно изменения знака g).

[2]) См. оригинальные статьи: *Feigenbaum M.J.* // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. P. 25; 1979. V. 21. P. 669.

[3]) Имеются в виду расстояния на нерастянутом отрезке $[-1,\ 1]$, условно выбранном с самого начала как интервал изменения x, на котором расположены все элементы циклов. Отрицательность α означает, что при бифуркациях происходит также инверсия расположения элементов относительно точки $x = 0$.

ствительно, если две близкие точки преобразуются через почти линейный участок функции отображения, расстояние между ними уменьшится в $|\alpha|$ раз; если же преобразование происходит через участок функции отображения вблизи ее экстремума — расстояние сократится в α^2 раз.

В момент бифуркации (при $\lambda = \Lambda_m$) каждый элемент (точка) 2^m-цикла расщепляется на пару — две близкие точки, расстояние между которыми постепенно возрастает, но точки остаются ближайшими друг к другу на всем протяжении изменения λ до следующей бифуркации. Если следить за переходами элементов цикла друг в друга с течением времени (т. е. при последовательных отображениях $x_{j+1} = f(x_j;\, \lambda)$), то каждая из компонент пары перейдет в другую через 2^m единиц времени. Это значит, что расстояние между точками пары измеряет амплитуду колебаний вновь возникающего удвоенного периода, и в этом смысле представляет особый физический интерес.

Расположим все элементы 2^{m+1}-цикла в том порядке, в котором они обходятся со временем, и обозначим их как $x_{m+1}(t)$, где время t (измеренное в единицах основного периода T_0) пробегает целочисленные значения $t/T_0 = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2^{m+1}$. Эти элементы возникают из элементов 2^m-цикла расщеплением последних на пары. Интервалы между точками каждой пары даются разностями

$$\xi_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) - x_{m+1}(t + T_m), \tag{32.14}$$

где $T_m = 2^m T_0 = T_{m+1}/2$ — период 2^m-цикла, т. е. половина периода 2^{m+1}-цикла. Введем функцию $\sigma_m(t)$ — масштабный множитель, определяющий изменение интервалов (32.14) при переходе от одного цикла к следующему [1]):

$$\xi_{m+1}(t)/\xi_m(t) = \sigma_m(t). \tag{32.15}$$

Очевидно, что

$$\xi_{m+1}(t + T_m) = -\xi_{m+1}(t), \tag{32.16}$$

и поэтому

$$\sigma_m(t + T_m) = -\sigma_m(t). \tag{32.17}$$

Функция $\sigma_m(t)$ имеет сложные свойства, но можно показать, что ее предельный (при больших m) вид с хорошей точностью

[1]) Поскольку оба цикла существуют в разных интервалах значений параметра λ (на интервалах $(\Lambda_{m-1},\, \Lambda_m)$ и $(\Lambda_m,\, \Lambda_{m+1})$), и на этих интервалах величины (32.14) существенно меняются, то их смысл в определении (32.15) нуждается в уточнении. Будем понимать их при тех значениях параметра λ, когда циклы «сверхустойчивы» (см. примеч. на с. 173); по одному такому значению имеется в области существования каждого цикла.

аппроксимируется простым образом:

$$\sigma_m(t) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{при} \quad 0 < t < T_m/2, \\ 1/\alpha^2 & \text{при} \quad T_m/2 < t < T_m \end{cases} \tag{32.18}$$

(при надлежащем выборе начала отсчета t) [1]).

Эти формулы позволяют сделать некоторые заключения об изменении спектра (частотного) движения жидкости, претерпевающей удвоения периода. В гидродинамическом аспекте величину $x_m(t)$ надо понимать как характеристику скорости жидкости. Для движения с периодом T_m спектр функции $x_m(t)$ (от непрерывного времени t!) содержит частоты $k\omega_m$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) — основную частоту $\omega_m = 2\pi/T_m$ и ее гармоники. После удвоения периода течение описывается функцией $x_{m+1}(t)$ с периодом $T_{m+1} = 2T_m$. Ее спектральное разложение содержит, наряду с теми же частотами $k\omega_m$, еще и субгармоники частоты ω_m — частóты $l\omega_m/2$, $l = 1, 3, 5, \ldots$

Представим $x_{m+1}(t)$ в виде

$$x_{m+1}(t) = \frac{1}{2}\{\xi_{m+1}(t) + \eta_{m+1}(t)\},$$

где ξ_{m+1} — разность (32.14), а

$$\eta_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) + x_{m+1}(t + T_m).$$

Спектральное разложение $\eta_{m+1}(t)$ содержит только частоты $k\omega_m$; компоненты Фурье для субгармоник,

$$\frac{1}{T_{m+1}} \int\limits_0^{T_{m+1}} \eta_{m+1}(t) e^{i\pi lt/T_m}\, dt = \\ = \frac{1}{2T_m} \int\limits_0^{T_m} \{\eta_{m+1}(t) - \eta_{m+1}(t + T_m)\} e^{i\pi lt/T_m}\, dt$$

обращаются в нуль в силу равенства $\eta_{m+1}(t + T_m) = \eta_{m+1}(t)$. С другой стороны, величины $\eta_m(t)$ в первом приближении не меняются при бифуркации: $\eta_{m+1}(t) \approx \eta_m(t)$; это значит, что интенсивность колебаний с частотами $k\omega_m$ тоже остается неизменной.

Спектральное же разложение величин $\xi_{m+1}(t)$ содержит, напротив, только субгармоники $l\omega_m/2$ — новые частоты, появляющиеся на $(m + 1)$-м шаге удвоений. Суммарная интенсивность

[1]) Мы не будем приводить здесь в принципе простого, но громоздкого исследования свойств функции $\sigma_m(t)$. См.: *Фейгенбаум М.* // УФН. 1983. Т. 141, С. 343 [Los Alamos Science. 1980. V. 1. P. 4].

этих спектральных компонент определяется интегралом

$$I_{m+1}\frac{1}{T_{m+1}}\int\limits_0^{T_{m+1}}\xi_{m+1}^2(t)\,dt. \qquad (32.19)$$

Выразив $\xi_{m+1}(t)$ через $\xi_m(t)$, пишем

$$I_{m+1}=\frac{1}{2T_m}2\int\limits_0^{T_m}\sigma_m^2(t)\xi_m^2(t)\,dt.$$

С учетом (32.16)–(32.18) получим

$$I_{m+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}\right)\frac{1}{T_m}\int\limits_0^{T_m}\xi_m^2(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}\right)I_m,$$

и окончательно

$$I_m/I_{m+1}=10{,}8. \qquad (32.20)$$

Таким образом, интенсивность новых спектральных компонент, появляющихся после бифуркации удвоения периода, превышает таковую для следующей бифуркации в определенное, не зависящее от номера бифуркации, число раз (*M.J. Feigenbaum*, 1979) [1]).

Обратимся к изучению эволюции свойств движения при дальнейшем увеличении параметра λ за значением Λ_∞ (числа Рейнольдса $\mathrm{R}>\mathrm{R}_\infty$) — в «турбулентной» области. Поскольку в момент своего рождения (при $\lambda=\Lambda_\infty$) апериодический аттрактор описывается одномерным отображением Пуанкаре, можно считать, что и при значениях λ, незначительно превосходящих Λ_∞, допустимо рассматривать свойства аттрактора в рамках такого отображения.

Аттрактор, возникший в результате бесконечной цепочки удвоений периода, в момент своего рождения не является странным в определенном в § 31 смысле: «2^∞-цикл», возникающий как предел устойчивых 2^m-циклов при $m\to\infty$, тоже устойчив. Точки этого аттрактора образуют на отрезке $[-1,\,1]$ несчетное множество канторового типа. Его мера на этом отрезке (т. е. полная

---

[1]) Это относится не только к суммарной интенсивности появляющихся субгармоник, но и к интенсивности каждой из них. На каждую субгармонику, появляющуюся после m-й бифуркации, приходится по две (по одной справа и слева) субгармоники после $(m+1)$-й бифуркации. Поэтому отношение интенсивностей отдельных новых появляющихся после двух последовательных бифуркаций спектральных пиков вдвое больше величины (32.20). Более точное значение этой величины 10,48. Оно получается путем анализа состояния в самой точке $\lambda=\Lambda_\infty$ с помощью универсальной функции $g(x)$; в этой точке присутствуют уже все частоты и вопрос, подобный указанному в примечании на с. 178 не возникает. См.: *Nanenberg M.*, *Rudnick J.* // Phys. Rev. 1981. V. 24B. P. 493.

«длина» совокупности его элементов) равна нулю; его размерность лежит между 0 и 1 и оказывается равной 0,54 [1]).

При $\lambda > \Lambda_\infty$ аттрактор становится странным — притягивающим множеством неустойчивых траекторий. На отрезке $[-1, 1]$ принадлежащие ему точки заполняют интервалы, общая длина которых отлична от нуля. Эти отрезки — следы на секущей поверхности σ непрерывной двумерной ленты, совершающей большое число оборотов и замыкающейся на себя. Снова напомним в этой связи о приближенности одномерного рассмотрения. В действительности эта лента имеет небольшую, но конечную толщину. Поэтому и составляющие ее сечение отрезки представляют собой в действительности полоски конечной ширины. Вдоль этой ширины странный аттрактор имеет канторову структуру описанного в предыдущем параграфе слоистого характера [2]). Ниже эта структура нас не будет интересовать, и мы возвращаемся к рассмотрению в рамках одномерного отображения Пуанкаре.

Эволюция свойств странного аттрактора при увеличении λ за Λ_∞ состоит в общих чертах в следующем. При заданном значении $\lambda > \Lambda_\infty$ аттрактор заполняет ряд интервалов на отрезке $[-1, 1]$; участки между этими интервалами — области притяжения аттрактора и в них же находятся элементы неустойчивых циклов с периодами, начиная от некоторого 2^m и меньше. При увеличении λ скорость разбегания траекторий на странном аттракторе увеличивается, и он «разбухает», последовательно поглощая циклы периодов 2^m, 2^{m+1}, ... ; при этом число интервалов, занятых аттрактором, уменьшается, а их длины увеличиваются. Другими словами, число витков упомянутой выше ленты последовательно уменьшается вдвое, а их ширины увеличива-

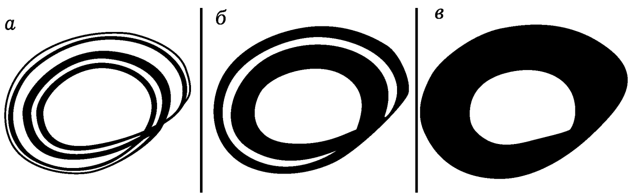


Рис. 22

ются. Таким образом, возникает как бы обратный каскад последовательных упрощений аттрактора. Поглощение аттрактором неустойчивого 2^m-цикла называют *обратной бифуркацией удвоения*. Рисунок 22 иллюстрирует этот процесс для двух послед-

[1]) См. *Grassberger P.* // J. Stat. Phys. 1981. V. 26. P. 173.

[2]) Размерность аттрактора в этом направлении мала по сравнению с единицей. Она, однако, не универсальна и зависит от конкретного вида отображения.

них обратных бифуркаций. На рис. 22 *а* лента совершает четыре оборота, обратная бифуркация превращает ее в ленту с двумя оборотами (рис. 22 *б*): наконец, последняя бифуркация приводит к ленте, совершающей всего один оборот и замыкающейся на себя, предварительно «перекрутившись» (рис. 22 *в*).

Обозначим значения параметра λ, отвечающие последовательным обратным бифуркациям удвоения через $\overline{\Lambda}_{m+1}$, причем они расположены в последовательности $\overline{\Lambda}_m > \overline{\Lambda}_{m+1}$. Покажем, что эти числа удовлетворяют закону геометрической прогрессии с тем же универсальным показателем δ, что и для прямых бифуркаций.

Перед последней (при увеличении λ) обратной бифуркацией аттрактор занимает два интервала, разделенных промежутком, в котором находится неподвижная точка x_* отображения (32.5), отвечающая неустойчивому циклу периода 1:

$$x_* = \frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2\lambda}.$$

Бифуркация произойдет при значении $\lambda = \overline{\Lambda}_1$, когда границы расширяющегося аттрактора достигнут этой точки. Из рис. 22 *б* видно, что внешняя граница аттрактора (ленты) после одного оборота становится его внутренней границей, а еще через оборот — границей интервала, разделяющего витки. Отсюда ясно, что значение $\lambda = \overline{\Lambda}_1$ определяется условием $x_{j+2} = x_*$, где

$$x_{j+2} = 1 - \lambda(1-\lambda)^2$$

есть результат двукратной итерации отображения над точкой $x_j = 1$ — границей аттрактора (это значение $\overline{\Lambda}_1 = 1{,}543$). Моменты предшествующих обратных бифуркаций $\overline{\Lambda}_2, \overline{\Lambda}_3, \ldots$ могут быть приближенно определены одно за другим с помощью рекуррентного соотношения, связывающего $\overline{\Lambda}_{m+1}$ с $\overline{\Lambda}_m$. Это приближенное соотношение выводится тем же способом, которым была рассмотрена выше последовательность прямых бифуркаций удвоения и имеет вид $\overline{\Lambda}_m = \varphi(\overline{\Lambda}_{m+1})$ с той же функцией $\varphi(\Lambda)$ из (32.7). Соответствующее графическое построение показано на верхней части рис. 21. Поскольку функция $\varphi(\Lambda)$ для последовательностей прямых и обратных бифуркаций одна и та же, то одинаков и закон, по которому последовательности чисел Λ_m и $\overline{\Lambda}_m$ сходятся (соответственно снизу и сверху) к общему пределу $\Lambda_\infty \equiv \overline{\Lambda}_\infty$:

$$\overline{\Lambda}_{m+1} - \Lambda_\infty = \frac{1}{\delta}(\overline{\Lambda}_m - \Lambda_\infty). \tag{32.21}$$

Эволюция свойств странного аттрактора при $\lambda > \Lambda_\infty$ сопровождается соответствующими изменениями в частотном спектре интенсивности. Хаотичность движения выражается в спектре

появлением в нем «шумовой» компоненты, интенсивность которой возрастает вместе с шириной аттрактора. На этом фоне присутствуют дискретные пики, отвечающие основной частоте неустойчивых циклов, их гармоникам и субгармоникам; при последовательных обратных бифуркациях исчезают соответствующие субгармоники — в порядке, обратном тому, в котором они появлялись в последовательности прямых бифуркаций. Неустойчивость создающих эти частоты циклов проявляется в уширении спектральных пиков.

Переход к турбулентности через перемежаемость. Рассмотрим, наконец, разрушение периодического движения при прохождении мультипликатора через значение $\mu = +1$.

Этот тип бифуркации описывается (в рамках одномерного отображения Пуанкаре) функцией $x_{j+1} = f(x_j; \mathrm{R})$, которая при определенном значении параметра (числа Рейнольдса), $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$, касается прямой $x_{j+1} = x_j$. Выбрав точку касания в качестве $x_j = 0$, напишем вблизи нее разложение функции отображения в виде [1])

$$x_{j+1} = (\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}}) + x_j + x_j^2. \tag{32.22}$$

При $\mathrm{R} < \mathrm{R}_{\text{кр}}$ (рис. 23) существуют две неподвижные точки

$$x_*^{(1),(2)} = \mp(\mathrm{R}_{\text{кр}} - \mathrm{R})^{1/2},$$

из которых одна ($x_*^{(1)}$) отвечает устойчивому, а другая ($x_*^{(2)}$) — неустойчивому периодическому движению. При $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$ мультипликатор в обеих точках становится равным $+1$, оба периодических движения сливаются и при $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}}$ исчезают (неподвижные точки переходят в комплексную область).

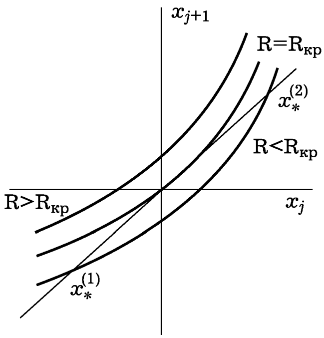


Рис. 23

При малой надкритичности расстояние между линией (32.22) и прямой $x_{j+1} = x_j$ мало (в области вблизи $x_j = 0$). На этом интервале значений x, следовательно, каждая итерация отображения (32.22) лишь незначительно перемещает след траектории, и для прохождения им всего интервала потребуется много шагов. Другими словами, на сравнительно большом промежутке времени траектория в пространстве состояний будет иметь регулярный, почти

[1]) Коэффициент при $\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}}$ и коэффициент (положительный) при x_j^2 можно обратить в единицу соответствующим определением R и x_j, что и предполагается в (32.22).

периодический характер. Такой траектории отвечает в физическом пространстве регулярное (ламинарное) движение жидкости. Отсюда возникает еще один, в принципе возможный, сценарий возникновения турбулентности (*P. Manneville*, *Y. Pomeau*, 1980).

Можно представить себе, что к рассмотренному участку функции отображения примыкают участки, приводящие к хаотизации траекторий; им отвечает в пространстве состояний множество локально неустойчивых траекторий. Это множество, однако, само по себе не является аттрактором и с течением времени точка, изображающая систему, его покидает. При $\mathrm{R} < \mathrm{R}_{\text{кр}}$ траектория выходит на устойчивый цикл, т. е. в физическом пространстве устанавливается ламинарное периодическое движение. При $\mathrm{R} > \mathrm{R}_{\text{кр}}$ устойчивый цикл отсутствует и возникает движение, в котором «турбулентные» периоды чередуются с ламинарными (отсюда название сценария — переход через *перемежаемость*).

О длительности турбулентных периодов нельзя сделать каких-либо общих заключений. Зависимость же длительности ламинарных периодов от надкритичности легко выяснить. Для этого напишем разностное уравнение (32.22) в виде дифференциального. Имея в виду малость изменения x_j на одном шаге отображения, заменим разность $x_{j+1} - x_j$ производной dx/dt по непрерывной переменной t:

$$dx/dt = (\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}}) + x^2. \tag{32.23}$$

Найдем время τ, необходимое для прохождения отрезка между точками x_1 и x_2, лежащими по обе стороны точки $x = 0$ на расстояниях, больших по сравнению с $(\mathrm{R}-\mathrm{R}_{\text{кр}})^{1/2}$, но еще в области применимости разложения (32.22). Имеем

$$\tau = (\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}})^{-1/2} \operatorname{arctg} [x(\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}})^{-1/2}]\big|_{x_1}^{x_2},$$

откуда

$$\tau \sim (\mathrm{R} - \mathrm{R}_{\text{кр}})^{-1/2}, \tag{32.24}$$

чем и определяется искомая зависимость; длительность ламинарных периодов убывает с ростом надкритичности.

В этом сценарии остается открытым как вопрос о пути подхода к его началу, так и вопрос о природе возникающей турбулентности.

§ 33. Развитая турбулентность

Турбулентное движение жидкости при достаточно больших значениях числа Рейнольдса характерно чрезвычайно нерегулярным, беспорядочным изменением скорости со временем в каждой точке потока (*развитая турбулентность*); скорость все время

пульсирует около некоторого своего среднего значения. Такое же нерегулярное изменение скорости имеет место от точки к точке потока, рассматриваемого в заданный момент времени. В настоящее время полной количественной теории развитой турбулентности еще не существует. Известен, однако, ряд важных качественных результатов, изложению которых и посвящен настоящий параграф.

Введем понятие о средней скорости движения, получающейся в результате усреднения по большим промежуткам времени истинной скорости в каждой точке пространства. При таком усреднении нерегулярность изменения скорости сглаживается и средняя скорость оказывается плавно меняющейся вдоль потока функцией. Мы будем в дальнейшем обозначать среднюю скорость буквой $\mathbf{u}$. Разность $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ между истинной и средней скоростями, обнаруживающую характерное для турбулентности нерегулярное изменение, мы будем называть *пульсационной* частью скорости.

Рассмотрим подробнее характер накладывающегося на усредненный поток нерегулярного, пульсационного, движения. Это движение можно в свою очередь качественно рассматривать как результат наложения движений (*турбулентных пульсаций*) различных, как мы будем говорить, масштабов (под масштабом движения подразумевается порядок величины тех расстояний, на протяжении которых существенно меняется скорость движения). По мере возрастания числа Рейнольдса появляются сначала крупномасштабные пульсации; чем меньше масштаб движения тем позже такие пульсации появляются. При очень больших числах Рейнольдса в турбулентном потоке присутствуют пульсации с масштабами от самых больших до очень малых. Основную же роль в турбулентном потоке играют крупномасштабные пульсации, масштаб которых — порядка величины характеристических длин, определяющих размеры области, в которой происходит турбулентное движение; в дальнейшем будем обозначать порядок величины этого *основного* (или *внешнего*) масштаба турбулентного движения посредством l. Эти крупномасштабные движения обладают наибольшими амплитудами. Их скорость по порядку величины сравнима с изменениями Δu средней скорости на протяжении расстояний l (мы говорим здесь о порядке величины не самой скорости, а ее изменения, поскольку именно оно характеризует скорость турбулентного движения; абсолютная же величина средней скорости может быть произвольной в зависимости от того, в какой системе отсчета рассматривается движение) [1]. Что же касается частот этих крупномасштабных

[1]) В действительности, по-видимому, масштабы основных пульсаций в несколько раз меньше, чем характерные размеры l, а их скорость — в несколько раз меньше, чем Δu.

пульсаций, то они — порядка отношения u/l средней скорости u (а не ее изменения Δu) к размерам l. Действительно, частота определяет период повторяемости картины движения, наблюдаемой из некоторой неподвижной системы отсчета. Но относительно такой системы вся эта картина движется вместе со всей жидкостью со скоростью порядка u.

Мелкомасштабные же пульсации, соответствующие большим частотам, участвуют в турбулентном потоке со значительно меньшими амплитудами. Их можно рассматривать как мелкую детальную структуру, накладывающуюся на основные крупномасштабные турбулентные движения. В мелкомасштабных пульсациях заключена лишь сравнительно малая часть всей кинетической энергии жидкости.

Из описанной картины турбулентного движения можно сделать заключение о характере изменения пульсационной скорости вдоль потока (рассматриваемого в заданный момент времени). На протяжении больших расстояний (сравнимых с l) изменение пульсационной скорости определяется изменением скорости крупномасштабных пульсаций и потому сравнимо по величине с Δu. На малых же (по сравнению с l) расстояниях оно определяется мелкомасштабными пульсациями и потому мало по сравнению с Δu (но велико по сравнению с изменением средней скорости на том же малом расстоянии). Такая же картина имеет место, если наблюдать изменение скорости со временем в заданной точке пространства. На протяжении малых (по сравнению с характеристическим временем $T \sim l/u$) интервалов времени скорость испытывает незначительные изменения; в течение же больших промежутков времени скорость меняется на величины $\sim\Delta u$.

В число Рейнольдса R, определяющее свойства течения жидкости в целом, в качестве характеристических размеров входит длина l. Наряду с таким числом, можно ввести качественное понятие о числах Рейнольдса турбулентных пульсаций различных масштабов. Если λ — масштаб пульсаций, а v_λ — порядок величины их скорости, то $\mathrm{R}_\lambda \sim v_\lambda \lambda/\nu$. Это число тем меньше, чем меньше масштаб движения.

При больших R велики также и числа Рейнольдса R_λ крупномасштабных пульсаций. Но большие числа Рейнольдса эквивалентны малым вязкостям. Отсюда можно заключить, что для крупномасштабного движения, являющегося как раз основным во всяком турбулентном потоке, вязкость жидкости не играет роли. Поэтому в крупномасштабных пульсациях не происходит и заметной диссипации энергии.

Вязкость жидкости становится существенной только для самых мелкомасштабных пульсации, для которых $\mathrm{R}_\lambda \sim 1$ (масштаб λ_0 этих пульсаций будет определен ниже в этом параграфе). Именно в этих мелкомасштабных пульсациях, не существенных

с точки зрения общей картины движения жидкости в турбулентном потоке, и происходит диссипация энергии.

Мы приходим, таким образом, к следующему представлению о диссипации энергии при турбулентном движении (*L. Richardson*, 1922). От пульсаций с бо́льшими масштабами энергия переходит в пульсации с меньшими масштабами, практически не диссипируясь при этом. Можно сказать, что имеется как бы непрерывный поток энергии от крупно- к мелкомасштабным пульсациям, т. е. от малых частот к большим. Этот поток диссипируется, т. е. кинетическая энергия переходит в тепло, в самых мелкомасштабных пульсациях. Разумеется, для поддержания «стационарного» состояния потока необходимо наличие внешних источников энергии, непрерывно передающих ее основному крупномасштабному движению.

Поскольку вязкость жидкости существенна только для самых мелкомасштабных пульсаций, то можно утверждать, что все величины, относящиеся к турбулентному движению в масштабах $\lambda \gg \lambda_0$, не могут зависеть от ν (более точно, эти величины не должны меняться при изменении ν и неизменных остальных условиях, в которых происходит движение). Это обстоятельство сужает круг величин, определяющих свойства турбулентного движения, в результате чего для исследования турбулентности приобретают большое значение соображения подобия, связанные с размерностью имеющихся в нашем распоряжении величин.

Применим такие соображения к определению порядка величины диссипации энергии при турбулентном движении. Пусть ε есть среднее количество энергии, диссипируемой в единицу времени в единице массы жидкости [1]. Мы видели, что эта энергия черпается из крупномасштабного движения, откуда постепенно передается во все меньшие масштабы, пока не диссипируется в пульсациях масштаба $\sim\lambda_0$. Поэтому, несмотря на то, что диссипация обязана в конце концов вязкости жидкости, порядок величины ε может быть определен с помощью одних только величин, характерных для крупномасштабных движений. Таковыми являются плотность жидкости ρ, размеры l и скорость Δu. Из этих трех величин можно составить всего одну комбинацию, обладающую той же размерностью, что и ε, т. е. эрг/(г·с) $=$ см^2/с^3. Таким способом получаем

$$\varepsilon \sim \frac{(\Delta u)^3}{l}, \tag{33.1}$$

чем и определяется порядок величины диссипации энергии в турбулентном потоке.

Турбулентно движущуюся жидкость можно в некоторых отношениях качественно описывать как жидкость, обладающую

[1]) В этой главе буква ε будет обозначать среднюю диссипацию энергии, а не внутреннюю энергию жидкости!

некоторой, как говорят, *турбулентной вязкостью* $\nu_{\text{турб}}$, отличной от истинной кинематической вязкости ν. Характеризуя свойства турбулентного движения, $\nu_{\text{турб}}$ должно по порядку величины определяться величинами ρ, Δu, l. Единственной составленной из них величиной с размерностью кинематической вязкости является $\Delta u \cdot l$, поэтому

$$\nu_{\text{турб}} \sim \Delta u \cdot l. \tag{33.2}$$

Отношение турбулентной вязкости к обычной

$$\nu_{\text{турб}}/\nu \sim \mathrm{R}, \tag{33.3}$$

т. е. растет с числом Рейнольдса [1]).

Диссипация энергии выражается через $\nu_{\text{турб}}$ формулой

$$\varepsilon \sim \nu_{\text{турб}}(\Delta u/l)^2, \tag{33.4}$$

в соответствии с обычным определением вязкости. В то время как ν определяет диссипацию энергии по производным от истинной скорости по координатам, турбулентная вязкость связывает диссипацию с градиентом ($\sim\Delta u/l$) средней скорости движения.

Наконец, укажем, что порядок величины Δp изменения давления на протяжении области турбулентного движения тоже может быть определен из соображений подобия:

$$\Delta p \sim \rho(\Delta u)^2. \tag{33.5}$$

Стоящее справа выражение — единственная величина размерности давления, которую можно составить из ρ, l и Δu.

Перейдем теперь к изучению свойств развитой турбулентности в масштабах λ, малых по сравнению с основным масштабом l. Об этих свойствах говорят как о локальных свойствах турбулентности. При этом мы будем рассматривать жидкость вдали от твердых стенок, — точнее, на расстояниях от них, больших по сравнению с λ.

О такой мелкомасштабной турбулентности вдали от твердых тел можно высказать естественное предположение, что она обладает свойствами однородности и изотропии. Последнее означает, что в участках, размеры которых малы по сравнению с l, свойства турбулентного движения одинаковы по всем направлениям; в частности, они не зависят от направления скорости усредненного движения. Подчеркнем, что здесь и везде ниже в этом параграфе, где говорится о свойствах турбулентного движения в

[1]) В действительности в этом отношении должен стоять еще довольно значительный численный коэффициент. Это связано с указанным выше обстоятельством, что l и Δu могут довольно заметно отличаться от истинных масштабов и скоростей турбулентного движения. Более точно можно написать:

$$\nu_{\text{турб}}/\nu \sim \mathrm{R}/\mathrm{R}_{\text{кр}},$$

где учитывается, что $\nu_{\text{турб}}$ и ν должны в действительности сравниваться не при $\mathrm{R} \sim 1$, а при $\mathrm{R} \sim \mathrm{R}_{\text{кр}}$.

малом участке жидкости, подразумевается относительное движение жидких частиц в этом участке, а не абсолютное движение, в котором принимает участие весь участок в целом и которое связано с движением более крупных масштабов.

Оказывается возможным получить ряд существенных результатов о локальных свойствах турбулентности непосредственно из соображений подобия (*А.Н. Колмогоров*, 1941; *А.М. Обухов*, 1941).

Для этого выясним предварительно, какими параметрами могут вообще определяться свойства турбулентного движения в участках, малых по сравнению с l, но больших по сравнению с расстояниями λ_0, на которых начинает играть роль вязкость жидкости; ниже будет идти речь именно о таких расстояниях. Этими параметрами является плотность ρ жидкости и, кроме того, еще одна характерная для турбулентного потока величина — энергия ε, диссипируемая в единицу времени в единице массы жидкости. Мы видели, что ε представляет собой поток энергии, непрерывно передаваемой от пульсаций с бо́льшими к пульсациям с меньшими масштабами. Поэтому, хотя диссипация энергии и обусловливается в конечном итоге вязкостью жидкости и происходит в самых мелкомасштабных пульсациях, тем не менее величина ε определяет свойства движения и в бо́льших масштабах. Что касается масштабов l и Δu размеров и скорости движения в целом, то естественно считать, что (при заданных ρ и ε) локальные свойства турбулентности от этих величии не зависят. Вязкость жидкости ν тоже не может входить ни в какие интересующие нас теперь величины (напоминаем, что речь идет о расстояниях $\lambda \gg \lambda_0$).

Определим порядок величины v_λ изменения скорости турбулентного движения на протяжении расстояний порядка λ. Оно должно определяться только величиной ε и, разумеется, самим расстоянием [1]) λ. Из этих двух величин можно составить всего одну комбинацию с размерностью скорости: $(\varepsilon\lambda)^{1/3}$. Поэтому можно утверждать, что должно быть

$$v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}. \tag{33.6}$$

Таким образом, изменение скорости на протяжении малого расстояния пропорционально кубическому корню из этого расстояния (*закон Колмогорова–Обухова*). Величину v_λ можно рассматривать и как скорость турбулентных движений масштаба λ: изменение средней скорости на малых расстояниях мало по сравнению с изменением пульсационной скорости на этих же расстояниях, и им можно пренебречь.

---

[1]) Величина ε имеет размерность эрг/(г·с) = см^2/с^3, не содержащую размерности массы; единственной величиной, содержащей размерность массы, является плотность ρ. Поэтому последняя вообще не участвует в составлении величин, размерность которых не содержит размерности массы.

К соотношению (33.6) можно прийти и другим путем, выражая постоянную величину — диссипацию ε — через величины, характеризующие пульсации масштаба λ. При этом ε должно быть пропорционально квадрату градиента скорости v_λ и соответствующему коэффициенту турбулентной вязкости $\nu_{\text{турб}\lambda} \sim \lambda v_\lambda$:

$$\varepsilon \sim \nu_{\text{турб}\lambda}\left(\frac{v_\lambda}{\lambda}\right)^2 \sim \frac{v_\lambda^3}{\lambda},$$

откуда и получается (33.6).

Поставим теперь вопрос несколько иначе. Определим порядок величины v_τ изменения скорости в заданной точке пространства, испытываемого ею в течение промежутка времени τ, малого по сравнению с характеристическим временем $T \sim l/u$ движения в целом. Для этого замечаем, что благодаря наличию общего течения каждый данный участок жидкости в продолжение промежутка времени τ перемещается в пространстве на расстояние порядка произведения τu средней скорости u на время τ. Поэтому в данной точке пространства по истечении времени τ будет находиться участок жидкости, который в начальный момент был удален от этой точки на расстояние $u\tau$. Искомую величину v_τ можно, следовательно, получить, подставляя в (33.6) τu вместо λ:

$$v_\tau \sim (\varepsilon u\tau)^{1/3}. \tag{33.7}$$

От величины v_τ следует отличать изменение v'_τ скорости данного перемещающегося в пространстве участка жидкости. Это изменение может, очевидно, зависеть только от величины ε, определяющей локальные свойства турбулентности, и, разумеется, от величины самого интервала времени τ. Составляя из ε и τ комбинацию размерности скорости, получаем для искомого изменения

$$v'_\tau \sim (\varepsilon\tau)^{1/2}. \tag{33.8}$$

В отличие от изменения скорости в заданной точке пространства оно пропорционально квадратному, а не кубическому корню из τ. Легко видеть, что при $\tau \ll T$ изменение v'_τ всегда меньше изменения v_τ [1]).

С помощью выражения (33.1) для ε можно переписать формулы (33.6), (33.7) в виде

$$\frac{v_\lambda}{\Delta u} \sim \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/3}, \quad \frac{v_\tau}{\Delta u} \sim \left(\frac{\tau}{T}\right)^{1/3}. \tag{33.9}$$

В такой записи ясно видно свойство подобия локальной турбулентности: мелкомасштабные характеристики различных тур-

---

[1]) Неравенство $v'_\tau \ll v_\tau$, по существу, уже подразумевалось при выводе (33.7).

булентных течений отличаются только масштабами измерения длин и скоростей (или, что то же, длин и времен) [1].

Выясним теперь, на каких расстояниях начинает играть роль вязкость жидкости. Эти расстояния λ_0 определяют собой в то же время порядок величины масштабов наиболее мелкомасштабных пульсаций в турбулентном потоке (величину λ_0 называют *внутренним масштабом* турбулентности в противоположность внешнему масштабу l). Для этого составляем «локальное число Рейнольдса»:

$$\mathrm{R}_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \sim \frac{\Delta u \cdot \lambda^{4/3}}{\nu l^{1/3}} \sim \mathrm{R}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3},$$

где $\mathrm{R} \sim \Delta u \cdot l/\nu$ — число Рейнольдса движения в целом. Порядок величины λ_0 определяется тем, что должно быть $\mathrm{R}_{\lambda_0} \sim 1$. Отсюда находим

$$\lambda_0 \sim l/\mathrm{R}^{3/4}. \tag{33.10}$$

К этому же выражению можно прийти, составляя комбинацию размерности длины из величин ε и ν:

$$\lambda_0 \sim (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}. \tag{33.11}$$

Таким образом, внутренний масштаб турбулентности быстро падает при увеличении числа Рейнольдса. Для соответствующей скорости имеем

$$v_{\lambda_0} \sim \Delta u/\mathrm{R}^{1/4}. \tag{33.12}$$

Она тоже падает с увеличением R [2].

Область масштабов $\lambda \sim l$ называют *областью энергии*; в ней сосредоточена основная часть кинетической энергии жидкости. Значения $\lambda \lesssim \lambda_0$ составляют *область диссипации* — в ней происходит диссипация кинетической энергии. При очень больших значениях R обе эти области достаточно раздвинуты друг от друга, и между ними расположен *инерционный интервал*, в котором

$$\lambda_0 \ll \lambda \ll l;$$

к нему относятся излагаемые в этом параграфе результаты.

Закон Колмогорова–Обухова можно представить в эквивалентной спектральной (по пространству) форме. Введем вместо масштабов λ соответствующие «волновые числа» пульсаций $k \sim 1/\lambda$, и пусть $E(k)\,dk$ есть кинетическая энергия (единицы массы жидкости), заключенная в пульсациях со значениями k в заданном интервале dk. Функция $E(k)$ имеет размерность см^3/с^2; составляя комбинацию этой размерности из ε и k, получим

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \tag{33.13}$$

---

[1]) В этой связи в современной литературе широко используется термин *автомодельность* движения (по английской терминологии self-similarity).

[2]) Формулы (33.10)–(33.12) определяют законы изменения соответствующих величин с R. Что же касается количественной стороны дела, то более правильным было бы писать в них отношение $\mathrm{R}/\mathrm{R}_{\text{кр}}$ вместо R.

В эквивалентности этой формулы закону (33.6) легко убедиться, заметив, что квадрат v_λ определяет порядок величины суммарной энергии, заключенной в пульсациях со всеми масштабами порядка и меньше заданного значения λ. К этому же результату мы придем, интегрируя выражение (33.13):

$$\int\limits_k^\infty E(k)\,dk \sim \frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{2/3}} \sim (\varepsilon\lambda)^{2/3} \sim v_\lambda^2.$$

Наряду с пространственными масштабами турбулентных пульсаций, можно рассматривать также и их временные характеристики — частоты. Нижний конец частотного спектра турбулентного движения лежит при частотах $\sim u/l$. Верхний же его конец определяется частотами

$$\omega_0 \sim \frac{u}{\lambda_0} \sim \frac{u}{l}\mathrm{R}^{3/4}, \tag{33.14}$$

отвечающими внутреннему масштабу турбулентности. Инерционной области отвечают частоты в интервале

$$\frac{u}{l} \ll \omega \ll \frac{u}{l}\mathrm{R}^{3/4}.$$

Неравенство $\omega \gg \dfrac{u}{l}$ означает, что по отношению к локальным свойствам турбулентности основное движение можно считать стационарным. Распределение энергии по частотному спектру в инерционной области получается из (33.13) заменой $k \sim \omega/u$:

$$E(\omega) \sim (u\varepsilon)^{2/3}\omega^{-5/3}, \tag{33.15}$$

причем $E(\omega)\,d\omega$ есть энергия, заключенная в частотном интервале $d\omega$.

Частота ω определяет период повторяемости во времени движения в данном участке пространства, наблюдаемого из неподвижной системы отсчета. Ее надо отличать от частоты (обозначим ее через ω'), определяющей период повторяемости движения в данном перемещающемся в пространстве участке жидкости. Распределение энергии по спектру этих частот не может зависеть от u, и должно определяться только параметром ε и самой частотой ω'. Снова из соображений размерности найдем, что

$$E(\omega') \sim \varepsilon/\omega'^2. \tag{33.16}$$

Эта формула находится в таком же отношении к закону (33.15), как (33.8) к (33.7).

Турбулентное перемешивание приводит к постепенному расхождению жидких частиц, находящихся первоначально вблизи

друг от друга. Рассмотрим две жидкие частицы на малом (в инерциальной области) расстоянии λ. Снова руководствуясь соображениями размерности, можно заключить, что скорость изменения этого расстояния со временем

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}. \tag{33.17}$$

Интегрируя это соотношение, найдем, что время τ, в течение которого две частицы, находившиеся первоначально на расстоянии λ_1 друг от друга, разойдутся на расстояние $\lambda_2 \gg \lambda_1$, равно по порядку величины

$$\tau \sim \lambda_2^{2/3}/\varepsilon^{1/3}. \tag{33.18}$$

Обратим внимание на самоускоряющийся характер процесса: скорость расхождения растет с увеличением λ. Это свойство связано с тем, что к расхождению частиц, находящихся на расстоянии λ, приводят только пульсации масштабов $\lesssim \lambda$; пульсации бо́льших масштабов переносят обе частицы вместе и не приводят к их расхождению [1].

Наконец, остановимся на свойствах движения в участках с размерами $\lambda \ll \lambda_0$. В таких участках движение обладает правильным характером и его скорость меняется плавно. Поэтому можно разложить здесь v_λ по степеням λ и, сохранив только первый член, получим $v_\lambda = \mathrm{const}\cdot\lambda$. Коэффициент определяется требованием, чтобы при $\lambda \sim \lambda_0$ было $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$. Таким образом, находим

$$v_\lambda \sim \frac{v_\lambda}{\lambda_0}\lambda \sim \frac{\Delta u}{l}\lambda \mathrm{R}^{1/2}. \tag{33.19}$$

Этот результат можно получить также и путем приравнивания двух выражений для диссипации энергии ε: выражения $(\Delta u)^3/l$ (33.1), определяющего ε через характеристики крупномасштабных пульсаций, и выражения $\nu(v_\lambda/\lambda)^2$, определяющего ту же величину через градиент скорости тех пульсаций, в которых фактически и происходит диссипация.

§ 34. Корреляционные функции скоростей

Формула (33.6) качественно определяет корреляцию скоростей в локальной турбулентности, т. е. связь между скоростями в двух близких точках потока. Введем теперь функции, которые могут служить количественной характеристикой этой корреляции [2].

---

[1] Эти результаты можно применить к взвешенным в жидкости частицам суспензии, пассивно переносимым вместе с движущейся жидкостью.

[2] Корреляционные функции были введены в гидродинамику турбулентности *Л.В. Келлером* и *А.А. Фридманом* (1924).

Первой из таких характеристик является корреляционный тензор второго ранга

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k}) \rangle, \tag{34.1}$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости жидкости в двух близких точках, а угловые скобки означают усреднение по времени. Радиус-вектор между точками *1* и *2* (направленный от *1* к *2*) обозначим через $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Рассматривая локальную турбулентность, мы считаем расстояние малым по сравнению с основным масштабом l, но не обязательно большим по сравнению с внутренним масштабом турбулентности λ_0.

Изменение скорости на малых расстояниях обусловлено мелкомасштабными пульсациями. С другой стороны, свойства локальной турбулентности не зависят от усредненного движения. Поэтому можно упростить изучение корреляционных функций локальной турбулентности, рассматривая вместо этого идеализированный случай турбулентного движения, в котором изотропия и однородность имеют место не только на малых (как в локальной турбулентности), но и на всех вообще масштабах; усредненная скорость при этом равна нулю. Такую полностью изотропную и однородную турбулентность [1]) можно представить себе как движение в жидкости, подвергнутой сильному «взбалтыванию» и затем оставленной в покое. Такое движение, разумеется, непременно затухает со временем, так что функциями времени становятся и компоненты корреляционного тензора [2]). Выведенные ниже соотношения между различными корреляционными функциями относятся к однородной и изотропной турбулентности на всех ее масштабах, а к локальной турбулентности — на расстояниях $r \ll l$.

В силу изотропии, тензор B_{ik} не может зависеть ни от какого избранного направления в пространстве. Единственным вектором, который может входить в выражение для B_{ik}, является радиус-вектор $\mathbf{r}$. Общий вид такого симметричного тензора второго ранга есть

$$B_{ik} = A(r)\delta_{ik} + B(r)n_i n_k, \tag{34.2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$.

Для выяснения смысла функций A и B выберем координатные оси так, чтобы одна из них совпала с направлением $\mathbf{n}$. Компоненту скорости вдоль этой оси обозначим как v_r, а перпендикулярную $\mathbf{n}$ составляющую скорости будем отличать индексом t.

---

[1]) Это понятие было введено *Тэйлором* (*G.I. Taylor*, 1935).

[2]) Под усреднением в определении (34.1) надо при этом, строго говоря, понимать не усреднение по времени, а усреднение по всем возможным положениям точек *1* и *2* (при заданном расстоянии между ними) в один и тот же момент времени.

Компонента корреляционного тензора B_{rr} есть тогда среднее значение квадрата относительной скорости двух частиц жидкости в их движении навстречу друг другу. Компонента же B_{tt} есть средний квадрат скорости вращательного движения одной частицы относительно другой. Поскольку $n_r = 1$, $n_t = 0$, то из (34.2) имеем

$$B_{rr} = A + B, \quad B_{tt} = A, \quad B_{tr} = 0.$$

Выражение (34.2) можно теперь представить в виде

$$B_{ik} = B_{tt}(r)(\delta_{ik} - n_i n_k) + B_{rr}(r) n_i n_k. \tag{34.3}$$

Раскрыв скобки в определении (34.1), имеем

$$B_{ik} = \langle v_{1i} v_{1k} \rangle + \langle v_{2i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1k} v_{2i} \rangle.$$

Ввиду однородности, средние значения произведения $v_i v_k$ в точках *1* и *2* одинаковы, а ввиду изотропии среднее значение $\langle v_{1i} v_{2k} \rangle$ не меняется при перестановке точек *1* и *2* (т. е. при изменении знака разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$); таким образом,

$$\langle v_{1i} v_{1k} \rangle = \langle v_{2i} v_{2k} \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik}, \quad \langle v_{1i} v_{2k} \rangle = \langle v_{2i} v_{1k} \rangle$$

Поэтому

$$B_{ik} = \frac{2}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik} - 2 b_{ik}, \quad b_{ik} = \langle v_{1i} v_{2k} \rangle. \tag{34.4}$$

Вспомогательный симметричный тензор b_{ik} обращается в нуль при $r \to \infty$; действительно, скорости турбулентного движения в бесконечно удаленных точках можно считать статистически независимыми, так что среднее значение их произведения сводится к произведению средних значений каждого множителя в отдельности, равных нулю по условию.

Продифференцируем выражение (34.4) по координатам точки *2*:

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2 \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2 \left\langle v_{1i} \frac{\partial v_{2k}}{\partial x_{2k}} \right\rangle.$$

Но в силу уравнения непрерывности имеем $\partial v_{2k} / \partial x_{2k} = 0$, так что

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = 0.$$

Поскольку B_{ik} являются функциями только от разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, то дифференцирование по x_{2k} эквивалентно дифференцированию по x_k. Подставив для B_{ik} выражение (34.3), получим после простого вычисления:

$$B'_{rr} + \frac{2}{r} (B_{rr} - B_{tt}) = 0$$

(штрих означает дифференцирование по r). Таким образом, продольная и поперечная корреляционные функции связаны друг с другом соотношением

$$B_{tt} = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(r^2 B_{rr}). \tag{34.5}$$

Согласно (33.6) разность скоростей на расстоянии r в инерционной области пропорциональна $r^{1/3}$. Поэтому корреляционные функции B_{rr} и B_{tt} в этой области пропорциональны $r^{2/3}$. При этом из (34.5) получается следующее простое соотношение:

$$B_{tt} = \frac{4}{3}B_{rr} \qquad (\lambda_0 \ll r \ll l). \tag{34.6}$$

Для расстояний же $r \ll \lambda_0$ разность скоростей пропорциональна r и, следовательно, B_{rr} и B_{tt} пропорциональны r^2. Формула (34.5) приводит теперь к соотношению

$$B_{tt} = 2B_{rr} \qquad (r \ll \lambda_0). \tag{34.7}$$

Для этих расстояний B_{tt} и B_{rr} могут еще быть выражены через среднюю диссипацию энергии ε. Пишем $B_{rr} = ar^2$ (где a — постоянная) и, комбинируя (34.3), (34.4) и (34.7) находим

$$b_{ik} = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle\delta_{ik} - ar^2\delta_{ik} + \frac{a}{2}x_i x_k.$$

Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\left\langle \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}}\frac{\partial v_{2i}}{\partial x_{2l}}\right\rangle = 15a, \qquad \left\langle \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}}\frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2i}}\right\rangle = 0.$$

Поскольку эти равенства справедливы при сколь угодно малых r, можно положить в них $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, после чего они дают

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right)^2\right\rangle = 15a, \qquad \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_l}\frac{\partial v_l}{\partial x_i}\right\rangle = 0.$$

С другой стороны, согласно (16.3) имеем для средней диссипации энергии

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2\right\rangle = \nu\left\{\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2\right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right\rangle\right\} = 15a\nu,$$

откуда $a = \varepsilon/(15\nu)$ [1]. В результате находим окончательно следующие формулы, определяющие корреляционные функции че-

[1]) Отметим, что для изотропной турбулентности средняя диссипация связана со средним квадратом завихренности простым соотношением:

$$\langle(\operatorname{rot}\mathbf{v})^2\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2\right\rangle = \frac{\varepsilon}{\nu}.$$

рез диссипацию энергии:

$$B_{tt} = \frac{2\varepsilon}{15\nu}r^2, \qquad B_{rr} = \frac{\varepsilon}{15\nu}r^2 \tag{34.8}$$

(*А.Н. Колмогоров*, 1941).

Далее, введем корреляционный тензор третьего ранга

$$B_{ikl} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2l} - v_{1l}) \rangle, \tag{34.9}$$

и вспомогательный тензор

$$b_{ik,l} = \langle (v_{1i} v_{1k} v_{2l}) \rangle = -\langle (v_{2i} v_{2k} v_{1l}) \rangle, \tag{34.10}$$

Последний симметричен по первой паре индексов (второе равенство в определении (34.10) связано с тем, что перестановка точек *1* и *2* эквивалентна изменению знака **r**, т. е. инверсии координат и потому меняет знак тензора третьего ранга). При $r = 0$, т. е. при совпадении точек *1* и *2*, тензор $b_{ik,l}(0) = 0$ — среднее значение от произведения нечетного числа компонент пульсирующей скорости обращается в нуль. Раскрыв скобки в определении (34.9), выразим тензор B_{ikl} через $b_{ik,l}$:

$$B_{ikl} = 2(b_{ik,l} + b_{il,k} + b_{lk,i}). \tag{34.11}$$

При $r \to \infty$ тензор $b_{ik,l}$, а с ним и B_{ikl}, стремятся к нулю.

В силу изотропии, тензор $b_{ik,l}$ должен выражаться через единичный тензор δ_{ik} и компоненты единичного вектора **n**. Общий вид такого тензора, симметричного по первой паре индексов, есть

$$b_{ik,l} = C(r)\delta_{ik}n_l + D(r)(\delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + F(r)n_i n_k n_l. \tag{34.12}$$

Дифференцируя его по координатам точки *2*, получим в силу уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x_{2l}} b_{ik,l} = \left\langle v_{1i} v_{1k} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}} \right\rangle = 0.$$

Подстановка же сюда выражения (34.12) приводит, после простого вычисления, к двум уравнениям

$$[r^2(3C + 2D + F)]' = 0, \qquad C' + \frac{2}{r}(C + D) = 0.$$

Интегрирование первого дает

$$3C + 2D + F = \frac{\text{const}}{r^2}.$$

Но при $r = 0$ функции C, D, F должны обращаться в нуль, поэтому надо положить $\text{const} = 0$, так что $3C + 2D + F = 0$. Из обоих полученных таким образом уравнений находим

$$D = -C - \frac{1}{2}rC', \qquad F = rC' - C. \tag{34.13}$$

Подстановка (34.13) в (34.12) и затем в (34.11) приводит к выражению

$$B_{ikl} = -2(rC' + C)(\delta_{ik}n_l + \delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + 6(rC' - C)n_i n_k n_l.$$

Направив снова одну из координатных осей по направлению вектора $\mathbf{n}$, получим для компонент тензора B_{ikl}

$$B_{rrr} = -12C, \quad B_{rtt} = -2(C + rC'), \quad B_{rrt} = B_{ttt} = 0. \tag{34.14}$$

Отсюда видно, что между отличными от нуля корреляционными функциями B_{rtt} и B_{rrr} имеется соотношение

$$B_{rtt} = \frac{1}{6}\frac{d}{dr}(rB_{rrr}). \tag{34.15}$$

Ниже нам понадобится также и выражение тензора $b_{ik,l}$ через компоненты тензора B_{ikl}. С помощью (34.12)–(34.14) находим

$$b_{ik,l} = -\frac{1}{12}B_{rrr}\delta_{ik}n_l + \frac{1}{24}\left(rB'_{rrr} + 2B_{rrr}\right)\left(\delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i\right) - \\ - \frac{1}{12}\left(rB'_{rrr} - B_{rrr}\right)n_i n_k n_l. \tag{34.16}$$

Соотношения (34.5) и (34.15) — следствия одного лишь уравнения непрерывности. Привлечение же динамического уравнения движения — уравнения Навье–Стокса — позволяет установить уравнение, связывающее друг с другом корреляционные тензоры B_{ik} и B_{ikl} (*Th. Kármán*, *L. Howarth*, 1938; *А.Н. Колмогоров*, 1941).

Для этого вычисляем производную $\partial b_{ik}/\partial t$ (напомним, что полностью однородное и изотропное турбулентное движение непременно затухает со временем). Выразив производные $\partial v_{1i}/\partial t$ и $\partial v_{2k}/\partial t$ с помощью уравнения Навье–Стокса, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v_{1i}v_{2k}\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_{1l}}\langle v_{1i}v_{1l}v_{2k}\rangle - \frac{\partial}{\partial x_{2l}}\langle v_{1i}v_{2k}v_{2l}\rangle - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\langle p_1 v_{2k}\rangle - \\ - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\langle p_2 v_{1i}\rangle + \nu\Delta_1\langle v_{1i}v_{2k}\rangle + \nu\Delta_2\langle v_{1i}v_{2k}\rangle. \tag{34.17}$$

Корреляционная функция давления и скорости равна нулю:

$$\langle p_1\mathbf{v}_2\rangle = 0. \tag{34.18}$$

Действительно, в силу изотропии эта функция должна была бы иметь вид $f(r)\mathbf{n}$. С другой стороны, в силу уравнения непрерывности

$$\operatorname{div}_2\langle p_1\mathbf{v}_2\rangle = \langle p_1 \operatorname{div}_2 \mathbf{v}_2\rangle = 0.$$

Но единственным вектором вида $f(r)\mathbf{n}$ и с равной нулю дивергенцией является вектор $\mathrm{const}\cdot\mathbf{n}/r^2$; такой вектор не удовлетворяет условию конечности при $r = 0$ и потому должно быть $\mathrm{const} = 0$.

Заменив теперь в (34.17) производные по x_{1i} и x_{2i} производными по $-x_i$ и x_i, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}b_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l}(b_{il,k} + b_{kl,i}) + 2\nu\Delta b_{ik}. \tag{34.19}$$

Сюда надо подставить b_{ik} и $b_{ik,l}$ из (34.4) и (34.16). Производная по времени от кинетической энергии единицы массы жидкости, $\langle v^2\rangle/2$, есть не что иное, как диссипация энергии $-\varepsilon$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\langle v^2\rangle}{3} = -\frac{2}{3}\varepsilon.$$

Простое, но довольно длинное вычисление приводит к следующему уравнению [1]:

$$-\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{2}\frac{\partial B_{rr}}{\partial t} = \frac{1}{6r^4}\frac{\partial}{\partial r}(r^4 B_{rrr}) - \frac{\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial B_{rr}}{\partial r}\right). \tag{34.20}$$

Величина B_{rr} как функция времени существенно меняется лишь за время, отвечающее основному масштабу турбулентности ($\sim l/u$). По отношению к локальной турбулентности основное движение может рассматриваться как стационарное (как это было уже отмечено в § 33). Это значит, что в применении к локальной турбулентности в левой части уравнения (34.20) можно с достаточной точностью пренебречь производной $\partial B_{rr}/\partial t$ по сравнению с ε. Умножив остающееся уравнение на r^4 и проинтегрировав его по r (с учетом обращения корреляционных функций в нуль при $r = 0$), получим следующее соотношение между B_{rr} и B_{rrr}:

$$B_{rrr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r + 6\nu\frac{dB_{rr}}{dr} \tag{34.21}$$

(*А.Н. Колмогоров*, 1941). Это соотношение справедливо при r как бо́льших, так и меньших чем λ_0. При $r \gg \lambda_0$ член, содержащий вязкость, мал и мы имеем просто

$$B_{rrr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r. \tag{34.22}$$

Если же подставить в (34.21) при $r \ll \lambda_0$ выражение (34.8) для B_{rr}, то получится нуль; это связано с тем, что в этом случае должно быть $B_{rrr} \propto r^3$, так что члены первого порядка должны сократиться.

---

[1]) В результате вычисления это уравнение получается путем умножения обеих частей уравнения на оператор $(1 + {}^1\!/_2 r\partial/\partial r)$. Но поскольку единственное решение уравнения $f + {}^1\!/_2 r\partial f/\partial r = 0$, конечное при $r = 0$, есть $f = 0$, то этот оператор можно опустить.

Одно уравнение (34.20) связывает две независимые функции B_{rr} и B_{rrr} и потому, само по себе, не дает возможности найти эти функции. Появление в нем корреляционных функций сразу двух порядков связано с нелинейностью уравнения Навье–Стокса. По этой же причине вычисление производной по времени от корреляционного тензора третьего ранга привело бы к уравнению, содержащему также и корреляционную функцию четвертого порядка, и т. д. Таким образом, возникает бесконечная цепочка уравнений. Получить таким способом замкнутую систему конечного числа уравнений без каких-либо дополнительных предположений невозможно.

Сделаем еще следующее общее замечание [1]. Можно было бы думать, что существует принципиальная возможность получить универсальную (применимую к любому турбулентному движению) формулу, определяющую величины B_{rr}, B_{tt} для всех расстояний r, малых по сравнению с l. В действительности, однако, такой формулы вообще не может существовать, как это явствует из следующих соображений. Мгновенное значение величины $(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})$ можно было бы, в принципе, выразить универсальным образом через диссипацию энергии ε в тот же момент времени. Однако при усреднении этих выражений будет существенным закон изменения ε в течение периодов крупномасштабных (масштабы $\sim l$) движений, различный для различных конкретных случаев движения. Поэтому и результат усреднения не может быть универсальным [2].

Интеграл Лойцянского. Перепишем уравнение (34.20), введя в него вместо функций B_{rr}, B_{rrr} функции b_{rr}, $b_{rr,r}$:

$$\frac{\partial b_{rr}}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left[2\nu r^4 \frac{\partial b_{rr}}{\partial r} + r^4 b_{rr,r}\right]. \tag{34.23}$$

Умножив это уравнение на r^4, проинтегрируем его по r от 0 до ∞. Выражение в квадратных скобках равно нулю при $r = 0$. Полагая, что оно обращается в нуль также и при $r \to \infty$, найдем, что

$$\Lambda \equiv \int\limits_0^\infty r^4 b_{rr}\, dr = \text{const} \tag{34.24}$$

[1] Оно было высказано *Л.Д. Ландау* (1944).

[2] Вопрос о том, должны ли флуктуации ε отразиться даже на виде корреляционных функций в инерционной области, вряд ли может быть надежно решен до построения последовательной теории турбулентности (этот вопрос был поставлен *Колмогоровым А.Н.* // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. P. 77 и *Обуховым А.М.* (там же, p. 82)). Существующие попытки ввести связанные с этим фактором поправки в закон Колмогорова–Обухова основаны на гипотезах о статистических свойствах диссипации, степень правдоподобности которых трудно оценить.

(*Л.Г. Лойцянский*, 1939). Этот интеграл сходится, если функция b_{rr} убывает на бесконечности быстрее, чем r^{-5}, а чтобы он действительно сохранялся, функция $b_{rr,\,r}$ должна убывать быстрее, чем r^{-4}.

Функции b_{rr} и b_{tt} связаны друг с другом таким же соотношением (34.5), как и B_{rr} и B_{tt}. Поэтому имеем (при тех же условиях)

$$\int\limits_0^\infty b_{tt} r^4\,dr = -\frac{3}{2}\int\limits_0^\infty b_{rr} r^4\,dr.$$

Поскольку $b_{rr} + 2b_{tt} = \langle \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\rangle$, то интеграл (34.24) можно представить в виде

$$\Lambda = -\frac{1}{4\pi}\int r^2 \langle \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\rangle\,dV \tag{34.25}$$

(где $dV = d^3(x_1 - x_2)$). Этот интеграл тесно связан с моментом импульса жидкости, находящейся в состоянии однородной и изотропной турбулентности. Можно показать (на чем мы останавливаться не будем), что квадрат полного момента импульса $\mathbf{M}$ жидкости, заключенной в некотором большом объеме V (выделенном в неограниченной жидкости) есть $M^2 = 4\pi\rho^2\Lambda V$; тот факт, что $\mathbf{M}$ растет пропорционально $V^{1/2}$, а не V, связан с тем, что $\mathbf{M}$ является суммой большого числа статистически независимых слагаемых (моментов импульса отдельных небольших участков жидкости) с равными нулю средними значениями.

Значение M^2 в заданном объеме V может меняться за счет взаимодействия с окружающими областями жидкости. Если бы это взаимодействие достаточно быстро убывало с расстоянием, то оно представляло бы собой для рассматриваемой части жидкости поверхностный эффект. Тогда времена, в течение которых M^2 могло бы претерпеть значительное изменение, росли бы вместе с размерами объема V; эти времена и размеры должны рассматриваться как сколь угодно большие, и в этом смысле M^2 сохранялось бы.

Указанное условие тесно связано с условиями достаточно быстрого убывания корреляционных функций, сформулированными при выводе (34.24) из (34.23). Но в рамках теории несжимаемой жидкости существуют основания сомневаться в их соблюдении. Физическое основание для этого состоит в бесконечной скорости распространения возмущений в несжимаемой жидкости. Математически это свойство проявляется в интегральном характере зависимости распределения давления в жидкости от распределения скоростей: если рассматривать правую часть уравнения

(15.11) как заданную, то решение этого уравнения:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{\partial^2 v_i(\mathbf{r}') v_k(\mathbf{r}')}{\partial x_i' \, \partial x_k'} \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

В результате любое локальное возмущение скорости мгновенно отражается на давлении во всем пространстве; давление же влияет на ускорение жидкости и тем самым — на дальнейшее изменение скоростей.

Естественная постановка задачи для выяснения этого вопроса состоит в следующем: пусть в начальный момент времени ($t = 0$) создано изотропное турбулентное движение, в котором функции $b_{ik}(r,\, t)$ и $b_{ik,\,l}(r,\, t)$ экспоненциально убывают с расстоянием. Выразив давление через скорости по написанной формуле, можно затем с помощью уравнений движения жидкости пытаться определить характер зависимости производных по времени от корреляционных функций (в момент $t = 0$) от расстояния при $r \to \infty$. Тем самым определится и характер зависимости от r самих корреляционных функций при $t > 0$. Такое исследование приводит к следующим результатам [1]).

Функция $b_{rr}(r,\, t)$ при $t > 0$ убывает на бесконечности не медленнее, чем r^{-6} (а возможно, что и экспоненциально). Поэтому интеграл Лойцянского сходится. Функция же $b_{rr,\,r}$ убывает лишь как r^{-4}. Это значит, что Λ не сохраняется. Его производная по времени оказывается некоторой отличной от нуля отрицательной (как результат эмпирического факта отрицательности $b_{rr,\,r}$) функцией времени. Эта функция целиком связана с инерционными силами. Естественно думать, что по мере затухания турбулентности роль этих сил падает, и в заключительной стадии ими можно пренебречь по сравнению с вязкими силами. Таким образом, Λ убывает (момент импульса равномерно «растекается» по бесконечному пространству), стремясь к постоянному значению, принимаемому им на заключительной стадии турбулентности.

Отсюда возникает возможность определить для этой стадии закон изменения со временем основного масштаба турбулентности l и ее характерной скорости v. Оценка интеграла (34.25) дает $\Lambda \sim v^2 t^5 = \text{const}$. Еще одно соотношение получим из оценки скорости убывания энергии путем вязкой диссипации. Диссипация ε пропорциональна квадрату градиентов скорости; оценив последние как v/l, имеем $\varepsilon \sim \nu (v/l)^2$. Приравняв ее производной $\partial(v^2)/\partial t \sim v^2/t$ (t отсчитывается от начала заключительной

[1]) См. *Proudman I.*, *Reid W.H.* // Phil. Trans. Roy. Soc. 1954. V. A247. P. 163; *Batchelor G.K.*, *Proudman I.*, там же: 1956. V. A248, P. 369. Изложение этих работ дано также в кн.: *Монин А.С.*, *Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. — М.: Наука. 1967. Т. 2. § 15.5, 15.6.

стадии затухания), получим $l \sim (\nu t)^{1/2}$ и затем

$$v = \text{const} \cdot t^{-5/4} \tag{34.26}$$

(*М.Д. Миллионщиков*, 1939).

Спектральное представление корреляционных функций. Наряду с рассмотренным в предыдущем параграфе координатным представлением корреляционных функций, методически и физически интересно также и спектральное (по волновым векторам) их представление. Оно получается разложением в пространственный интеграл Фурье:

$$B_{ik}(\mathbf{r}) = \int B_{ik}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad B_{ik}(\mathbf{k}) = \int B_{ik}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x$$

(мы обозначаем спектральную корреляционную функцию $B_{ik}(\mathbf{k})$ тем же символом B_{ik} с другой независимой переменной — волновым вектором $\mathbf{k}$). Поскольку в изотропной турбулентности $B_{ik}(-\mathbf{r}) = B_{ik}(\mathbf{r})$,то $B_{ik}(\mathbf{k}) = B_{ik}(-\mathbf{k}) = B^*_{ik}(\mathbf{k})$, т. е. спектральные функции $B_{ik}(\mathbf{k})$ вещественны.

При $r \to \infty$ функции $B_{ik}(\mathbf{r})$ стремятся к конечному пределу, даваемому первым членом в (34.4). Соответственно этому, их фурье-компоненты содержат δ-функционный член:

$$B_{ik}(\mathbf{k}) = \frac{2}{3}(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \langle v^2 \rangle - 2b_{ik}(\mathbf{k}). \tag{34.27}$$

Компоненты же с $\mathbf{k} \neq 0$ для функций B_{ik} и $-2b_{ik}$ совпадают друг с другом.

Дифференцирование по координатам x_l в координатном представлении эквивалентно в спектральном представлении умножению на ik_l. Поэтому уравнение непрерывности $\partial b_{ik}(\mathbf{r})/\partial x_i = 0$ сводится в спектральном представлении к условию поперечности тензора $b_{ik}(\mathbf{k})$ по отношению к волновому вектору:

$$k_i b_{ik}(\mathbf{k}) = 0. \tag{34.28}$$

В силу изотропии, тензор $b_{ik}(\mathbf{k})$ должен выражаться только через вектор $\mathbf{k}$ и единичный тензор δ_{ik}. Общий вид такого симметричного тензора, удовлетворяющего условию (34.28), есть

$$b_{ik}(\mathbf{k}) = F^{(2)}(k)\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right), \tag{34.29}$$

где $F^{(2)}(k)$ — вещественная функция от абсолютной величины волнового вектора.

Аналогичным образом определяется спектральное представление корреляционного тензора третьего ранга, причем тензор $B_{ikl}(\mathbf{k})$ выражается через $b_{ik,l}(\mathbf{k})$ формулой (34.11); δ-функционного члена эти тензоры не содержат. Уравнение непрерывности

$\partial b_{ik,\,l}(\mathbf{r})/\partial x_l = 0$ приводит к условию поперечности спектрального тензора $b_{ik,\,l}(\mathbf{k})$ по его третьему индексу:

$$k_l b_{ik,\,l}(\mathbf{k}) = 0. \tag{34.30}$$

Общий вид такого тензора:

$$b_{ik,\,l}(\mathbf{k}) = iF^{(3)}(k)\Big\{\delta_{il}\frac{k_k}{k} + \delta_{kl}\frac{k_i}{k} - 2\frac{k_i k_k k_l}{k^3}\Big\}. \tag{34.31}$$

Поскольку $b_{ik,\,l}(-\mathbf{r}) = -b_{ik,\,l}(\mathbf{r})$, спектральные функции $b_{ik,\,l}(\mathbf{k})$ мнимы; в (34.31) введен множитель i, так что функция $F^{(3)}(k)$ — вещественная.

Уравнение (34.19) в спектральном представлении записывается как

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{ik}(\mathbf{k}) = ik_l[b_{il,\,k}(\mathbf{k}) + b_{kl,\,i}(\mathbf{k})] - 2\nu k^2 b_{ik}(\mathbf{k}).$$

Подставив сюда (34.29) и (34.31), получим

$$\frac{\partial F^{(2)}(k,\,t)}{\partial t} = -2kF^{(3)}(k,\,t) - 2\nu k^2 F^{(2)}(k,\,t). \tag{34.32}$$

Функция $F^{(2)}(\mathbf{k})$ имеет важный физический смысл. Для его выяснения подойдем к определению спектральной корреляционной функции в несколько более ранней стадии [1]) .

Введем спектральное разложение самой пульсирующей скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ по обычным формулам разложения Фурье:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{v}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \int \mathbf{v}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x.$$

Последний интеграл фактически расходится, поскольку $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ не стремится к нулю на бесконечности. Это обстоятельство, однако, несущественно для дальнейших формальных выводов, имеющих целью вычисление заведомо конечных средних квадратов.

Корреляционный тензор $b_{ik}(\mathbf{r})$ выражается через фурье-компоненты скорости интегралом

$$b_{il}(\mathbf{r}) = \iint \langle v_{i\mathbf{k}} v_{l\mathbf{k}'}\rangle e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}_2 + \mathbf{k}'\mathbf{r}_1)} \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^6}. \tag{34.33}$$

Для того чтобы этот интеграл был функцией только от разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, подынтегральное выражение в нем должно содержать δ-функцию от суммы $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$, т. е. должно быть

$$\langle v_{i\mathbf{k}} v_{l\mathbf{k}'}\rangle = (2\pi)^3 (v_i v_l)_{\mathbf{k}}\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \tag{34.34}$$

[1]) Приведенные ниже рассуждения перефразируют вывод, данный в V, § 122.

Это выражение надо рассматривать как определение величины, обозначенной здесь символически как $(v_i v_l)_{\mathbf{k}}$. Подставив (34.34) в (34.33) и устранив δ-функцию интегрированием по d^3k', находим, что

$$b_{il}(\mathbf{r}) = \int (v_i v_l)_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

т. е. величины $(v_i v_l)_{\mathbf{k}}$ совпадают с фурье-компонентами корреляционной функции $b_{il}(\mathbf{r})$; тем самым они симметричны по индексам i, l и вещественны. В частности, $b_{ii}(\mathbf{k}) = (\mathbf{v}^2)_{\mathbf{k}}$, причем мы можем теперь утверждать, что эта величина положительна, как это очевидно из ее связи согласно (34.34) с положительной величиной $\langle \mathbf{v_k v_{k'}} \rangle = \langle |\mathbf{v_k}|^2 \rangle$ — средним квадратом модуля фурье-компоненты пульсирующей скорости.

Значение корреляционной функции $b_{ii}(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} = 0$ определяет средний квадрат скорости жидкости в какой-либо (любой) точке пространства. Оно выражается через спектральную функцию формулой

$$\langle \mathbf{v}^2 \rangle = b_{ii}(\mathbf{r} = 0) = \int b_{ii}(\mathbf{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

или, подставив сюда $b_{ii}(\mathbf{k})$ из (34.29)

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{v}^2 \rangle = \int F^{(2)}(k) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \int\limits_0^\infty F^{(2)}(k) \frac{4\pi k^2\, dk}{(2\pi)^3}. \tag{34.35}$$

После всего сказанного выше смысл этой формулы очевиден: положительная величина $F^{(2)}(k)/(2\pi)^3$ представляет собой спектральную плотность кинетической энергии жидкости (отнесенной к единице массы) в $\mathbf{k}$-пространстве. Энергия же, заключенная в пульсациях с величиной волнового вектора в интервале dk, есть $E(k)\, dk$, где

$$E(k) = \frac{k^2}{2\pi^2} F^{(2)}(k). \tag{34.36}$$

Первый член в правой части уравнения (34.32) возникает как фурье-компонента первого члена в правой части уравнения (34.19). При $r \to 0$ последний сводится к производной

$$\left\langle v_{1k} \frac{\partial}{\partial x_{1l}} v_{1i} v_{1l} \right\rangle + \left\langle v_{1i} \frac{\partial}{\partial x_{1l}} v_{1k} v_{1l} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_{1l}} \langle v_{1i} v_{1k} v_{1l} \rangle$$

и обращается в нуль в силу однородности. В спектральном представлении это значит, что

$$\int \mathbf{k} F^{(3)}(\mathbf{k})\, d^3k = 0, \tag{34.37}$$

так что функция $F^{(3)}(\mathbf{k})$ знакопеременна.

Уравнение (34.32) имеет простой смысл: оно представляет баланс энергии различных спектральных компонент турбулентного движения. Второй член в правой части отрицателен; он определяет убыль энергии, связанную с диссипацией. Первый же член (связанный с нелинейным членом в уравнении Навье–Стокса) описывает перераспределение энергии по спектру — ее переход от спектральных компонент с меньшими к компонентам с бóльшими значениями k. Спектральная (по k) плотность энергии $E(k)$ имеет максимум при $k \sim 1/l$; в области вблизи максимума (область энергии — см. § 33) сосредоточена большая часть полной энергии турбулентного движения. Плотность же диссипируемой энергии $2\nu k^2 E(k)$ максимальна при $k \sim 1/\lambda_0$; в области диссипации сосредоточена бóльшая часть полной диссипации. При очень больших числах Рейнольдса обе эти области раздвинуты далеко друг от друга и между ними находится инерционная область.

Проинтегрировав уравнение (34.32) по $d^3k/(2\pi)^3$, мы получим в его левой части производную по времени от полной кинетической энергии жидкости; эта производная совпадает с полной диссипацией энергии $-\varepsilon$. Таким образом, находим следующее «условие нормировки» функции $E(k)$:

$$2\nu \int_0^\infty k^2 E(k,\, t)\, dk = \varepsilon. \tag{34.38}$$

В инерционном интервале волновых чисел $(1/l \ll k \ll 1/\lambda_0)$ спектральные функции (как и корреляционные функции в координатном представлении) можно считать независящими от времени. Согласно (33.13) в этой области

$$E(k) = C_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \tag{34.39}$$

где C_1 — постоянный коэффициент. Этот коэффициент связан с коэффициентом C в корреляционной функции

$$B_{rr}(r) = C(\varepsilon r)^{2/3} \tag{34.40}$$

равенством $C_1 = 0{,}76C$ (см. задачу). Их эмпирические значения: $C \approx 2$, $C_1 \approx 1{,}5$ [1]). При этом отношение

$$|B_{rrr}|/B_{rr}^{3/2} = (4/5)C^{3/2} \approx 0{,}3.$$

З а д а ч а

Связать друг с другом коэффициенты C и C_1 в формулах (34.39), (34.40) для корреляционной функции и спектральной плотности энергии в инерционной области.

---

[1]) Большинство экспериментов относится к атмосферной и океанической турбулентности. Числа Рейнольдса в этих измерениях доходят до $3 \cdot 10^8$.

Р е ш е н и е. Функции

$$B_{ii}(r) = 2B_{tt}(r) + B_{rr}(r) = \frac{11}{3}B_{rr}(r)$$

(использована связь (34.6)) и

$$B_{ii}(k) = -2b_{ii}(k) = -4F^{(2)}(k) = -\frac{8\pi^2}{k^2}E(k)$$

($k \neq 0$) связаны интегралом Фурье

$$B_{ii}(k) = \int B_{ii}(r)e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x.$$

Если волновой вектор лежит в инерционной области ($1/l \ll k \ll 1/\lambda_0$), то наличие осциллирующего множителя обрезает интеграл сверху на расстояниях $r \sim 1/k \ll l$. На малых же расстояниях интеграл сходится, поскольку $B_{ii}(r) \to 0$ при $r \to 0$. Поэтому фактически интеграл определяется областью расстояний, лежащих в инерционной области ($\lambda_0 \ll r \ll l$), так что можно подставить в него $B_{rr}(r)$ из (34.40), распространив в то же время интегрирование по всему пространству. В интеграле

$$I = \int r^{3/2}e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x$$

производим сначала интегрирование по направлениям $\mathbf{r}$ и находим

$$I = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\int\limits_0^\infty r^{5/3}e^{ikr}\, dr = \frac{4\pi}{k^{11/3}}\int\limits_0^\infty \xi^{5/3}e^{i\xi}\, d\xi.$$

Оставшийся интеграл берется путем поворота пути интегрирования в плоскости комплексного переменного ξ с правой вещественной на верхнюю мнимую полуось. В результате получим

$$I = \frac{4\pi}{k^{11/3}}\frac{10\pi}{9\Gamma(1/3)}.$$

Собрав полученные выражения, находим окончательно

$$C_1 = \frac{55}{27\Gamma(1/3)}C = 0{,}76\, C.$$

§ 35. Турбулентная область и явление отрыва

Турбулентное движение является, вообще говоря, вихревым. Однако распределение завихренности вдоль объема жидкости обнаруживает при турбулентном движении (при очень больших R) существенные особенности. Именно, при «стационарном» турбулентном обтекании тел весь объем жидкости можно обычно разделить на две области, отграниченные одна от другой. В одной из них движение является вихревым, а в другой завихренность отсутствует, и движение потенциально. Завихренность оказывается, таким образом, распределенной не по всему объему жидкости, а лишь по его части (вообще говоря, тоже бесконечной).

Возможность существования такой отграниченной области вихревого движения является следствием того, что турбулентное

движение может рассматриваться как движение идеальной жидкости, описывающееся уравнениями Эйлера [1]). Мы видели (§ 8), что для движения идеальной жидкости имеет место закон сохранения циркуляции скорости. В частности, если в какой-нибудь точке линии тока ротор скорости равен нулю, то это имеет место и вдоль всей этой линии. Напротив, если в какой-нибудь точке линии тока $\operatorname{rot}\mathbf{v} \neq 0$, то он отличен от нуля вдоль всей линии тока. Отсюда ясно, что наличие отграниченных областей вихревого и безвихревого движения совместимо с уравнениями движения, если область вихревого движения представляет собой область, за границы которой не выходят находящиеся внутри нее линии тока. Такое распределение завихренности будет устойчивым, и завихренность не будет проникать за поверхность раздела.

Одним из свойств области вихревого турбулентного движения является то, что обмен жидкостью между нею и окружающим пространством может быть только односторонним. Жидкость может втекать в нее из области потенциального движения, но никогда не вытекает из нее.

Подчеркнем, что приведенные здесь соображения не могут, конечно, рассматриваться как сколько-нибудь точное доказательство высказанных утверждений. Однако наличие отграниченных областей вихревого турбулентного движения, по-видимому, подтверждается опытом.

Как в вихревой, так и в безвихревой областях движение турбулентно. Однако характер этой турбулентности совершенно различен в обеих областях. Для выяснения происхождения этого различия обратим внимание на следующее общее свойство потенциального движения, описывающегося уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Предположим, что движение периодично в плоскости xy, так что φ зависит от x и y посредством множителя вида $\exp\{i(k_1x + k_2y)\}$; тогда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\left(k_1^2 + k_2^2\right)\varphi = -k^2\varphi,$$

и поскольку сумма вторых производных должна быть равна нулю, ясно, что вторая производная по координате z равна φ, умноженному на положительный коэффициент: $\partial^2\varphi/\partial z^2 = k^2\varphi$. Но тогда зависимость φ от z будет определяться затухающим множителем вида e^{-kz} при $z > 0$ (неограниченное возрастание, как e^{kz}, очевидно, невозможно). Таким образом, если потенциальное движение периодично в некоторой плоскости, то оно должно быть затухающим вдоль перпендикулярного к этой плоскости

[1]) Границей применимости этих уравнений к турбулентному движению являются расстояния порядка λ_0. Поэтому и о резкой границе между областями вихревого и безвихревого движений можно говорить только с точностью до таких расстояний.

направления. При этом чем больше k_1 и k_2, т. е. чем меньше период повторяемости движения в плоскости xy, тем быстрее затухает движение вдоль оси z. Эти рассуждения остаются качественно применимыми и в тех случаях, когда движение не является строго периодическим, а лишь обнаруживает некоторую качественную повторяемость.

Отсюда вытекает следующий результат. Вне области вихревого движения турбулентные пульсации должны затухать, причем тем быстрее, чем меньше их масштаб. Другими словами, мелкомасштабные пульсации не проникают глубоко в область потенциального движения. В результате заметную роль в этой области играют лишь самые крупномасштабные пульсации, затухающие на расстояниях порядка величины размеров (поперечных) вихревой области, как раз играющих в данном случае роль основного масштаба турбулентности. На расстояниях, бо́льших этих размеров, турбулентность практически отсутствует и движение можно считать ламинарным.

Мы видели, что диссипация энергии при турбулентном движении связана с наиболее мелкомасштабными пульсациями; крупномасштабные движения заметной диссипацией не сопровождаются, с чем и связана возможность применения к ним уравнения Эйлера. Ввиду сказанного выше мы приходим к существенному результату, что диссипация энергии происходит в основном лишь в области вихревого турбулентного движения и практически не имеет места вне этой области.

Имея в виду все эти особенности вихревого и безвихревого турбулентного движений, мы будем в дальнейшем для краткости называть область вихревого турбулентного движения просто *областью турбулентного движения* или *турбулентной областью.* В следующих параграфах будет рассмотрена форма этой области для различных случаев.

Турбулентная область должна быть ограничена с какой-нибудь стороны частью поверхности обтекаемого жидкостью тела. Линию, ограничивающую эту часть поверхности тела, называют *линией отрыва.* От нее отходит поверхность раздела между областью турбулентности и остальным объемом жидкости. Самое образование турбулентной области при обтекании тела называют *явлением отрыва.*

Форма турбулентной области определяется свойствами движения в основном объеме жидкости (т. е. не в непосредственной близости от поверхности тела). Не существующая пока полная теория турбулентности должна была бы дать принципиальную возможность определения этой формы с помощью уравнений движения идеальной жидкости, если задано положение линии отрыва на поверхности тела. Действительное же положение линии отрыва определяется свойствами движения в непосредственной близости поверхности тела (в так называемом погра-

ничном слое), где существенную роль играет вязкость жидкости (см. § 40).

Говоря (в следующих параграфах) о свободной границе турбулентной области, мы будем подразумевать, естественно, ее усредненное по времени положение. Мгновенное же положение границы представляет собой очень нерегулярную поверхность; эти нерегулярные искажения и их изменение со временем связаны в основном с крупномасштабными пульсациями и соответственно простираются в глубину на расстояния, сравнимые с основным масштабом турбулентности. Нерегулярное движение граничной поверхности приводит к тому, что фиксированная в пространстве точка потока (не слишком удаленная от среднего положения поверхности) будет оказываться попеременно по ту или другую сторону границы. При наблюдении картины движения в этой точке будут обнаруживаться попеременные периоды наличия или отсутствия мелкомасштабной турбулентности [1]).

§ 36. Турбулентная струя

Форма, а также и некоторые другие основные свойства турбулентных областей в ряде случаев могут быть установлены уже с помощью простых соображений подобия. Сюда относятся прежде всего различного рода свободные турбулентные струи, распространяющиеся в заполненном жидкостью же пространстве (*L. Prandtl*, 1925).

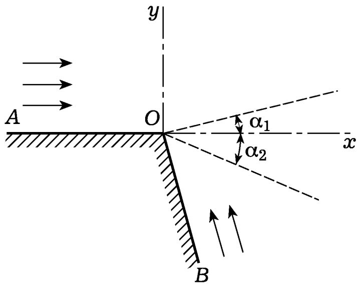


Рис. 24

В качестве первого примера рассмотрим турбулентную область, возникающую при отрыве потока с края угла, образованного двумя пересекающимися бесконечными плоскостями (на рис. 24 изображен их поперечный разрез). При ламинарном обтекании (см. рис. 3) поток жидкости, идущей вдоль одной из сторон угла (скажем, в направлении от A к O), плавно поворачивался бы, переходя в поток, идущий вдоль второй плоскости в направлении от края угла (от O к B). При турбулентном же обтекании картина движения оказывается совершенно иной.

[1]) Об этом свойстве говорят как о *перемежаемости* турбулентности. Его надо отличать от аналогичного свойства структуры движения в глубине турбулентной области, которое тоже называют перемежаемостью. В этой книге не рассматриваются существующие модельные представления об этих явлениях.

Поток жидкости, идущий вдоль одной из сторон угла, теперь не поворачивается, дойдя до края угла, а продолжает распространяться в прежнем направлении. Вдоль другой же стороны возникает поток жидкости, подтекающей в направлении к краю угла (от B к O). Смешивание обоих потоков происходит в турбулентной области [1] (границы сечения этой области указаны на рис. 24 штриховой линией). Происхождение такой области можно наглядно описать следующим образом. Представим себе такое течение жидкости, при котором идущий от A к O равномерный поток продолжал бы течь в том же направлении, заполняя все пространство кверху от плоскости AO и ее продолжения направо в глубь жидкости, а в пространстве под этой плоскостью жидкость была бы вообще неподвижна. Другими словами, мы имели бы при этом поверхность разрыва (продолжение плоскости AO) между жидкостью, текущей с постоянной скоростью, и жидкостью неподвижной. Но такая поверхность разрыва является неустойчивой и не может реально существовать (см. § 29). Эта неустойчивость приводит к ее «разбалтыванию» и образованию области турбулентного движения. Подтекающий от B к O поток возникает при этом в результате того, что в область турбулентности должно происходить втекание жидкости извне.

Определим форму области турбулентного движения. Выберем ось x указанным на рис. 24 образом; начало координат находится в точке O. Обозначим через Y_1 и Y_2 расстояния от плоскости xz до верхней и нижней границ турбулентной области; требуется определить зависимость Y_1 и Y_2 от x. Эту зависимость легко определить непосредственно из соображений подобия. Поскольку все размеры плоскостей бесконечны, то в нашем распоряжении нет никаких характерных для рассматриваемого движения постоянных параметров с размерностью длины. Отсюда следует, что единственной возможной зависимостью величин Y_1, Y_2 от расстояния x является их прямая пропорциональность:

$$Y_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot x, \quad Y_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot x. \tag{36.1}$$

Коэффициенты пропорциональности являются просто численными постоянными; мы пишем их в виде $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, так что α_1 и α_2 — углы наклона обеих границ турбулентной области к оси x. Таким образом, область турбулентного движения ограничена двумя плоскостями, пересекающимися вдоль линии края обтекаемого угла.

Значения углов α_1 и α_2 зависят только от величины обтекаемого угла и не зависят, например, от скорости набегающего потока жидкости. Они не могут быть вычислены теоретически;

[1]) Напоминаем, что вне турбулентной области имеет место безвихревое турбулентное движение, постепенно переходящее в ламинарное по мере удаления от границ этой области.

экспериментальные данные дают, например, для обтекания прямого угла значения $\alpha_1 = 5^\circ$, $\alpha_2 = 10^\circ$ [1]).

Скорости потоков жидкости с обеих сторон угла неодинаковы; их отношение является определенным числом, зависящим опять-таки только от величины угла. При не слишком малых углах одна из скоростей оказывается значительно больше другой — именно, большей является скорость «основного» потока, в направлении которого расположена турбулентная область (поток от A к O). Так, при обтекании прямого угла скорость потока вдоль плоскости AO в 30 раз больше скорости потока от B к O.

Отметим еще, что разность давлений жидкости по обе стороны турбулентной области очень мала. Так, при обтекании прямого угла оказывается

$$p_1 - p_2 = 0{,}003\rho U_1^2,$$

где U_1 — скорость набегающего потока (от A к O), p_1 — давление в верхнем (вдоль AO), а p_2 — в нижнем (вдоль BO) потоках жидкости.

В предельном случае равного нулю обтекаемого угла мы имеем дело просто с краем пластинки, вдоль обеих сторон которой течет жидкость. Угол раствора $\alpha_1 + \alpha_2$ турбулентной области при этом тоже обращается в нуль, т. е. турбулентная область исчезает; скорости же потоков по обеим сторонам пластинки становятся одинаковыми. При увеличении же угла AOB наступает момент, когда плоскость BO касается нижней границы турбулентной области; угол AOB является при этом уже тупым. При дальнейшем увеличении угла AOB область турбулентности будет оставаться ограниченной с одной стороны поверхностью твердой стенки. По существу, мы имеем при этом дело просто с явлением отрыва, с линией отрыва вдоль края угла. Угол раствора турбулентной области остается все время конечным.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу о бьющей из конца тонкой трубки турбулентной струе, распространяющейся в неограниченном пространстве, заполненном той же жидкостью (задача о ламинарном движении в такой «затопленной» струе была решена в § 23). На больших по сравнению с размерами отверстия трубы расстояниях (о которых только и будет идти речь) струя аксиально симметрична вне зависимости от конкретной формы отверстия.

Определим форму области турбулентного движения в струе. Выберем ось струи в качестве оси x, а радиус области турбулентности обозначим буквой R; требуется определить зависимость R

[1]) Здесь и в других случаях ниже имеются в виду экспериментальные данные о распределении скоростей в поперечном сечении турбулентной струи, обработанные с помощью расчетов по полуэмпирическим теориям турбулентности (см. примеч. на с. 215).

от x (x отсчитывается от точки выхода струи). Как и в предыдущем примере, эту зависимость легко определить непосредственно из соображений размерности. На расстояниях, больших по сравнению с размерами отверстия трубы, конкретная форма и размеры отверстия не могут играть роли для формы струи. Поэтому в нашем распоряжении нет никаких характеристических параметров с размерностью длины. Отсюда опять следует, что R должно быть пропорционально x:

$$R = \operatorname{tg}\alpha \cdot x, \tag{36.2}$$

где численная постоянная $\operatorname{tg}\alpha$ одинакова для всех струй. Таким образом, турбулентная область представляет собой конус; эксперимент дает для угла раствора 2α этого конуса значение около 25° (рис. 25) [1].

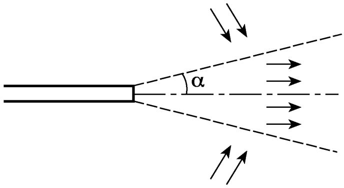


Рис. 25

Движение в струе происходит в основном вдоль ее оси. Ввиду отсутствия каких-либо параметров размерности длины или скорости, которые могли бы характеризовать движение в струе [2], распределение продольной (средней по времени) скорости u_x в ней должно иметь вид

$$u_x(r,\, x) = u_0(x) f\left(\frac{r}{R(x)}\right), \tag{36.3}$$

где r — расстояние от оси струи, а u_0 — скорость на оси. Другими словами, профили скорости в различных сечениях струи отличаются только масштабами измерения расстояния и скорости (в этой связи говорят об *автомодельности* структуры струи). Функция $f(\xi)$ (равная 1 при $\xi = 0$) быстро убывает с увеличением ее аргумента. Она становится равной $1/2$ уже при $\xi = 0{,}4$, а на границе области достигает значения $\sim 0{,}01$. Что касается поперечной скорости, то она сохраняет вдоль сечения турбулентной области примерно одинаковый порядок величины и на границе области равна около $-0{,}025 u_0$, будучи направлена здесь внутрь струи. За счет этой поперечной скорости и осуществляется втекание жидкости в турбулентную область. Движение вне турбулентной области можно определить теоретически (см. задачу 1).

[1]) Формула (30.2) дает $R = 0$ при $x = 0$, т. е. отсчет координаты x ведется от точки, которая была бы выходной для струи, бьющей из точечного источника. Эта точка может не совпадать с реальным положением выходного отверстия, отстоя от него (назад) на расстояние того же порядка величины, которое требуется для установления закона (36.2). Интересуясь асимптотическим законом при больших x, этим отличием можно пренебречь.

[2]) Напомним лишний раз, что речь идет о развитой турбулентности в струе и потому вязкость не должна входить в рассматриваемые формулы.

Зависимость скорости в струе от расстояния x можно определить, исходя из следующих простых соображений. Полный поток импульса в струе через сферическую поверхность (с центром в точке выхода струи) должен оставаться неизменным при изменении ее радиуса. Плотность потока импульса в струе $\sim\rho u^2$, где u — порядок величины некоторой средней скорости в струе. Площадь той части поперечного сечения струи, в которой скорость заметно отлична от нуля, порядка величины R^2. Поэтому полный поток импульса $P \sim \rho u^2 R^2$. Подставив сюда (36.2), получим

$$u \sim \sqrt{\frac{P}{\rho}}\,\frac{1}{x}, \tag{36.4}$$

т. е. скорость падает обратно пропорционально расстоянию от точки выхода струи.

Количество (масса) жидкости Q, протекающей в единицу времени через поперечное сечение турбулентной области струи — порядка величины произведения $\rho u R^2$. Подставив сюда (36.2) и (36.4), найдем, что $Q = \mathrm{const}\cdot x$ (если две переменные величины, меняющиеся в широких пределах, всегда одного порядка величины, то они вообще пропорциональны друг другу; поэтому мы пишем формулу со знаком равенства). Коэффициент пропорциональности здесь удобно выразить не через поток импульса P, а через количество жидкости Q_0, выбрасываемой в единицу времени из трубки. На расстояниях порядка величины линейных размеров отверстия трубки a должно быть $Q \sim Q_0$. Отсюда следует, что $\mathrm{const} \sim Q_0/a$, так что можно написать

$$Q = \beta Q_0 \frac{x}{a}, \tag{36.5}$$

где β — численный коэффициент, зависящий только от формы отверстия. Так, для круглого отверстия с радиусом a эмпирическое значение $\beta \approx 1{,}5$. Таким образом, расход жидкости через сечение турбулентной области возрастает с расстоянием x, — жидкость втягивается в турбулентную область [1]).

Движение в каждом участке длины струи характеризуется числом Рейнольдса для этого участка, определяемым как $\dfrac{uR}{\nu}$. Но в силу (36.2) и (36.4) произведение uR остается постоянным вдоль струи, так что число Рейнольдса одинаково для всех участков струи. В качестве этого числа может быть выбрано отношение $Q_0/(\rho a\nu)$. Входящая сюда постоянная Q_0/a является тем единственным параметром, который определяет все движения в струе. При увеличении «мощности» струи Q_0 (при задан-

[1]) Полный же поток жидкости через всю бесконечную плоскость, проведенную поперек струи, бесконечен — струя, бьющая в неограниченное пространство, увлекает за собой бесконечное количество жидкости.

ной величине a отверстия) достигается в конце концов некоторое критическое значение числа Рейнольдса, после которого движение делается турбулентным одновременно вдоль всей длины струи [1]).

Задачи

1. Определить среднее движение жидкости в струе вне турбулентной области.

Р е ш е н и е. Выбираем сферические координаты r, θ, φ с полярной осью вдоль оси струи и началом координат в точке ее выхода. В силу аксиальной симметрии струи компонента u_φ средней скорости отсутствует, а u_θ, u_r являются функциями только от r и θ. Те же соображения, что и в задаче о ламинарной струе в § 23, показывают, что u_r, u_θ должны иметь вид

$$u_\theta = \frac{f(\theta)}{r}, \quad u_r = \frac{F(\theta)}{r}.$$

Вне турбулентной области движение жидкости потенциально, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$, откуда

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) = 0.$$

Но $r u_\theta$ не зависит от r, поэтому $\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{dF}{d\theta} = 0$, откуда $F = \mathrm{const} \equiv$ $\equiv -b$, т. е.

$$u_r = -\frac{b}{r}. \tag{1}$$

Из уравнения непрерывности

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, u_\theta) = 0$$

получаем теперь

$$f = \frac{\mathrm{const} - b\cos\theta}{\sin\theta}.$$

---

[1]) Для более подробного расчета различных случаев турбулентного движения обычно пользуются различными «полуэмпирическими» теориями, основанными на определенных предположениях о зависимости коэффициента турбулентной вязкости от градиента средней скорости. Так, в теории Прандтля полагается (для плоского течения)

$$\nu_{\text{турб}} = l^2 \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|,$$

причем зависимость l (так называемой «длины пути перемешивания») от координат выбирается в соответствии с соображениями подобия; для свободных турбулентных струй, например, полагается $l = cx$, где c — эмпирическая численная постоянная. Такие теории обычно дают хорошее согласие с опытом и потому имеют прикладное значение в качестве хороших интерполяционных расчетных схем. При этом, однако, оказывается невозможным приписать входящим в теорию характерным эмпирическим численным постоянным универсальных значений; так, например, отношение длины пути перемешивания l к поперечным размерам турбулентной области приходится выбирать различным для разных конкретных случаев. Следует также отметить, что хорошее согласие с опытными данными удается получить, исходя из различных выражений для турбулентной вязкости.

Постоянная интегрирования должна быть положена равной $-b$, чтобы скорость не обращалась в бесконечность при $\theta = \pi$ (что касается обращения f в бесконечность при $\theta = 0$, то оно несущественно, поскольку рассматриваемое здесь решение относится только к пространству вне турбулентной области, а направление $\theta = 0$ лежит внутри нее). Таким образом,

$$u_\theta = -\frac{b}{r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{b}{r}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{2}$$

Проекция скорости на направление струи (u_x) и абсолютная величина скорости равны

$$u_x = \frac{b}{r} = \frac{b\cos\theta}{x}, \quad u = \frac{b}{r}\frac{1}{\sin(\theta/2)}. \tag{3}$$

Постоянную b можно связать с постоянной $B = \beta Q_0/a$, входящей в формулу (36.5). Рассмотрим отрезок конуса турбулентной области, вырезаемый двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. Количество жидкости, втекающей в 1 с извне в этот участок турбулентной области, равно

$$dQ = -2\pi r\rho\sin\alpha u_\theta\, dr = 2\pi b\rho\,(1+\cos\alpha)\, dr,$$

а из формулы (36.5) имеем $dQ = B\,dx = B\cos\alpha\, dr$. Сравнивая оба выражения, получаем

$$b = \frac{B}{2\pi\rho}\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{4}$$

На границе турбулентной области скорость $\mathbf{u}$ направлена внутрь этой области, образуя угол $(\pi-\alpha)/2$ с положительным направлением оси x.

Сравним среднюю скорость внутри турбулентной области, определенную как

$$\overline{u}_x = \frac{Q}{\pi R^2\rho} = \frac{B}{\pi\rho x\operatorname{tg}^2\alpha}$$

со скоростью $(u_x)_{\text{пот}}$ на границе этой области. Взяв первую из формул (3) с $\theta = \alpha$, получим

$$\frac{(u_x)_{\text{пот}}}{\overline{u}_x} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

При $\alpha = 12^\circ$ получаем для этого отношения значение 0,011, т. е. на границе турбулентной области скорость мала по сравнению со средней скоростью внутри области.

2. Определить закон изменения размеров и скорости в турбулентной затопленной струе, бьющей из бесконечно длинной тонкой щели.

Р е ш е н и е. По тем же причинам, как и для аксиальной струи, заключаем, что турбулентная область ограничена двумя плоскостями, пересекающимися вдоль линии щели, т. е. полуширина струи:

$$Y = x\operatorname{tg}\alpha.$$

Поток импульса в струе (отнесенной к единице длины щели) — порядка $\rho u^2 Y$. Для зависимости средней скорости u от x получаем поэтому

$$u \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}.$$

Расход жидкости через сечение турбулентной области струи $Q \sim \rho u Y$, откуда

$$Q = \text{const}\cdot\sqrt{x}.$$

Местное число Рейнольдса $\mathrm{R} = uY/\nu$ возрастает с ростом x по такому же закону.

Эмпирическое значение угла раствора плоской струи — примерно такое же, как у круглой струи ($2\alpha \approx 25^\circ$).

§ 37. Турбулентный след

При числах Рейнольдса, значительно превышающих критическое значение, при обтекании твердого тела потоком жидкости позади тела образуется длинная область турбулентного движения. Эту область называют *турбулентным следом*. На больших (по сравнению с размерами тела) расстояниях простые соображения позволяют определить форму следа и закон убывания скорости жидкости в нем (*L. Prandtl*, 1926).

Как и при исследовании ламинарного следа в § 21, обозначим через $\mathbf{U}$ скорость натекающего на тело потока и выберем ее направление в качестве оси x. Усредненную же по турбулентным пульсациям скорость жидкости в каждой точке будем писать в виде $\mathbf{U}+\mathbf{u}$. Обозначив буквой a некоторую поперечную ширину следа, мы определим зависимость a от x. Если при обтекании тела подъемная сила отсутствует, то на больших расстояниях от тела след обладает аксиальной симметрией и имеет круговое сечение; величиной a может являться в этом случае радиус следа. Наличие же подъемной силы приводит к появлению некоторого избранного направления в плоскости yz, и след уже не будет обладать аксиальной симметрией ни на каких расстояниях от тела.

Продольная компонента скорости жидкости в следе $\sim U$, а поперечная — порядка некоторого среднего значения u турбулентной скорости. Поэтому угол между линиями тока и осью x — порядка величины отношения u/U. С другой стороны, граница следа является, как мы знаем, границей, за которую не выходят линии тока вихревого турбулентного движения. Отсюда следует, что угол наклона линии контура продольного сечения следа к оси x — тоже порядка величины u/U. Это значит, что мы можем написать:

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{u}{U}. \tag{37.1}$$

Далее, воспользуемся формулами (21.1), (21.2), определяющими действующие на тело силы через интегралы от скорости жидкости в следе (причем под скоростью подразумевается теперь ее усредненное значение). В этих интегралах область интегрирования $\sim a^2$. Поэтому оценка интеграла приводит к соотношению $F \sim \rho U u a^2$, где F — порядок величины силы сопротивления или подъемной силы. Таким образом,

$$u \sim \frac{F}{\rho U a^2}. \tag{37.2}$$

Подставляя это в (37.1), находим

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{F}{\rho U^2 a^2},$$

откуда путем интегрирования

$$a \sim \left(\frac{Fx}{\rho U^2}\right)^{1/3}. \tag{37.3}$$

Таким образом, ширина следа растет пропорционально кубическому корню из расстояния от тела. Для скорости u имеем из (37.2) и (37.3):

$$u \sim \left(\frac{FU}{\rho x^2}\right)^{1/3}, \tag{37.4}$$

т. е. средняя скорость движения жидкости внутри следа падает обратно пропорционально $x^{2/3}$.

Движение жидкости в каждом участке длины следа характеризуется числом Рейнольдса $\mathrm{R}{\sim}au/\nu$. Подставляя (37.3) и (37.4), получаем

$$\mathrm{R} \sim \frac{F}{\nu\rho U a} \sim \frac{1}{\nu}\left(\frac{F^2}{\rho^2 U x}\right)^{1/3}.$$

Мы видим, что это число не остается постоянным вдоль длины следа в противоположность тому, что мы имели в случае турбулентной струи. На достаточно больших расстояниях от тела R делается настолько малым, что движение в следе перестает быть турбулентным. Дальше простирается область ламинарного следа, свойства которого были уже исследованы в § 21.

В § 21 были получены формулы, описывающие движение жидкости вне следа вдали от тела. Эти формулы применимы к движению вне турбулентного следа в той же мере, что и вне ламинарного следа.

Отметим здесь некоторые общие свойства распределения скоростей вокруг обтекаемого тела. Как внутри турбулентного следа, так и вне его, скорость (речь идет везде о скорости $\mathbf{u}$) падает с увеличением расстояния от тела. При этом, однако, продольная скорость u_x падает вне следа значительно быстрее (как $1/x^2$), чем внутри следа. Поэтому вдали от тела можно считать, что продольная скорость u_x имеется только внутри следа, а вне его $u_x = 0$. Можно сказать, что u_x спадает от некоторого максимального значения на «оси» следа до нуля на его границе. Что же касается поперечных скоростей u_y, u_z, то на границе следа они того же порядка величины, что и внутри него, а при удалении от следа (при неизменном расстоянии от тела) они быстро падают.

§ 38. Теорема Жуковского

Описанный в конце предыдущего параграфа характер распределения скоростей вокруг обтекаемого тела не относится к исключительным случаям, когда толщина образующегося за телом следа очень мала по сравнению с его шириной. Такой след

образуется при обтекании тел, толщина которых (в направлении оси y) мала по сравнению с их шириной в направлении z (длина же в направлении обтекания — оси x — может быть произвольной), другими словами, речь идет об обтекании тел, поперечное (к направлению движения) сечение которых обладает сильно вытянутой в одном направлении формой. Сюда относятся, в частности, обтекания *крыльев* — тел, размах которых велик по сравнению со всеми остальными их размерами.

Ясно, что в таком случае нет никаких причин для того, чтобы перпендикулярная к плоскости турбулентного следа скорость u_y заметно уменьшалась уже на расстояниях порядка толщины следа. Напротив, эта скорость будет теперь иметь одинаковый порядок величины как внутри следа, так и на значительных (порядка размаха крыла) расстояниях от него. При этом, конечно, предполагается, что подъемная сила отлична от нуля; в противном случае поперечная скорость практически вообще отсутствует.

Рассмотрим вертикальную подъемную силу F_y, развивающуюся при таком обтекании. Согласно формуле (21.2) она определяется интегралом

$$F_y = -\rho U \iint u_y \, dy \, dz, \tag{38.1}$$

причем ввиду характера распределения скорости u_y интегрирование в данном случае должно производиться по всей поперечной плоскости. Более того, поскольку толщина следа (по оси y) мала, а скорость u_y внутри него отнюдь не велика по сравнению с этой же скоростью вне следа, то в рассматриваемом случае можно с достаточной точностью ограничиться при интегрировании по dy интегрированием только по области вне следа, т. е. написать:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_y \, dy \approx \int_{y_1}^{+\infty} u_y \, dy + \int_{-\infty}^{y_2} u_y \, dy,$$

где y_1 и y_2 — координаты границ следа (рис. 26).

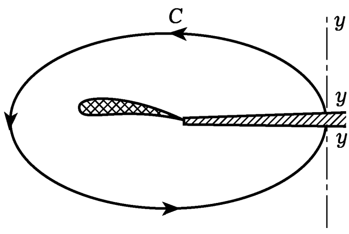


Рис. 26

Но вне следа движение потенциально и $u_y = \partial\varphi/\partial y$; имея в виду, что на бесконечности $\varphi = 0$, получаем поэтому

$$\int u_y \, dy = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где φ_2 и φ_1 — значения потенциала на обеих сторонах следа; можно сказать, что $\varphi_2 - \varphi_1$ есть скачок потенциала на поверхности разрыва, которой можно заменить тонкий след. Что же касается производных от φ, то производная $u_y = \partial\varphi/\partial y$ должна

оставаться непрерывной. Скачок нормальной к поверхности следа компоненты скорости означал бы, что некоторое количество жидкости втекает в след; между тем, в приближении, в котором толщина следа пренебрегается, этот эффект должен отсутствовать. Таким образом, мы заменяем след поверхностью тангенциального разрыва. Далее, в этом же приближении на следе должно быть непрерывно также и давление. Поскольку изменение давления определяется согласно формуле Бернулли в первом приближении величиной $\rho U u_x = \rho U \partial\varphi/\partial x$, то отсюда следует, что должна быть непрерывна и производная $\partial\varphi/\partial x$. Производная же $\partial\varphi/\partial z$ — скорость в направлении размаха крыла — испытывает, вообще говоря, скачок.

Ввиду непрерывности производной $\partial\varphi/\partial x$ скачок $\varphi_2-\varphi_1$ есть величина, зависящая только от z, но не от координаты x вдоль длины следа. Таким образом, получаем для подъемной силы следующую формулу:

$$F_y = -\rho U \int (\varphi_2 - \varphi_1)\, dz. \tag{38.2}$$

Интегрирование по dz распространяется фактически лишь по ширине следа (вне следа, конечно, $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv 0$).

Эту формулу можно представить в несколько ином виде. Для этого замечаем, что по известным свойствам интегралов от градиента скаляра можно написать разность $\varphi_2 - \varphi_1$ в виде криволинейного интеграла

$$\int \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \int (u_y\, dy + u_x\, dx),$$

взятого по контуру, выходящему из точки y_1, огибающему тело и приходящему в точку y_2, проходя, таким образом, везде в области потенциального движения. А благодаря тонкости следа можно, не изменяя интеграла с точностью до малых величин высшего порядка, дополнить этот длинный контур коротким отрезком от y_1 до y_2, превратив его таким образом в замкнутый. Обозначая буквой Γ циркуляцию скорости по замкнутому контуру C, охватывающему тело (рис. 26):

$$\Gamma = \oint \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1, \tag{38.3}$$

получаем для подъемной силы формулу

$$F_y = -\rho U \int \Gamma\, dz. \tag{38.4}$$

Знак циркуляции скорости выбирается всегда для обхода контура в направлении против часовой стрелки. Знак в формуле (38.3) связан также и с выбором направления обтекания: мы предполагали везде, что обтекание происходит в положительном направлении оси x (поток натекает слева направо).

Устанавливаемая формулой (38.4) связь подъемной силы с циркуляцией скорости составляет содержание *теоремы Н. Е. Жуковского* (1906). К применению этой теоремы к хорошо обтекаемым крыльям мы вернемся еще в § 46.

Задачи

1. Определить закон расширения турбулентного следа, образующегося при поперечном обтекании бесконечно длинного цилиндра.

Решение. Для силы сопротивления f_x, отнесенной к единице длины цилиндра, имеем по порядку величины $f_x \sim \rho U u Y$. Комбинируя это с соотношением (37.1), получаем для ширины следа Y:

$$Y = A\sqrt{\frac{x f_x}{\rho U^2}}, \tag{1}$$

где A — постоянная. Средняя скорость u в следе падает по закону

$$u \sim \sqrt{\frac{f_x}{\rho x}}.$$

Число Рейнольдса $\mathrm{R} \sim Yu/\nu \sim f_x/(\nu\rho U)$ не зависит от x и потому ламинарного участка след не имеет.

Укажем, что согласно экспериментальным данным постоянный коэффициент в (1) равен $A = 0{,}9$ (причем Y есть полуширина следа); если под Y понимать расстояние, на котором скорость u_x падает до половины своего максимального значения по середине следа, то $A = 0{,}4$.

2. Определить движение вне следа, образующегося при поперечном обтекании бесконечно длинного тела.

Решение. Вне следа движение потенциально (потенциал обозначаем здесь буквой Φ в отличие от угла φ в цилиндрической системе координат r, z, φ с осью z вдоль длины тела). Подобно тому как было сделано в (21.16), заключаем, что должно быть

$$\int \mathbf{u}\, d\mathbf{f} = \int \nabla\Phi\, d\mathbf{f} = \frac{f_x}{\rho U},$$

где теперь интегрирование производится по поверхности цилиндра большого радиуса с осью вдоль оси x и длиной, равной единице, а f_x есть сила сопротивления, отнесенная к единице длины тела. Удовлетворяющее этому условию решение двумерного уравнения Лапласа $\Delta\Phi = 0$ есть

$$\Phi = \frac{f_x}{2\pi\rho U}\ln r.$$

Далее, для подъемной силы имеем согласно (38.2)

$$f_y = \rho U(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Наименее быстро убывающим с расстоянием решением уравнения Лапласа, испытывающим скачок на плоскости $\varphi = 0$, является

$$\Phi = \mathrm{const}\,\varphi = -\frac{f_y}{2\pi\rho U}\varphi$$

(выбор константы определяется тем, что $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$). Движение жидкости определяется суммой обоих найденных решений:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\rho U}(f_x \ln r - f_y\varphi). \tag{2}$$

Цилиндрические компоненты скорости **u** равны

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{f_x}{2\pi\rho U r}, \quad u_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{f_y}{2\pi\rho U r}. \tag{3}$$

Скорость **u** образует с цилиндрическим радиус-вектором постоянный угол, тангенс которого равен f_y/f_x.

3. Определить закон изгибания следа за бесконечно длинным телом при наличии подъемной силы.

Р е ш е н и е. При наличии подъемной силы след (рассматриваемый как поверхность разрыва) изгибается в плоскости xy. Закон $y = y(x)$ этого изгибания определяется уравнением

$$\frac{dx}{u_x + U} = \frac{dy}{u_y}.$$

Подставив сюда согласно (3) $u_y \approx -f_y/(2\pi\rho U x)$ и пренебрегая u_x по сравнению с U, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_y}{2\pi\rho U^2 x},$$

откуда

$$y = \mathrm{const} - \frac{f_y}{2\pi\rho U^2}\ln x.$$

ГЛАВА IV

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

§ 39. Ламинарный пограничный слой

Мы уже неоднократно ссылались на то обстоятельство, что очень большие числа Рейнольдса эквивалентны очень малой вязкости, в результате чего жидкость может рассматриваться при таких R как идеальная. Однако такое приближение во всяком случае непригодно для движения жидкости вблизи твердых стенок. Граничные условия для идеальной жидкости требуют лишь исчезновения нормальной составляющей скорости; касательная же к поверхности обтекаемого тела компонента скорости остается, вообще говоря, конечной. Между тем, у вязкой реальной жидкости скорость на твердых стенках должна обращаться в нуль.

Отсюда можно сделать вывод, что при больших числах Рейнольдса падение скорости до нуля будет происходить почти полностью в тонком пристеночном слое жидкости. Этот слой носит название пограничного и характеризуется, следовательно, наличием в нем значительных градиентов скорости. Движение в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным. Здесь мы рассмотрим свойства ламинарного пограничного слоя. Граница этого слоя не является, конечно, резкой, и переход между ламинарным движением в нем и в основном потоке жидкости происходит непрерывным образом.

Падение скорости в пограничном слое обусловливается в конечном итоге вязкостью жидкости, которой нельзя пренебречь здесь, несмотря на большие значения R. Математически это проявляется в том, что градиенты скорости в пограничном слое велики и потому вязкие члены в уравнениях движения, содержащие производные от скорости по координатам, велики, несмотря на малость ν [1]).

Выведем уравнения движения жидкости в ламинарном пограничном слое. Для простоты вывода рассмотрим двумерное обтекание жидкостью плоского участка поверхности тела. Эту плоскость выберем в качестве плоскости xz, причем ось x направлена по направлению обтекания. Распределение скорости не зависит от координаты z; z-компонента скорости отсутствует.

---

[1]) Идея и основные уравнения теории ламинарного пограничного слоя были сформулированы Прандтлем (*L. Prandtl*, 1904).

Точные гидродинамические уравнения Навье–Стокса и уравнение непрерывности, написанные в компонентах, принимают вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right), \tag{39.1}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right), \tag{39.2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{39.3}$$

Движение предполагается стационарным, и потому производных по времени не пишем.

Ввиду тонкости пограничного слоя ясно, что движение в нем будет происходить в основном параллельно обтекаемой поверхности, т. е. скорость v_y будет мала по сравнению с v_x (это видно уже и непосредственно из уравнения непрерывности).

Вдоль направления оси y скорость меняется быстро — заметное изменение ее происходит на расстояниях порядка толщины δ пограничного слоя. В направлении же оси x скорость меняется медленно; заметное изменение ее происходит здесь на протяжении расстояний порядка характеристической длины l задачи (скажем, размеров тела). Поэтому ее производные по y велики по сравнению с производными по x. Из сказанного следует, что в уравнении (39.1) можно пренебречь производной $\partial^2 v_x/\partial x^2$ по сравнению с $\partial^2 v_x/\partial y^2$, а сравнивая первое уравнение со вторым, мы видим, что производная $\partial p/\partial y$ мала по сравнению с $\partial p/\partial x$ (по порядку величины — в отношении v_y/v_x). В рассматриваемом приближении можно положить просто

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{39.4}$$

т. е. можно считать, что в пограничном слое нет поперечного градиента давления. Другими словами, давление в пограничном слое равно давлению $p(x)$, имеющемуся в основном потоке жидкости и являющемуся при решении задачи о пограничном слое заданной функцией от x. В уравнении (39.1) можно теперь написать вместо $\partial p/\partial x$ полную производную $dp(x)/dx$; эту производную можно выразить с помощью скорости $U(x)$ основного потока. Поскольку вне пограничного слоя движение потенциально, то справедливо уравнение Бернулли $p + \rho U^2/2 = \mathrm{const}$, откуда

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{dU}{dx}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений движения в ламинарном пограничном слое — *уравнения Прандтля* — в виде

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=U\frac{dU}{dx}, \tag{39.5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{39.6}$$

Граничные условия к этим уравнениям требуют обращения в нуль скорости на стенке:

$$v_x=v_y=0 \quad \text{при } y=0. \tag{39.7}$$

При удалении от стенки продольная скорость должна асимптотически приближаться к скорости основного потока:

$$v_x=U(x) \quad \text{при } y\to\infty \tag{39.8}$$

(постановка же отдельного условия для v_y на бесконечности не требуется).

Можно легко показать, что уравнения (39.5), (39.6) (выведенные для обтекания плоской стенки) остаются справедливыми и в более общем случае двумерного обтекания тела (поперечное обтекание бесконечно длинного цилиндра произвольного сечения). При этом x есть расстояние, отсчитываемое по длине линии контура поперечного сечения тела от некоторой его точки, а y — расстояние от поверхности тела (по нормали к ней).

Пусть U_0 — характеристическая скорость данной задачи (например, скорость на бесконечности натекающего на тело потока жидкости). Введем вместо координат x, y и скоростей v_x, v_y безразмерные переменные x', y', v'_x, v'_y согласно определениям:

$$x=lx', \quad y=\frac{ly'}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \quad v_x=U_0v'_x, \quad v_y=\frac{U_0v'_y}{\sqrt{\mathrm{R}}} \tag{39.9}$$

(и соответственно полагаем $U=U_0U'$), где $\mathrm{R}=\dfrac{U_0l}{\nu}$. Тогда уравнения (39.5), (39.6) принимают вид

$$v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial v'_x}{\partial y'}-\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}=U'\frac{dU'}{dx'}, \qquad \frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}=0. \tag{39.10}$$

Эти уравнения (а также и граничные условия к ним) не содержат вязкости. Это значит, что их решения не зависят от числа Рейнольдса. Таким образом, мы приходим к важному результату: при изменении числа Рейнольдса вся картина движения в пограничном слое подвергается лишь подобному преобразованию, при котором продольные расстояния и скорости остаются неизменными, а поперечные меняются обратно пропорционально корню из R.

Далее, можно утверждать, что получающиеся в результате решения уравнений (39.10) безразмерные скорости v'_x, v'_y, как не зависящие от R, должны быть порядка величины единицы. Из формул (39.9) можно, следовательно, заключить, что

$$v_y \sim U_0/\sqrt{\mathrm{R}}, \tag{39.11}$$

т. е. отношение поперечной скорости к продольной обратно пропорционально $\sqrt{\mathrm{R}}$. То же самое относится к *толщине пограничного слоя* δ: в безразмерных координатах x', y' толщина $\delta' \sim 1$, а в реальных координатах x, y:

$$\delta \sim l/\sqrt{\mathrm{R}}. \tag{39.12}$$

Применим уравнения пограничного слоя к обтеканию плоской полубесконечной пластинки плоско-параллельным потоком жидкости (*H. Blasius*, 1908). Пусть пластинка совпадает с полуплоскостью xz, соответствующей $x > 0$ (так что передним краем пластинки является линия $x = 0$). Скорость основного потока в этом случае постоянна: $U = \mathrm{const}$. Уравнения (39.5), (39.6) принимают вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{39.13}$$

В решениях уравнений Прандтля величины v_x/U и $v_y \times (l/(U\nu))^{1/2}$ могут быть, как мы видели, функциями только от $x' = x/l$ и $y' = y(U/l\nu)^{1/2}$. Но в задаче о полубесконечной пластинке нет никаких характерных параметров длины l. Поэтому v_x/U может зависеть только от такой комбинации x' и y', которая не содержала бы l; таковой является

$$\frac{y'}{\sqrt{x'}} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}.$$

Что же касается v_y, то здесь функцией от $y'/\sqrt{x'}$ должно быть произведение $v'_y\sqrt{x'}$.

Чтобы сразу учесть связь между v_x и v_y, выражаемую уравнением непрерывности, введем функцию тока ψ согласно определению (10.9):

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{39.14}$$

Указанным выше свойствам функций $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ отвечает функция тока вида

$$\psi = \sqrt{x\nu U}\, f(\xi), \quad \xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}. \tag{39.15}$$

Тогда

$$v_x = Uf'(\xi), \quad v_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}(\xi f' - f). \tag{39.16}$$

Уже без количественного определения функции $f(\xi)$ можно сделать следующий существенный вывод. Основной характеристикой движения в пограничном слое является распределение в нем продольной скорости v_x (поскольку v_y мала). Эта скорость возрастает от нуля на поверхности пластинки до определенной доли U при определенном значении ξ. Поэтому можно заключить, что толщина пограничного слоя на обтекаемой пластинке (определенная как значение y, на котором v_x/U достигает определенного значения $\sim$1) — порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{x\nu/U}. \tag{39.17}$$

Таким образом, толщина пограничного слоя возрастает пропорционально корню из расстояния от края пластинки.

Подставив (39.16) в первое из уравнений (39.13) получим уравнение для функции $f(\xi)$:

$$ff'' + 2f''' = 0. \tag{39.18}$$

Граничные же условия (39.7), (39.8) запишутся в виде

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \tag{39.19}$$

(распределение скоростей, очевидно, симметрично относительно плоскости $y = 0$; поэтому достаточно рассмотреть сторону $y > 0$). Уравнение (39.18) должно решаться численными методами. График получающейся таким образом функции $f'(\xi)$ изображен на рис. 27. Мы видим, что $f'(\xi)$ весьма быстро стремится к своему предельному значению — к единице. Предельный вид самой функции $f(\xi)$ при малых ξ:

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\alpha\xi^2 + O(\xi^5), \ \ \alpha = 0{,}332; \tag{39.20}$$

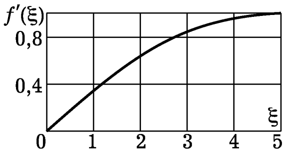


Рис. 27

членов с ξ^3 и ξ^4 в этом разложении не может быть, в чем легко убедиться из уравнения (39.18). Предельный же вид функции при больших ξ:

$$f(\xi) = \xi - \beta, \quad \beta = 1{,}72, \tag{39.21}$$

причем погрешность этого выражения, как можно показать, экспоненциально мала.

Сила трения, действующая на единицу площади поверхности пластинки, равна

$$\sigma_{xy} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \eta\left(\frac{U^3}{x\nu}\right)^{1/2} f''(0)$$

или

$$\sigma_{xy} = 0{,}332\sqrt{\frac{\eta\rho U^3}{x}}. \qquad (39.22)$$

Если пластинка имеет длину l (вдоль оси x), то полная действующая на нее сила трения (отнесенная к единице длины вдоль края пластинки) равна

$$F = 2\int_0^l \sigma_{xy}\,dx = 1{,}328\sqrt{\eta\rho l U^3} \qquad (39.23)$$

(множитель 2 учитывает наличие двух сторон пластинки) [1]. Отметим, что сила трения оказывается пропорциональной полуторной степени скорости натекающего потока. Формула (39.23) применима, конечно, только для длинных пластинок, для которых число $\mathrm{R} = Ul/\nu$ достаточно велико. Вместо силы обычно вводят коэффициент сопротивления как безразмерное отношение

$$C = \frac{F}{{}^1\!/\!{}_2\rho U^2\cdot 2l}. \qquad (39.24)$$

Согласно (39.23) эта величина при ламинарном обтекании пластинки обратно пропорциональна корню из числа Рейнольдса:

$$C = 1{,}328\mathrm{R}^{-1/2}. \qquad (39.25)$$

В качестве точно определенной характеристики толщины пограничного слоя можно ввести так называемую *толщину вытеснения* δ^* согласно определению

$$U\delta^* = \int_0^\infty (U - v_x)\,dy. \qquad (39.26)$$

Подставив сюда v_x из (39.16), имеем

$$\delta^* = \sqrt{\frac{x\nu}{U}}\int_0^\infty (1-f')\,d\xi = \sqrt{\frac{x\nu}{U}}[\xi - f(\xi)]_{\xi\to\infty},$$

и с учетом предельного выражения (39.21):

$$\delta^* = \beta\sqrt{\frac{x\nu}{U}} = 1{,}72\sqrt{\frac{x\nu}{U}}. \qquad (39.27)$$

Выражение в правой части определения (39.26) есть «дефицит» расхода жидкости в пограничном слое по сравнению с тем,

[1]) Приближение пограничного слоя неприменимо у переднего края пластинки, где $\delta \gtrsim x$. Это обстоятельство, однако, несущественно при вычислении полной силы F ввиду быстрой сходимости интеграла на нижнем пределе.

что было бы в однородном потоке со скоростью U. Поэтому можно сказать, что δ^* есть расстояние, на которое обтекающий поток оттесняется наружу от пластинки из-за замедления жидкости в пограничном слое. С этим оттеснением связано и то обстоятельство, что поперечная скорость v_y в пограничном слое стремится при $y \to \infty$ не к нулю, а к конечному значению

$$v_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}[\xi f' - f]_{\xi\to\infty} = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}} = 0{,}86\sqrt{\frac{\nu U}{x}}. \tag{39.28}$$

Полученные выше количественные формулы относятся, конечно, только к обтеканию пластинки. Качественные же результаты (такие как (39.11), (39.12)) справедливы и для обтекания тела произвольной формы; при этом под l надо понимать размеры тела в направлении обтекания.

Упомянем особо еще о двух случаях пограничного слоя. Если плоский диск (большого радиуса) вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, то для оценки толщины пограничного слоя надо подставить в (39.17) Ωx вместо U (Ω — угловая скорость вращения). Тогда находим

$$\delta \sim (\nu/\Omega)^{1/2}. \tag{39.29}$$

Мы видим, что толщину пограничного слоя можно считать постоянной вдоль поверхности диска (в согласии с полученным в § 23 точным решением этой задачи). Что касается действующего па диск момента сил трения, то расчет с помощью уравнений пограничного слоя приводит, конечно, к формуле (23.4), поскольку эта формула является вообще точной и потому относится к ламинарному движению при любых R.

Наконец, остановимся на вопросе о ламинарном пограничном слое, возникающем на стенках трубы вблизи места входа жидкости в нее. Жидкость вступает в трубу обычно с распределением скоростей, почти постоянным по всему поперечному сечению, и падение скорости происходит только в пограничном слое. По мере удаления от входа начинают тормозиться слои жидкости все ближе к оси трубы. Поскольку количество протекающей жидкости должно оставаться постоянным, то наряду с уменьшением диаметра внутренней части течения (с почти постоянным профилем скоростей) происходит одновременное его ускорение. Так продолжается до тех пор, пока асимптотически не устанавливается пуазейлевское распределение скоростей, которое, таким образом, имеет место только на достаточно большом расстоянии от входа трубы. Легко определить порядок величины длины l этого так называемого начального участка течения. Он определяется тем, что на расстоянии l от входа толщина пограничного слоя делается порядка величины радиуса a трубы, так что пограничный слой как бы заполняет собой все ее сечение. Полагая

в (39.17) $x \sim l$ и $\delta \sim a$, получим

$$l \sim a^2 U/\nu \sim a\mathrm{R}. \tag{39.30}$$

Таким образом, длина начального участка пропорциональна числу Рейнольдса [1]).

Задачи

1. Определить толщину пограничного слоя вблизи критической точки (см. § 10) на обтекаемом жидкостью теле.

Решение. Вблизи точки остановки скорость жидкости (вне пограничного слоя) является линейной функцией расстояния x от этой точки, так что $U = \mathrm{const}\cdot x$. Оценка членов уравнений (39.5), (39.6) приводит к выражению $\delta \sim (\nu/\mathrm{const})^{1/2}$. Таким образом, вблизи критической точки толщина пограничного слоя остается конечной.

2. Определить движение в пограничном слое при конфузорном (см. § 23) течении между двумя пересекающимися плоскостями (*K. Pohlhausen*, 1921).

Решение. Рассматривая пограничный слой на одной из сторон угла, отсчитываем координату x вдоль этой стороны от вершины угла O (см. рис. 8). При течении идеальной жидкости мы имели бы для скорости формулу $U = Q/(\alpha\rho x)$, выражающую собой просто сохранение расхода жидкости Q в потоке (α — угол между пересекающимися плоскостями). Таким образом, в правой части уравнения (39.5) будет стоять $UdU/dx = -Q^2/(\alpha^2\rho^2 x^3)$. Легко видеть, что после этого уравнения (39.5), (39.6) станут инвариантными по отношению к преобразованию $x \to ax$, $y \to ay$, $v_x \to v_x/a$, $v_y \to v_y/a$ с произвольной постоянной a. Это значит, что можно искать v_x и v_y в виде

$$v_x = \frac{Q}{\alpha\rho x} f(\xi), \quad v_y = \frac{Q}{\alpha\rho x} f_1(\xi), \quad \xi = \frac{y}{x},$$

тоже инвариантном относительно указанного преобразования. Из уравнения непрерывности (39.6) находим, что $f_1 = \xi f$, после чего из (39.5) получаем для функции $f(\xi)$ уравнение:

$$\frac{\rho\nu\alpha}{Q} f'' = 1 - f^2. \tag{1}$$

Граничные условия (39.8) означают, что должно быть $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$. Первый интеграл уравнения (1) есть

$$\frac{\rho\nu\alpha}{2Q} f'^2 = f - \frac{f^3}{3} + \mathrm{const}.$$

Поскольку при $\xi \to \infty$ функция f стремится к единице, то мы видим, что и f' стремится к определенному пределу, и ясно, что этот предел может быть

[1]) В этой книге не излагается значительно более сложная и менее наглядная теория пограничного слоя в сжимаемой жидкости. Сжимаемость должна учитываться при скоростях, сравнимых со скоростью звука (или превышающих ее). Ввиду возникающего при этом сильного разогрева газа и обтекаемого тела оказывается необходимым рассматривать уравнения движения в пограничном слое совместно с уравнением теплопередачи в нем. Может оказаться также необходимым учет температурной зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности газа.

только нулем. Определяя отсюда const, находим

$$\frac{\rho\nu\alpha}{2Q}f'^2 = -\frac{1}{3}(f-1)^2(f+2). \tag{2}$$

Так как правая часть отрицательна в интервале $0 \leqslant f \leqslant 1$, то непременно должно быть $Q < 0$: пограничный слой рассматриваемого типа образуется только при конфузорном течении (с большими числами Рейнольдса $\mathrm{R} = |Q|/(\rho\alpha\nu)$), и не получается при диффузорном течении — в согласии с результатами § 23. Интегрируя еще раз, получаем окончательно

$$f = 3\,\mathrm{th}^2\left[\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + \left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right)^{1/2}\xi\right] - 2. \tag{3}$$

Толщина пограничного слоя $\delta \sim x/R^{1/2}$. Значение производной $f'(0) = 2(\mathrm{R}/3)^{1/2}$, как это видно из (2). Поэтому сила трения, действующая на единицу площади стенки:

$$\sigma_{xy} = \eta\frac{U}{x}f'(0) = \left(\frac{4U^3\eta\rho}{3x}\right)^{1/2} = \frac{2}{x^2}\left(\frac{\eta|Q|^3}{3\alpha^3\rho^2}\right)^{1/2}.$$

§ 40. Движение вблизи линии отрыва

При описании явления отрыва (§ 35) уже было указано, что реальное положение линии отрыва на поверхности обтекаемого тела определяется свойствами движения в пограничном слое. Мы увидим ниже, что в математическом отношении линия отрыва есть линия, точки которой являются особыми точками решений уравнений движения в пограничном слое (уравнений Прандтля). Задача состоит в том, чтобы определить свойства этих решений вблизи такой особой линии [1]).

От линии отрыва отходит, как мы знаем, уходящая в глубь жидкости поверхность, ограничивающая область турбулентного движения. Движение по всей турбулентной области является вихревым, между тем как при отсутствии отрыва оно было бы вихревым лишь в пограничном слое, где существенна вязкость жидкости, а в основном потоке ротор скорости отсутствовал бы. Поэтому можно сказать, что при отрыве происходит проникновение ротора скорости из пограничного слоя в глубь жидкости. Но в силу закона сохранения циркуляции скорости такое проникновение может произойти только путем непосредственного перемещения движущейся вблизи поверхности тела (в пограничном слое) жидкости в глубь основного потока. Другими словами, должен произойти как бы «отрыв» течения в пограничном слое от поверхности тела, в результате чего линии тока выходят из пристеночного слоя в глубь жидкости. (Поэтому и называют это явление отрывом или отрывом пограничного слоя.)

Уравнения движения в пограничном слое приводят, как мы видели, к результату, что в пограничном слое тангенциальная

[1]) Излагаемая здесь, несколько отличная от обычной трактовка вопроса принадлежит *Л.Д. Ландау* (1944).

составляющая скорости (v_x) велика по сравнению с нормальной к поверхности тела компонентой (v_y). Такое соотношение между v_x и v_y органически связано с основными предположениями о характере движения в пограничном слое и должно необходимым образом соблюдаться везде, где уравнения Прандтля имеют физически осмысленные решения. Математически оно во всяком случае имеет место во всех точках, не лежащих в непосредственной близости от особых точек. Но если $v_y \ll v_x$, то это значит, что жидкость движется вдоль поверхности тела, практически не отклоняясь от нее, так что никакого отрыва течения произойти не может. Таким образом, мы приходим к выводу, что отрыв может произойти лишь на той линии, точки которой являются особыми для решения уравнений Прандтля.

Характер этих особенностей тоже непосредственно следует из сказанного. Действительно, дойдя до линии отрыва, течение отклоняется, переходя из области пограничного слоя в глубь жидкости. Другими словами, нормальная составляющая скорости перестает быть малой по сравнению с тангенциальной и делается по крайней мере одного с нею порядка величины. Мы видели (см. (39.11)), что отношение $v_y/v_x \sim \mathrm{R}^{-1/2}$, так что возрастание v_y до $v_y \sim v_x$ означает увеличение в $\sqrt{\mathrm{R}}$ раз. Поэтому при достаточно больших числах Рейнольдса (о которых, разумеется, только и идет речь) можно считать, что v_y возрастает в бесконечное число раз. Если перейти в уравнениях Прандтля к безразмерным величинам (см. (39.10)), то описанное положение формально означает, что безразмерная скорость v'_y в решении уравнений становится на линии отрыва бесконечной.

Будем рассматривать для некоторого упрощения дальнейшего исследования двумерную задачу о поперечном обтекании бесконечно длинного тела. Как обычно, x будет координатой вдоль поверхности тела в направлении течения, а координата y будет расстоянием от поверхности тела. Вместо линии отрыва здесь можно говорить о точке отрыва, подразумевая пересечение линии отрыва с плоскостью xy; в выбранных координатах это есть точка $x = \mathrm{const} \equiv x_0$, $y = 0$. Область до точки отрыва пусть соответствует $x < x_0$.

Согласно полученным результатам при $x = x_0$ имеем при всех y [1])

$$v_y(x_0,\, y) = \infty. \tag{40.1}$$

Но в уравнениях Прандтля скорость v_y является своего рода вспомогательной величиной, которой при исследовании движения в пограничном слое обычно не интересуются (в связи с ее

[1]) Кроме только точки $y = 0$, в которой всегда должно быть $v_y = 0$ согласно граничным условиям на поверхности тела.

малостью). Поэтому желательно выяснить, какими свойствами обладает вблизи линии отрыва функция v_x.

Из (40.1) ясно, что при $x = x_0$ обращается в бесконечность также и производная $\partial v_y/\partial y$. Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{40.2}$$

следует тогда, что и производная $\partial v_x/\partial x$ делается бесконечной при $x = x_0$, или

$$\left.\frac{\partial x}{\partial v_x}\right|_{v_x = v_0} = 0, \tag{40.3}$$

где x рассматривается как функция от v_x и y, а $v_0(y) = v_x(x_0,\, y)$. Вблизи точки отрыва разности $v_x - v_0$ и $x_0 - x$ малы, и можно разложить $x_0 - x$ в ряд по степеням $v_x - v_0$ (при заданном y). В силу условия (40.3) член первого порядка в этом разложении тождественно выпадает, и с точностью до члена второго порядка имеем

$$x_0 - x = f(y)(v_x - v_0)^2$$

или

$$v_x = v_0(y) + \alpha(y)\sqrt{x_0 - x}\,, \tag{40.4}$$

где $\alpha = f^{-1/2}$ — некоторая функция только от y. Написав теперь

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\alpha(y)}{2\sqrt{x_0 - x}}$$

и интегрируя, получаем

$$v_y = \frac{\beta(y)}{\sqrt{x_0 - x}}, \tag{40.5}$$

где $\beta(y)$ — снова функция от y.

Далее, воспользуемся уравнением (39.5):

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{40.6}$$

Производная $\partial^2 v_x/\partial y^2$ не обращается, как это видно из (40.2), при $x = x_0$ в бесконечность. То же самое относится и к величине dp/dx, определяющейся движением вне пограничного слоя. Оба же члена в левой части уравнения (40.6) обращаются, каждый в отдельности, в бесконечность. В первом приближении можно, следовательно, написать для области вблизи точки отрыва

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

С учетом уравнения непрерывности (40.2), переписываем это уравнение в виде

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial y} - v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{v_y}{v_x} = 0.$$

Поскольку при $x = x_0$ скорость v_x, вообще говоря, не обращается в нуль, то отсюда следует, что отношение v_y/v_x не зависит от y. С другой стороны, из (40.4) и (40.5) имеем с точностью до членов высшего порядка

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\beta(y)}{v_0(y)\sqrt{x_0 - x}}.$$

Для того чтобы это выражение было функцией только от x, необходимо: $\beta(y) = {}^1\!/_2 A v_0(y)$, где A — численная постоянная. Таким образом,

$$v_y = \frac{A v_0(y)}{2\sqrt{x_0 - x}}. \tag{40.7}$$

Наконец, замечая, что функции α и β в (40.4) и (40.5) связаны друг с другом уравнением $\alpha = 2\beta'$, получаем $\alpha = A\, dv_0/dy$, так что

$$v_x = v_0(y) + A\frac{dv_0}{dy}\sqrt{x_0 - x}. \tag{40.8}$$

Формулы (40.7), (40.8) определяют характер зависимости функций v_x и v_y от x вблизи точки отрыва. Мы видим, что обе они оказываются разложимыми в этой области по степеням корня $(x_0 - x)^{1/2}$, причем разложение v_y начинается с члена (-1)-й степени, так что v_y обращается при $x \to x_0$ в бесконечность, как $(x_0 - x)^{-1/2}$. При $x > x_0$, т. е. за точкой отрыва, разложение (40.7), (40.8) физически неприменимо, так как корни делаются мнимыми; это свидетельствует о физической бессмысленности продолжения за точку отрыва решений уравнений Прандтля, описывающих движение до этой точки.

В силу граничных условий на самой поверхности тела должно быть всегда $v_x = v_y = 0$ при $y = 0$. Из (40.7) и (40.8) заключаем поэтому, что

$$v_0(0) = 0, \qquad \left.\frac{dv_0}{dy}\right|_{y=0} = 0. \tag{40.9}$$

Таким образом, мы приходим к важному результату, что в самой точке отрыва ($x = x_0$, $y = 0$) обращается в нуль не только скорость v_x, но и ее первая производная по y (этот результат принадлежит Прандтлю).

Необходимо подчеркнуть, что равенство $\partial v_x/\partial y = 0$ на линии отрыва имеет место лишь постольку, поскольку при этом же x обращается в бесконечность v_y. Если бы постоянная A в (40.7) случайно оказалась равной нулю (а потому не было бы и $v_y(x_0, y) = \infty$), то точка $x = x_0$, $y = 0$, в которой обращается в нуль производная $\partial v_x/\partial y$, не была бы ничем замечательна и во всяком случае не была бы точкой отрыва. Обращение A в нуль может, однако, произойти лишь чисто случайно и поэтому

невероятно. Практически, следовательно, точка на поверхности тела, в которой $\partial v_x/\partial y = 0$, всегда является в то же время точкой отрыва.

Если бы в точке $x = x_0$ не возник отрыв (т. е. если $A = 0$), то при $x > x_0$ было бы $(\partial v_x/\partial y)|_{y=0} < 0$, т. е. при удалении от стенки (при достаточно малых y) v_x делалось бы отрицательным, увеличиваясь по абсолютной величине. Другими словами, за точкой $x = x_0$ жидкость двигалась бы в нижних слоях пограничного слоя в направлении, обратном основному потоку; возникло бы «подтекание» жидкости к этой точке. Подчеркнем, что из такого рода рассуждений еще отнюдь нельзя было бы делать вывод о необходимости отрыва в точке, где $\partial v_x/\partial y = 0$; вся картина течения с подтеканием могла бы (как это и было бы при $A = 0$) находиться целиком в области пограничного слоя, не выходя в область основного потока, между тем как для отрыва характерен именно выход течения в основной объем жидкости.

В предыдущем параграфе было показано, что картина движения в пограничном слое остается при изменении числа Рейнольдса подобной самой себе, причем, в частности, масштабы по координате x остаются неизменными. Отсюда следует, что значение x_0 координаты x, при котором обращается в нуль производная $(\partial v_x/\partial y)|_{y=0}$, не меняется при изменении R. Таким образом, мы приходим к существенному выводу, что положение точки отрыва на поверхности обтекаемого тела не зависит от числа Рейнольдса (до тех пор, разумеется, пока пограничный слой остается ламинарным; см. об этом § 45).

Выясним еще, какими свойствами обладает распределение давления $p(x)$ вблизи точки отрыва. При $y = 0$ левая часть уравнения (40.6) обращается в нуль вместе с v_x и v_y и остается

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{40.10}$$

Отсюда видно, что знак dp/dx совпадает со знаком $\partial^2 v_x/\partial y^2|_{y=0}$. До тех пор, пока $(\partial v_x/\partial y)|_{y=0} > 0$, о знаке второй производной ничего нельзя сказать. Но поскольку при удалении от стенки v_x положительно и растет (в области до точки отрыва), то в самой точке $x = x_0$, где $\partial v_x/\partial y = 0$, должно во всяком случае быть $\partial^2 v_x/\partial y^2|_{y=0} > 0$. Отсюда заключаем, что

$$\frac{dp}{dx}\bigg|_{x=x_0} > 0, \tag{40.11}$$

т. е. вблизи точки отрыва жидкость движется от более низкого давления к более высокому. Градиент давления связан с градиентом скорости $U(x)$ вне пограничного слоя соотношением

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{dU}{dx}.$$

Поскольку положительное направление оси x совпадает с направлением основного потока, то $U > 0$, и мы заключаем, что

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0} < 0, \tag{40.12}$$

т. е. вблизи точки отрыва скорость U падает в направлении течения.

Из полученных результатов можно вывести заключение о том, что при обтекании тела в том или ином месте его поверхности должен произойти отрыв. Действительно, на заднем, как и на переднем, конце тела имеется точка, в которой при потенциальном обтекании идеальной жидкостью скорость жидкости обращалась бы в нуль (критическая точка). Поэтому, начиная с некоторого значения x, скорость $U(x)$ должна была бы начать падать, обращаясь в конце концов в нуль. С другой стороны, ясно, что текущая вдоль поверхности тела жидкость тормозится тем сильнее, чем ближе к стенке находится рассматриваемый ее слой (т. е. чем меньше y). Поэтому, раньше чем обратилась бы в нуль скорость $U(x)$ на внешней границе пограничного слоя, должна была бы обратиться в нуль скорость в непосредственной близости от стенки. Математически это, очевидно, означает, что производная $\partial v_x/\partial y$ во всяком случае должна была бы обратиться в нуль (а поэтому отрыв не может не возникнуть) при некотором x, меньшем, чем то его значение, при котором было бы $U(x) = 0$.

В случае обтекания тел произвольной формы все вычисления могут быть произведены совершенно аналогичным образом и приводят к результату, что на линии отрыва обращаются в нуль производные $\partial v_x/\partial y$, $\partial v_z/\partial y$ от обеих касательных к поверхности тела компонент скорости v_x и v_z (ось y по-прежнему направлена по нормали к рассматриваемому участку поверхности тела).

Приведем простое рассуждение, которое показывает необходимость возникновения отрыва в случаях, когда в отсутствие отрыва в обтекающем тело потоке жидкости имелось бы достаточно быстрое возрастание давления (и соответственно этому падение скорости U) в направлении течения. Пусть на малом расстоянии $\Delta x = x_2 - x_1$ давление p испытывает достаточно большое увеличение от значения p_1 до p_2 ($p_2 \gg p_1$). На том же расстоянии Δx скорость U жидкости вне пограничного слоя падает от исходного значения U_1 до значительно меньшего значения U_2, определяемого уравнением Бернулли:

$$\frac{1}{2}\left(U_1^2 - U_2^2\right) = \frac{1}{\rho}\left(p_2 - p_1\right).$$

Поскольку p не зависит от y, то увеличение давления $p_2 - p_1$ одинаково на всех расстояниях от стенки. При достаточно боль-

шом градиенте давления $dp/dx \sim (p_2 - p_1)/\Delta x$ в уравнении движения (40.6) может быть опущен член $\nu\partial^2 v_x/\partial y^2$, содержащий вязкость (если только, разумеется, y не слишком мало). Тогда можно и для оценки изменения скорости v в пограничном слое воспользоваться уравнением Бернулли, написав

$$\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = -\frac{1}{\rho}\left(p_2 - p_1\right)$$

или сравнивая с предыдущим равенством:

$$v_2^2 = v_1^2 - \left(U_1^2 - U_2^2\right).$$

Но скорость v_1 в пограничном слое меньше скорости основного потока; можно выбрать такое y, для которого $v_1^2 < U_1^2 - U_2^2$. Скорость v_2 оказывается, таким образом, мнимой, что свидетельствует об отсутствии физически осмысленных решений уравнений Прандтля. В действительности, на участке Δx должен возникнуть отрыв, в результате которого слишком большой градиент давления уменьшается.

Интересным случаем возникновения отрыва является обтекание угла, образованного двумя пересекающимися твердыми поверхностями. При ламинарном потенциальном обтекании выпуклого угла (см. рис. 3) скорость жидкости на крае угла обратилась бы в бесконечность (см. задачу 6 § 10), возрастая вдоль потока, подходящего к краю, и убывая в потоке, уходящем от него. В действительности, быстрое падение скорости (и соответственно возрастание давления) за краем угла приводит к возникновению отрыва, причем линией отрыва является линия края угла. В результате возникает картина движения, рассмотренная в § 35.

При ламинарном же течении внутри вогнутого угла (см. рис. 4) скорость жидкости обращается на краю угла в нуль. Падение скорости (и возрастание давления) имеет здесь место в потоке, подходящем к краю угла. Оно приводит, вообще говоря, к возникновению отрыва, причем линия отрыва расположена вверх по течению от края угла.

З а д а ч а

Определить наименьший порядок увеличения давления Δp, которое должно иметь место (в основном потоке) на расстоянии Δx, для того чтобы произошел отрыв.

Р е ш е н и е. Пусть y есть такое расстояние от поверхности тела, на котором, с одной стороны, уже можно применить уравнение Бернулли, а с другой стороны, такое, что квадрат $v^2(y)$ скорости v в пограничном слое здесь меньше изменения $|\Delta U^2|$ квадрата скорости U вне этого слоя. Для $v(y)$ можно написать по порядку величины:

$$v(y) \approx \frac{dv}{dy}y \sim \frac{U}{\delta}y$$

(где $\delta \sim (\nu l/U)^{1/2}$ — ширина пограничного слоя, l — размеры тела). Приравнивая порядки величины обоих членов в правой части уравнения (40.6),

получаем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\Delta p}{\Delta x} \sim \nu \frac{v(y)}{y^2} \sim \frac{\nu U}{\delta y}.$$

Из условия же

$$v^2 = |\Delta U^2| = 2\Delta p/\rho$$

находим $U^2 y^2/\delta^2 \sim \Delta p/\rho$. Исключив y из обоих полученных соотношений, находим окончательно

$$\Delta p \sim \rho U^2 \left(\frac{\Delta x}{l}\right)^{2/3}.$$

§ 41. Устойчивость движения в ламинарном пограничном слое

Ламинарное движение в пограничном слое, как и всякое другое ламинарное течение, при достаточно больших числах Рейнольдса становится в той или иной степени неустойчивым. Характер потери устойчивости в пограничном слое аналогичен потере устойчивости при течении по трубе (§ 28).

Число Рейнольдса для течения в пограничном слое меняется вдоль поверхности обтекаемого тела. Так, при обтекании пластинки можно определить число Рейнольдса как $\mathrm{R}_x = Ux/\nu$, где x — расстояние от переднего края пластинки, U — скорость жидкости вне пограничного слоя. Более характерным для пограничного слоя, однако, является такое определение, в котором роль размеров играет какая-либо длина, непосредственно характеризующая толщину слоя; в качестве таковой можно выбрать толщину вытеснения, определенную согласно (39.26):

$$\mathrm{R}_\delta = \frac{U\delta^*}{\nu} = 1{,}72\sqrt{\mathrm{R}_x} \tag{41.1}$$

(числовой коэффициент относится к пограничному слою на плоской поверхности).

Ввиду сравнительной медленности изменения толщины слоя с расстоянием, и малости поперечной скорости жидкости в нем, при исследовании устойчивости течения в небольшом участке пограничного слоя можно рассматривать плоско-параллельное течение с неизменным вдоль оси x профилем [1]. Тогда с мате-

---

[1]) При таком рассмотрении остается, конечно, в стороне вопрос о влиянии, которое может иметь на устойчивость пограничного слоя кривизна обтекаемой поверхности. Имеется также и определенная непоследовательность, связанная с делаемыми пренебрежениями. Дело в том, что единственными плоско-параллельными течениями (с профилем скорости, зависящим только от одной координаты), удовлетворяющими уравнению Навье–Стокса, являются течения с линейным (17.1) и параболическим (17.4) профилями (в то время как уравнение Эйлера удовлетворяется плоско-параллельным течением с произвольным профилем). Поэтому рассматриваемое в теории устойчивости пограничного слоя основное течение не является, строго говоря, решением уравнений движения.

матической точки зрения задача будет аналогична задаче об устойчивости течения между двумя параллельными плоскостями (о которой шла речь в § 29). Разница состоит лишь в форме профиля скоростей: вместо симметричного профиля с $v = 0$ на обеих границах здесь имеется несимметричный профиль, в котором скорость меняется от нуля на поверхности тела до заданного значения U — скорости потока вне пограничного слоя. Такое исследование приводит к следующим результатам (*W. Tollmien*, 1929; *H. Schlichting*, 1933; *C.C. Lin*, 1945).

Форма нейтральной кривой на диаграмме ω, R (см. § 28) зависит от формы профиля скоростей в пограничном слое. Если профиль скоростей не имеет точки перегиба (скорость v_x монотонно возрастает, причем кривая $v_x = v_x(y)$ везде выпуклая; рис. 28 *а*), то граница устойчивости имеет форму, вполне аналогичную той, которая характеризует устойчивость течения в трубе: имеется некоторое минимальное значение $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$, при котором появляются усиливающиеся возмущения, а при $\mathrm{R} \to \infty$ обе ветви кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс (рис. 29 *а*). Для профиля скоростей, имеющего место в пограничном слое на плоской пластинке, вычисление дает для критического значения числа Рейнольдса значение [1] $\mathrm{R}_{\delta\,\text{кр}} \approx 420$.

Профиль скоростей типа рис. 28 *а* не может иметь места, если скорость жидкости вне пограничного слоя уменьшается вниз по течению; в этом случае профиль скоростей непременно должен иметь точку перегиба. Действительно, рассмотрим небольшой участок поверхности стенки, который можно считать плоским, и пусть x есть опять продольная координата вдоль направления течения, а y — расстояние от стенки. Из соотношения (40.10)

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{\partial U}{\partial x}$$

видно, что если U падает вниз по течению $(\partial U/\partial x < 0)$, то вблизи поверхности

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} > 0,$$

т. е. кривая $v_x = v_x(y)$ — вогнутая. При увеличении же y скорость v_x должна асимптотически приближаться к конечному пределу U. Уже из геометрических соображений ясно, что для этого кривая должна стать выпуклой, а потому имеет где-то точку перегиба (рис. 28 *б*).

При наличии точки перегиба в профиле скоростей форма кривой границы устойчивости несколько меняется. Именно, обе

---

[1]) При $\mathrm{R}_\delta \to \infty$ на ветвях I и II нейтральной кривой ω обращается в нуль соответственно как $\mathrm{R}_\delta^{-1/2}$ и $\mathrm{R}_\delta^{-1/5}$. Точке $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\text{кр}}$ отвечает частота $\omega_{\text{кр}} = 0{,}15 \cdot U/\delta^*$ и волновое число $k_{\text{кр}} = 0{,}36/\delta^*$.

ветви кривой имеют при $R \to \infty$ различные асимптоты: одна ветвь по-прежнему асимптотически приближается к оси абсцисс, а на другой ω стремится к конечному, отличному от нуля пределу (рис. 29 *б*). Кроме того, наличие точки перегиба сильно понижает значение $\mathrm{R}_{\text{кр}}$.

То обстоятельство, что число Рейнольдса возрастает вдоль пограничного слоя, придает своеобразный характер поведению возмущений при их сносе вниз по течению. Рассмотрим обтекание плоской пластинки и предположим, что в некотором месте пограничного слоя производится возмущение с заданной частотой ω. Его распространению вниз по течению соответствует на диаграмме рис. 29 *а* перемещение вправо по горизонтальной прямой $\omega = \text{const}$. При этом возмущение сначала затухает, затем по достижении ветви I границы устойчивости начнет усиливаться. Усиление продолжается до момента достижения ветви II, после чего возмущение вновь будет затухать. Полный коэффициент усиления возмущения за время его прохождения через область неустойчивости очень быстро возрастает по мере того, как эта область сдвигается в сторону больших R (т. е. чем ниже на рис. 29 *а* расположен соответствующий горизонтальный отрезок между ветвями I и II границы устойчивости).

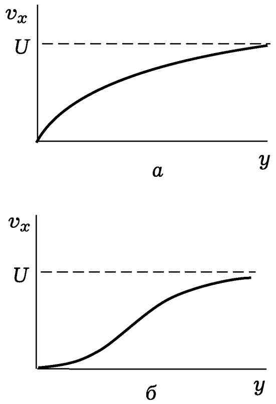


Рис. 28

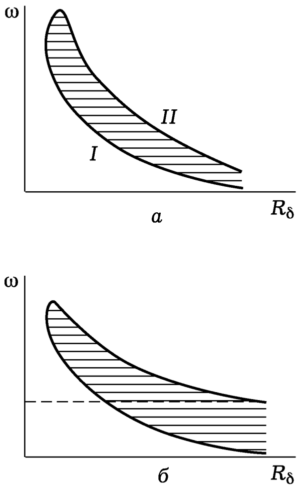


Рис. 29

Вопрос о характере неустойчивости пограничного слоя по отношению к бесконечно малым возмущениям (абсолютном или конвективном) еще не имеет полного решения. Для профиля скоростей без точки перегиба неустойчивость является конвективной в той области значений R, где обе ветви нейтральной кривой (рис. 29 *а*) близки к оси абсцисс (сюда относится то же самое доказательство, что и для плоского пуазейлевого течения —

см. примеч. на с.150). Для меньших значений R, а также для профилей скорости с точкой перегиба вопрос остается открытым.

Благодаря изменению числа Рейнольдса вдоль пограничного слоя, турбулизируется не сразу весь слой, а лишь та его часть, для которой R_δ превышает определенное значение. При заданной скорости обтекания это значит, что турбулизация возникает на определенном расстоянии от переднего края; при увеличении скорости это место приближается к переднему краю. Экспериментальные данные показывают, что место возникновения турбулентности в пограничном слое существенно зависит также от интенсивности возмущений в натекающем потоке. По мере уменьшения степени возмущенности наступление турбулентности отодвигается к более высоким значениям R_δ.

Различие между нейтральными кривыми на рисунках 29 *а* и 29 *б* имеет принципиальный характер. Тот факт, что на верхней ветви частота стремится при $R_\delta \to \infty$ к отличному от нуля пределу, означает, что движение остается неустойчивым при сколь угодно малой вязкости, между тем как в случае кривой типа рис. 23 *а* при $\nu \to 0$ возмущения с любой конечной частотой затухают. Это различие обусловлено именно наличием или отсутствием точки перегиба в профиле скоростей $v_x = v(y)$. Его происхождение можно проследить с математической точки зрения, рассмотрев задачу об устойчивости в рамках гидродинамики идеальной жидкости (*Rayleigh*, 1880).

Подставим в уравнение плоского движения идеальной жидкости (10.10) функцию тока в виде

$$\psi = \psi_0(y) + \psi_1(x, y, t),$$

где ψ_0 — функция тока невозмущенного течения (так что $\psi_0' = v(y)$), а ψ_1 — малое возмущение. Последнее ищем в виде

$$\psi_1 = \varphi(y) e^{i(kx - \omega t)}.$$

Подстановка в (10.10) приводит к следующему линеаризованному уравнению для функции ψ_1 [1]:

$$\left(v - \frac{\omega}{k}\right)(\varphi'' - k^2\varphi) - v''\varphi = 0. \qquad (41.2)$$

Если границей движения (по оси y) является твердая стенка, то на ней $\varphi = 0$ (как следствие условия $v_y = 0$); если же ширина потока не ограничена (с одной или с обеих сторон), то такое же условие должно быть поставлено на бесконечности, где поток однороден. Будем рассматривать k как заданную вещественную величину; частота же ω определяется тогда по собственным значениям граничной задачи для уравнения (41.2).

---

[1]) Любая функция $\psi_0(y)$ удовлетворяет уравнению (10.10) тождественно, ср. сказанное в примеч. на с. 238.

Разделим уравнение (41.2) на $(v - \omega/k)$, умножим на φ^* и проинтегрируем по y между двумя границами движения y_1 и y_2. Проинтегрировав произведение $\varphi^*\varphi''$ по частям, получим

$$\int_{y_1}^{y_2} (|\varphi'|^2 + k^2|\varphi|^2)\, dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{v''|\varphi|^2}{v - \omega/k}\, dy = 0. \qquad (41.3)$$

Первый член здесь во всяком случае веществен. Предполагая частоту комплексной и отделив мнимую часть равенства, получим

$$\operatorname{Im}\omega \cdot \int_{y_1}^{y_2} \frac{v''|\varphi|^2}{|v - \omega/k|^2}\, dy = 0. \qquad (41.4)$$

Для того чтобы могло быть $\operatorname{Im}\omega \neq 0$, должен обращаться в нуль интеграл, а для этого во всяком случае необходимо, чтобы где-либо в области интегрирования v'' проходило через нуль. Таким образом, неустойчивость может возникнуть (при $\nu = 0$) лишь для профилей скорости с точкой перегиба [1]).

С физической точки зрения, происхождение этой неустойчивости связано с «резонансным» взаимодействием между колебаниями среды и движением ее частиц в основном течении, и в этом смысле оно аналогично происхождению известного из кинетической теории затухания (или усиления в неустойчивом случае) Ландау колебаний в бесстолкновительной плазме (см. X, § 30) [2]).

Согласно уравнению (41.2) собственные колебания течения (если они существуют) связаны с той его частью, где $v''(y) \neq \neq 0$ [3]). Проследить за механизмом усиления колебаний удобно на примере профиля скорости, в котором «источник» колебаний локализован в одном слое течения: рассмотрим профиль $v(y)$, кривизна которого мала везде, за исключением лишь окрестности некоторой точки $y = y_0$; заменив ее просто изломом профиля, будем иметь в $v''(y)$ член вида $A\delta(y - y_0)$; именно он будет давать основной вклад в интеграл в уравнении (41.3). Будем описывать

---

[1]) Следует отметить, что постановка задачи об устойчивости с точным равенством $\nu = 0$ физически не вполне корректна. Она не учитывает того факта, что реальная жидкость непременно обладает хотя бы и малой, но отличной от нуля вязкостью. Это приводит к ряду математических затруднений: исчезновению некоторых решений (в виду понижения порядка дифференциального уравнения для функции φ) и появлению новых решений, отсутствующих при $\nu \neq 0$. Последнее обстоятельство связано с сингулярностью уравнения (41.2) (отсутствующей при $\nu \neq 0$): в точке, где $v(y) = \omega/k$, обращается в нуль коэффициент при старшей производной в уравнении.

[2]) Эта аналогия указана *А.В. Тимофеевым* (1979) и *А.А. Андроновым* и *А.Л. Фабрикантом* (1979); ниже мы следуем изложению *А.В. Тимофеева.*

[3]) При $v''(y) \equiv 0$ уравнение (41.2) вообще не имеет решений, удовлетворяющих необходимым граничным условиям.

течение в системе координат, в которой «источник» покоится, т. е. $v(y_0) = 0$ (как это изображено на рис. 30). Отделив в уравнении (41.3) вещественную часть, получим

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} (|\varphi'|^2 + k^2|\varphi|^2)\, dy - \frac{A|\varphi(y_0)|^2\,\mathrm{Re}\,\omega/k}{|\omega/k|^2}\, dy = 0.$$

Пусть $A > 0$ (как на рис. 30); поскольку первый член в этом равенстве заведомо положителен, то тогда должно быть $\mathrm{Re}\,\omega/k > 0$ — фазовая скорость волны направлена направо. При этом резонансная точка y_r, в которой фазовая скорость волны совпадает с местной скоростью течения, $v(y_r) = \mathrm{Re}\,\omega/k$, лежит справа от точки y_0. Жидкие частицы, движущиеся в окрестности резонансной точки и обгоняющие волну, отдают ей энергию; частицы же, отстающие от волны, отбирают от нее энергию; волна будет усиливаться (неустойчивость), если первых частиц больше чем вторых [1]. Но ввиду предполагаемой несжимаемости жидкости число частиц, приходящихся на элемент dy ширины потока, пропорционально dy, тем самым число частиц со скоростями в интервале dv пропорционально $dy = (dy/dv)dv = dv/v'(y)$, т. е. роль функции распределения по скоростям играет $1/v'(y)$. Следовательно, для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы при пересечении точки y_r слева направо функция $1/v'(y)$ возрастала, т. е. $v'(y)$ убывала. Другими словами, должно быть $v''(y_r) < 0$, а поскольку в точке y_0 производная v'' положительна, то где-либо между точками y_0 и y_r должна быть точка перегиба профиля.

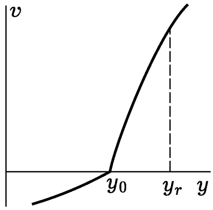


Рис. 30

Аналогичным образом рассматривается (и приводит к тому же результату) случай, когда $A < 0$; при этом фазовая скорость волны и скорость резонансных жидких частиц направлены налево.

§ 42. Логарифмический профиль скоростей

Рассмотрим плоско-параллельный турбулентный поток жидкости, текущий вдоль неограниченной плоской поверхности (когда мы говорим о плоско-параллельности турбулентного потока, то подразумевается, конечно, усредненное по времени движение

[1]) По отношению к резонансным частицам движение в волне стационарно; поэтому обмен энергией между ними и волной не обращается в нуль при усреднении по времени (как это имеет место для других частиц, по отношению к которым движение в волне осциллирует). Отметим также, что указанное направление обмена энергией отвечает стремлению к уменьшению градиента скорости течения, и в этом смысле отвечает учету сколь угодно малой вязкости.

в нем) [1]. Выберем направление потока в качестве оси x, плоскость стенки — в качестве плоскости xz, так что y есть расстояние от стенки. Компоненты средней скорости вдоль осей y и z равны нулю: $u_x = u$, $u_y = u_z = 0$. Перепад давления отсутствует; все величины зависят только от y.

Обозначим буквой σ силу трения, действующую на единицу поверхности стенки (и направленную, очевидно, по оси x). Величина σ представляет собой не что иное, как импульс, передаваемый жидкостью твердой стенке; она является в то же время тем постоянным потоком импульса (точнее x-компоненты импульса), который направлен в отрицательном направлении оси y, и определяет количество импульса, непрерывно передаваемого от более удаленных от стенки слоев жидкости к менее удаленным.

Наличие этого потока импульса связано, конечно, с наличием вдоль оси y градиента средней скорости u. Если бы жидкость двигалась везде с одинаковой скоростью, то никакого потока импульса в ней не было бы. Можно поставить вопрос и обратным образом: зададимся некоторым определенным значением σ и выясним, каково должно быть движение в жидкости данной плотности ρ, приводящее к потоку импульса σ. Имея в виду получить асимптотические законы, относящиеся к очень большим числам Рейнольдса, снова исходим из предположения, что в этих законах не должна фигурировать в явном виде вязкость жидкости ν (она становится, однако, существенной на очень малых расстояниях y — см. ниже).

Таким образом, значение градиента скорости du/dy на каждом расстоянии от стенки должно определяться постоянными параметрами ρ, σ и, разумеется, самим расстоянием y. Единственной комбинацией требуемой размерности, которую можно составить из ρ, σ и y, является $(\sigma/\rho)^{1/2}/y$. Поэтому должно быть

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_*}{\varkappa y}, \tag{42.1}$$

где введена удобная для дальнейшего величина v_* (с размерностью скорости) согласно определению

$$\sigma = \rho v_*^2, \tag{42.2}$$

а $\varkappa$ — числовая постоянная (*постоянная Кармана*). Значение $\varkappa$ не может быть вычислено теоретически и должно быть определено из эксперимента. Оно оказывается равным [2])

$$\varkappa = 0{,}4. \tag{42.3}$$

---

[1]) Излагаемые в § 42–44 результаты принадлежат *Т. Карману* (1930) и *Л. Прандтлю* (1932).

[2]) Это значение (и значение еще одной постоянной в формуле (42.8) — см. ниже) получено из результатов измерений профиля скорости вблизи стенок труб и прямоугольных каналов и в пограничном слое на плоских стенках.

Интегрируя соотношение (42.1), получим

$$u = \frac{v_*}{\varkappa}(\ln y + c), \tag{42.4}$$

где c — постоянная интегрирования. Для определения этой постоянной нельзя воспользоваться обычными граничными условиями на поверхности стенки: при $y = 0$ первый член в (42.4) обращается в бесконечность. Причина этого заключается в том, что написанное выражение становится в действительности неприменимым на очень малых расстояниях от стенки, поскольку при очень малых y влияние вязкости делается существенным и им нельзя пренебрегать. Условия на бесконечности тоже отсутствуют: при $y = \infty$ выражение (42.4) тоже делается бесконечным. Это связано с тем, что в поставленных нами идеализированных условиях задачи фигурирует бесконечная поверхность стенки, влияние которой простирается поэтому и на бесконечно большие расстояния.

Прежде чем определить постоянную c, укажем предварительно на следующую существенную особенность рассматриваемого движения: оно не имеет никаких характерных постоянных параметров длины, которые могли бы определить масштаб турбулентного движения, как это имеет место в обычных случаях. Поэтому основной масштаб турбулентности определяется самим расстоянием y: турбулентное движение на расстоянии y от стенки имеет основной масштаб порядка величины y. Что же касается пульсационной скорости турбулентного движения, то она порядка величины v_*. Это тоже следует непосредственно из соображений размерности, поскольку v_* — единственная величина с размерностью скорости, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении величин σ, ρ, y. Подчеркнем, что в то время как средняя скорость падает с уменьшением y, порядок величины пульсационной скорости оказывается одинаковым на всех расстояниях от стенки. Этот результат находится в согласии с общим правилом, что порядок величины пульсационной скорости определяется изменением Δu средней скорости (§ 33). В рассматриваемом случае нет характерных длин l, на которых можно было бы брать изменение средней скорости; Δu должно быть теперь разумным образом определено, как изменение u при изменении расстояния y на величину порядка его самого. Но при таком изменении y скорость u меняется согласно (42.4) как раз на величину порядка v_*.

На достаточно малых расстояниях от стенки начинает играть роль вязкость жидкости; обозначим порядок величины этих расстояний через y_0. Определить y_0 можно следующим образом. Масштаб турбулентного движения на этих расстояниях — порядка y_0, а скорость — порядка v_*. Поэтому число Рейнольдса, характеризующее движение на расстояниях $\sim y_0$, есть $\mathrm{R} \sim y_0 v_*/\nu$.

Вязкость начинает играть роль при $\mathrm{R} \sim 1$. Отсюда находим, что

$$y_0 \sim \nu / v_*, \tag{42.5}$$

чем и определяется интересующее нас расстояние.

На расстояниях $y \ll y_0$ движение жидкости определяется обычным вязким трением. Распределение скоростей здесь может быть получено прямо из обычной формулы для вязкого трения:

$$\sigma = \rho\nu \frac{du}{dy},$$

откуда

$$u = \frac{\sigma}{\rho\nu} y = \frac{v_*^2}{\nu} y. \tag{42.6}$$

Таким образом, непосредственно к стенке прилегает тонкая прослойка жидкости, в которой средняя скорость меняется по линейному закону. Величина скорости во всей этой прослойке мала — она меняется от нуля на самой стенке до значений $\sim v_*$ при $y \sim y_0$. Эту прослойку называют *вязким подслоем*. Никакой сколько-нибудь резкой границы между вязким подслоем и остальным потоком, конечно, нет; в этом смысле понятие о вязком подслое имеет лишь качественный характер. Подчеркнем, что и в нем движение жидкости турбулентно [1]).

В дальнейшем движением в вязком подслое мы не будем интересоваться вовсе. Наличие его надо учесть только соответствующим выбором постоянной интегрирования в (42.4): она должна быть выбрана так, чтобы было $u \sim v_*$ на расстояниях $y \sim y_0$. Для этого надо положить $c = -\ln y_0$, так что

$$u = \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{y v_*}{\nu}. \tag{42.7}$$

Эта формула определяет (при ограниченных y) распределение скоростей в турбулентном потоке, текущем вдоль твердой стенки. Такое распределение называют *логарифмическим профилем скоростей* [2]).

В формуле (42.7) под знаком логарифма должен был бы на самом деле стоять еще некоторый числовой коэффициент. В написанном виде она имеет, как говорят, лишь *логарифмическую точность*. Это значит, что аргумент логарифма предполагается настолько большим, что и сам логарифм велик. Введение неболь-

[1]) В этом смысле все еще иногда применяемое название «ламинарного подслоя» не адекватно. Сходство с ламинарным движением заключается только в том, что средняя скорость распределена по такому же закону, по которому была бы распределена истинная скорость при ламинарном движении в тех же условиях. Пульсационное движение в вязком подслое обнаруживает своеобразные особенности, не имеющие еще адекватной теоретической интерпретации.

[2]) Изложенный простой вывод логарифмического профиля дан *Л.Д. Ландау* (1944).

шого численного коэффициента под знаком логарифма в (42.7) эквивалентно прибавлению к написанному выражению дополнительного члена вида $\mathrm{const}\cdot v_*$, где const — число порядка единицы; в логарифмическом приближении таким членом пренебрегается по сравнению с членом, содержащим большой логарифм. Фактически, однако, аргумент логарифма в рассматриваемых здесь и ниже формулах все же не очень велик, а потому и точность логарифмического приближения не высока. Точность этих формул можно повысить, вводя эмпирический численный множитель в аргумент логарифма, или, что то же самое, прибавляя к логарифму эмпирическую постоянную. Так, более точная формула для профиля скоростей имеет вид

$$u = v_*\left(2{,}5\ln\frac{yv_*}{\nu} + 5{,}1\right) = 2{,}5v_*\ln\frac{yv_*}{0{,}13\nu}. \qquad (42.8)$$

Отметим, что обе формулы (42.6) и (42.8) имеют вид

$$u = v_* f(\xi), \quad \xi = yv_*/\nu, \qquad (42.9)$$

где $f(\xi)$ — универсальная функция. Это — прямое следствие того, что ξ — единственная безразмерная комбинация, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении параметров ρ, σ, ν и переменной y. По этой причине такого рода зависимость должна иметь место на всех вообще расстояниях от стенки, в том числе в области, промежуточной между областями применимости формул (42.6) и (42.8). На рис. 31 приведен график функции $f(\xi)$ в полулогарифмическом (десятичном) масштабе. Сплошные линии *1* и *2* отвечают соответственно формулам (42.6) и (42.8); штриховая кривая — эмпирическая зависимость в промежуточной области (она простирается примерно от $\xi \approx 5$ до $\xi \approx 30$).

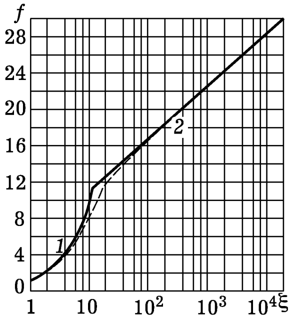


Рис. 31

Легко определить диссипацию энергии в рассматриваемом турбулентном потоке. Величина σ представляет собой среднее значение компоненты Π_{xy} тензора плотности потока импульса. Вне вязкого подслоя в Π_{xy} можно опустить член с вязкостью, так что $\Pi_{xy} = \rho v_x v_y$. Введя пульсационную скорость $\mathbf{v}'$ и помня, что средняя скорость направлена по оси x, имеем $v_x = u + v'_x$, $v_y = v'_y$. Тогда [1])

$$\sigma = \rho\langle v_x v_y\rangle = \rho\langle v'_x v'_y\rangle + \rho u\langle v'_y\rangle = \rho\langle v'_x v'_y\rangle. \qquad (42.10)$$

[1]) Тензор потока импульса, переносимого турбулентными пульсациями, называют тензором *рейнольдсовых напряжений*; это понятие было введено *Рейнольдсом* (*O. Reynolds*, 1895).

Далее, плотность потока энергии в направлении оси y равна $(p + \rho v^2/2)v_y$ (здесь тоже опущен вязкий член). Написав $v^2 = (u + v'_x)^2 + v'^2_y + v'^2_z$ и усреднив все выражение, получим

$$\langle p'v'_y\rangle + \frac{\rho}{2}\langle v'^2_x v'_y + v'^3_y + v'^2_z + v'^2_z v'_y\rangle + \rho u\langle v'_x v'_y\rangle.$$

Здесь достаточно сохранить только последний член. Дело в том, что пульсационная скорость — порядка величины v_*, и потому (с логарифмической точностью) мала по сравнению с u. Что касается давления, то его турбулентные пульсации $p' \sim \rho v_*^2$ и потому с той же точностью первый член в написанном выражении тоже может быть опущен. Таким образом, находим для средней плотности потока энергии:

$$\langle q\rangle = \rho u\langle v'_x v'_y\rangle = u\sigma. \tag{42.11}$$

По мере приближения к поверхности стенки этот поток уменьшается, что связано как раз с диссипацией энергии. Производная $d\langle q\rangle/dy$ дает диссипацию в единице объема жидкости, а разделив ее на ρ, получим диссипацию в единице массы:

$$\varepsilon = \frac{v_*^3}{\varkappa y} = \frac{1}{\varkappa y}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{3/2}. \tag{42.12}$$

До сих пор мы предполагали, что поверхность стенки достаточно гладкая. Если же поверхность шероховата, то выведенные формулы могут несколько измениться. В качестве меры шероховатости стенки можно выбрать порядок величины выступов шероховатости, которые мы обозначим буквой d. Существенна сравнительная величина d и толщина подслоя y_0. Если толщина y_0 велика по сравнению с d, то шероховатость вообще не существенна; это и подразумевается под достаточной гладкостью стенки. Если y_0 и d одного порядка величины, то никаких общих формул написать нельзя.

В обратном же предельном случае сильной шероховатости ($d \gg y_0$) снова можно установить некоторые общие соотношения. Говорить о вязком подслое в этом случае, очевидно, нельзя. Вокруг выступов шероховатости будет происходить турбулентное движение, характеризующееся величинами ρ, σ, d; вязкость ν, как обычно, не должна входить явно. Скорость этого движения — порядка величины v_* — единственной имеющейся в нашем распоряжении величины с размерностью скорости. Таким образом, мы видим, что в потоке, текущем вдоль шероховатой поверхности, скорость делается малой ($\sim v_*$) на расстояниях $y \sim d$ вместо $y \sim y_0$, как это было при течении вдоль гладкой поверхности. Отсюда ясно, что распределение скоростей будет определяться формулой, получающейся из (42.7) заменой ν/v_* на d,

$$u = \frac{v_*}{\varkappa}\ln\frac{y}{d}. \tag{42.13}$$

§ 43. Турбулентное течение в трубах

Применим теперь полученные результаты к турбулентному течению жидкости по трубе. Вблизи стенок трубы (на расстояниях, малых по сравнению с ее радиусом a) ее поверхность можно приближенно рассматривать как плоскую и распределение скоростей должно описываться формулой (42.7) или (42.8). Однако ввиду медленного изменения функции $\ln y$ можно с логарифмической точностью применить формулу (42.7) и к средней скорости U течения жидкости в трубе, написав в этой формуле вместо y радиус a трубы:

$$U = \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{a v_*}{\nu}. \tag{43.1}$$

Под скоростью U мы будем подразумевать количество (объем) жидкости, протекающей в 1 с через сечение трубы, деленное на площадь этого сечения: $U = Q/(\rho\pi a^2)$.

Для того чтобы связать скорость U с поддерживающим течение перепадом давления $\Delta p/l$ (Δp — разность давлений на концах трубы длиной l), замечаем следующее. Действующая на все сечение потока жидкости в трубе движущая сила есть $\pi a^2 \Delta p$. Эта сила идет на преодоление трения о стенки. Поскольку отнесенная к единице площади стенки сила трения есть $\sigma = \rho v_*^2$, то полная сила трения равна $2\pi a l \rho v_*^2$. Приравнивая оба выражения, находим

$$\frac{\Delta p}{l} = \rho v_*^2 \frac{2}{a}. \tag{43.2}$$

Уравнения (43.1) и (43.2) определяют в параметрическом виде (параметром является v_*) связь скорости течения жидкости по трубе с перепадом давления в ней. Об этой связи говорят обычно как о *законе сопротивления* трубы. Выражая v_* через $\Delta p/l$ из (43.2) и подставляя в (43.1), получаем закон сопротивления в виде уравнения

$$U = \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\varkappa^2 \rho l}} \ln\left(\frac{a}{\nu}\sqrt{\frac{a\Delta p}{2\rho l}}\right). \tag{43.3}$$

Обычно в этой формуле вводят так называемый коэффициент сопротивления трубы, являющийся безразмерной величиной и определяющийся как отношение

$$\lambda = \frac{2a\,\Delta p/l}{\rho U^2/2}. \tag{43.4}$$

Зависимость λ от безразмерного числа Рейнольдса $\mathrm{R} = 2aU/\nu$ определяется неявным образом уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0{,}88 \ln(\mathrm{R}\sqrt{\lambda}) - 0{,}85. \tag{43.5}$$

Мы поставили здесь для $\varkappa$ значение (42.3) и прибавили к логарифму эмпирическую численную постоянную [1]. Определяемый этой формулой коэффициент сопротивления является медленно убывающей функцией числа Рейнольдса. Для сравнения приведем закон сопротивления при ламинарном течении в трубе. Вводя в формулу (17.10) коэффициент сопротивления, получаем

$$\lambda = 64/\mathrm{R}. \tag{43.6}$$

При ламинарном течении коэффициент сопротивления падает с ростом числа Рейнольдса быстрее, чем при турбулентном течении.

На рис. 32 изображен (в логарифмическом масштабе) график зависимости λ от R. Круто спадающая прямая соответствует ламинарному режиму (формула (43.6)), а более пологая кривая (практически тоже близкая к прямой) — турбулентному течению. Переход с первой на вторую происходит по мере увеличения числа Рейнольдса в момент турбулизации течения, который может наступить при различных значениях R в зависимости от конкретных условий течения (от степени «возмущенности» потока); в момент перехода коэффициент сопротивления резко возрастает.

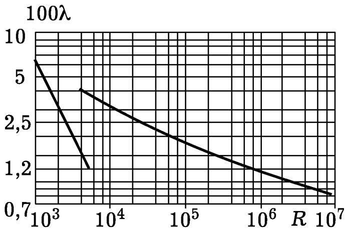


Рис. 32

Написанные выше формулы относятся к трубам с гладкими стенками. Аналогичные формулы для труб с сильно шероховатыми стенками получаются просто заменой ν/v_* на d (ср. (42.13)). Для закона сопротивления получим теперь вместо (43.3) формулу

$$U = \sqrt{\frac{a\Delta p}{2\varkappa^2 \rho l}}\,\ln\frac{a}{d}. \tag{43.7}$$

Под знаком логарифма стоит теперь постоянная величина, не содержащая перепада давления, как это было в (43.3). Мы видим, что средняя скорость течения теперь просто пропорциональна квадратному корню из градиента давления в трубе. Если ввести

[1] Коэффициент перед логарифмом в этой формуле взят в соответствии с коэффициентом в формуле (42.8) логарифмического профиля скоростей. Только при таком условии эта формула имеет теоретический смысл предельной формулы для турбулентного течения при достаточно больших значениях числа Рейнольдса. Если же выбирать в формуле (43.5) произвольным образом значение обеих входящих в нее постоянных, то она сможет играть роль лишь чисто эмпирической формулы для зависимости λ от R. В таком случае, однако, нет никаких оснований предпочитать ее любой другой, более простой, эмпирической формуле, достаточно хорошо описывающей экспериментальные данные.

коэффициент сопротивления, то формула (43.7) примет вид

$$\lambda = \frac{8\varkappa^2}{\ln^2(a/d)} = \frac{1{,}3}{\ln^2(a/d)}, \tag{43.8}$$

т. е. λ — постоянная величина, не зависящая от числа Рейнольдса.

§ 44. Турбулентный пограничный слой

Тот факт, что мы получили для плоско-параллельного турбулентного потока логарифмический закон распределения скоростей формально во всем пространстве, связан с тем, что рассматривалось течение вдоль стенки, площадь которой бесконечна. При течении же вдоль поверхности реальных конечных тел логарифмическим профилем обладает лишь движение на небольших расстояниях от поверхности — в пограничном слое.

Толщина пограничного слоя растет вниз по течению вдоль обтекаемой поверхности (закон этого возрастания будет найден ниже). Это объясняет, почему при течении по трубе логарифмический профиль имеет место вдоль всего сечения трубы. Толщина пограничного слоя у стенки трубы растет, начиная от входа в трубу. Уже на некотором конечном расстоянии от входа пограничный слой как бы заполняет собой все сечение трубы. Поэтому если рассматривать трубу как достаточно длинную и не интересоваться ее начальным участком, то течение во всем ее объеме будет того же типа, как и в турбулентном пограничном слое. Напомним, что аналогичное положение имеет место и для ламинарного течения по трубе. Оно всегда описывается формулой (17.9); роль вязкости в нем проявляется на всех расстояниях от стенки и никогда не бывает ограничена тонким пристеночным слоем жидкости.

Падение средней скорости как в турбулентном, так и в ламинарном пограничном слое, обусловливается в конечном итоге вязкостью жидкости. Однако влияние вязкости проявляется в турбулентном пограничном слое очень своеобразно. Самый ход изменения средней скорости в слое не зависит непосредственно от вязкости; вязкость входит в выражение для градиента скорости только в вязком подслое. Общая же толщина пограничного слоя определяется вязкостью и обращается в нуль вместе с ней (см. ниже). Если бы вязкость была в точности равна нулю, то никакого пограничного слоя вовсе не было бы.

Применим полученные в предыдущем параграфе результаты к турбулентному пограничному слою, образующемуся при обтекании тонкой плоской пластинки, — таком же, какое было рассмотрено в § 39 для ламинарного течения. На границе турбулентного слоя скорость жидкости почти равна скорости U основного потока. С другой стороны, для определения этой скорости на

границе мы можем (с логарифмической точностью) воспользоваться формулой (42.7), подставив в нее вместо y толщину пограничного слоя δ [1]). Сравнив оба выражения, получим

$$U = \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{v_* \delta}{\nu}. \tag{44.1}$$

Здесь U играет роль постоянного параметра; толщина же δ меняется вдоль пластинки, а вместе с ней является, следовательно, медленно меняющейся функцией от x и величина v_*. Для определения этих функций формула (44.1) недостаточна; необходимо получить еще какое-нибудь соотношение, которое бы связывало v_* и δ с x.

Для этого воспользуемся теми же соображениями, с помощью которых была получена формула (37.3) для ширины турбулентного следа. Как и там, производная $d\delta/dx$ должна быть порядка величины отношения скорости вдоль оси y на границе слоя к скорости вдоль оси x на той же границе. Вторая из них — порядка U, что же касается поперечной скорости, то она обязана пульсационному движению и потому — порядка v_*. Таким образом,

$$\frac{d\delta}{dx} \sim \frac{v_*}{U},$$

откуда

$$\delta \sim \frac{v_* x}{U}. \tag{44.2}$$

Формулы (44.1) и (44.2) определяют вместе зависимость v_* и δ от расстояния x [2]). Эта зависимость, однако, не может быть написана в явном виде. Ниже мы выразим δ через некоторую вспомогательную величину. Но поскольку v_* есть медленно меняющаяся функция от x, то уже из (44.2) видно, что толщина слоя меняется в основном пропорционально x. Напомним, что толщина ламинарного пограничного слоя растет как $x^{1/2}$, т. е. медленнее, чем в турбулентном слое.

Определим зависимость от x силы трения σ, действующей на единицу площади поверхности пластинки. Эта зависимость определяется двумя формулами:

$$\sigma = \rho v_*^2, \quad U = \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{v_*^2 x}{U\nu}.$$

Вторая из них получается подстановкой (44.2) в (44.1) и обладает логарифмической точностью. Введем коэффициент сопротивле-

---

[1]) Фактически логарифмический профиль наблюдается не на всей толщине пограничного слоя. Последние 20–25 % набора скорости на его наружной стороне происходят быстрее, чем по логарифмическому закону. Эти отклонения связаны, по-видимому, с нерегулярными колебаниями границы слоя (ср. сказанное в конце § 35 о границах турбулентных областей).

[2]) Строго говоря, расстояние x должно отсчитываться примерно от места перехода ламинарного слоя в турбулентный.

ния c (отнесенный к единице площади поверхности пластинки), определяемый как безразмерное отношение

$$c = \frac{2\sigma}{\rho U^2} = 2\left(\frac{v_*}{U}\right)^2. \tag{44.3}$$

Тогда, исключая v_* из двух написанных уравнений, получим следующее уравнение, определяющее (с логарифмической точностью) в неявном виде зависимость c от x:

$$\sqrt{\frac{2\varkappa^2}{c}} = \ln c\mathrm{R}_x, \quad \mathrm{R}_x = \frac{Ux}{\nu}. \tag{44.4}$$

Определяемый этой формулой коэффициент сопротивления c является медленно убывающей функцией расстояния x.

Через эту функцию можно выразить толщину пограничного слоя. Имеем

$$v_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = U\sqrt{\frac{c}{2}}\,.$$

Подставив это в (44.2), находим

$$\delta = \mathrm{const} \cdot x\sqrt{c}. \tag{44.5}$$

Эмпирическое значение коэффициента в этой формуле — около 0,3.

Аналогичным образом можно получить формулы для турбулентного пограничного слоя на шероховатой поверхности. Согласно формуле (42.13) вместо (44.1) имеем теперь

$$U = \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{\delta}{d},$$

где d — размеры выступов шероховатости. Подставив сюда δ из (44.2), получим

$$U = \frac{v_*}{\varkappa} \ln \frac{xv_*}{Ud},$$

или, введя сюда коэффициент сопротивления (44.3):

$$\sqrt{\frac{2\varkappa^2}{c}} = \ln \frac{x\sqrt{c}}{d}. \tag{44.6}$$

§ 45. Кризис сопротивления

Из полученных в последних параграфах результатов можно сделать существенные заключения о законе сопротивления при больших числах Рейнольдса, т. е. о зависимости действующей на обтекаемое тело силы сопротивления от R при больших значениях последнего.

Картина обтекания при больших R (о которых только и идет речь ниже) выглядит, как уже говорилось, следующим образом. Во всем основном объеме жидкости (т. е. везде, за исключением пограничного слоя, которым мы здесь не интересуемся) жидкость может рассматриваться как идеальная, причем ее движение является потенциальным везде, кроме области турбулентного следа. Размеры — ширина — следа зависят от положения линии отрыва на поверхности обтекаемого тела. При этом существенно, что хотя это положение и определяется свойствами пограничного слоя, но в результате оказывается, как было отмечено в § 40, не зависящим от числа Рейнольдса. Таким образом, мы можем сказать, что вся картина обтекания при больших числах Рейнольдса практически не зависит от вязкости, т. е., другими слонами, от R (до тех пор, пока пограничный слой остается ламинарным; см. ниже).

Отсюда следует, что и сила сопротивления не может зависеть от вязкости. В нашем распоряжении остаются только три величины: скорость U натекающего потока, плотность жидкости ρ и размеры тела l. Из них можно составить всего лишь одну величину с размерностью силы — $\rho U^2 l^2$. Вместо квадрата линейных размеров тела введем, как это обычно делают, пропорциональную ему площадь S поперечного (по отношению к направлению обтекания) сечения тела и напишем:

$$F = \text{const} \cdot \rho U^2 S, \tag{45.1}$$

где const — численная постоянная, зависящая только от формы тела. Таким образом, сила сопротивления должна быть (при больших R) пропорциональна площади сечения тела и квадрату скорости обтекания. Напомним для сравнения, что при совсем малых R ($\text{R} \ll 1$) сопротивление было пропорционально первой степени линейных размеров тела и первой степени скорости ($F \sim \nu\rho l U$; см. § 20) [1].

Обычно, как уже говорилось, вместо силы сопротивления F рассматривают коэффициент сопротивления C, определяемый как

$$C = \frac{F}{{}^1\!/_2\,\rho U^2 S};$$

C является безразмерной величиной и может зависеть только от R. Формула (45.1) напишется в виде

$$C = \text{const}, \tag{45.2}$$

т. е. коэффициент сопротивления зависит только от формы тела.

[1]) Своеобразный случай, когда сопротивление остается пропорциональным первой степени скорости при больших значениях R, — обтекание пузырька газа; см. задачу к этому параграфу.

Такой ход силы сопротивления не может, однако, продолжаться до сколь угодно больших чисел Рейнольдса. Дело в том, что при достаточно больших R ламинарный пограничный слой (на поверхности тела до линии отрыва) делается неустойчивым и турбулизуется. При этом турбулизуется не весь пограничный слой, а лишь некоторая его часть. Вся поверхность тела может быть разделена, таким образом, на три части: на передней имеется ламинарный пограничный слой, затем идет область турбулентного слоя и, наконец, область за линией отрыва.

Турбулизация пограничного слоя существенно сказывается на всей картине течения в основном потоке: она приводит к заметному смещению линии отрыва вниз по течению жидкости, так что турбулентный след за телом сужается (как это изображено схематически на рис. 33; область следа заштрихована [1]).

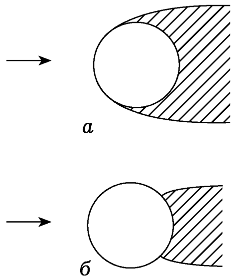


Рис. 33

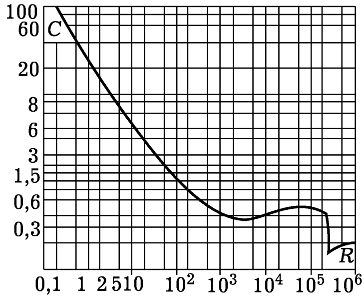


Рис. 34

Сужение турбулентного следа приводит к уменьшению силы сопротивления. Таким образом, турбулизация пограничного слоя при больших числах Рейнольдса сопровождается падением коэффициента сопротивления. Коэффициент сопротивления падает в несколько раз в сравнительно узком интервале чисел Рейнольдса (в области R, равных нескольким 10^5). Это явление называется *кризисом сопротивления*. Уменьшение коэффициента сопротивления настолько значительно, что само сопротивление, которое при постоянном C должно возрастать пропорционально квадрату скорости, в этой области чисел Рейнольдса даже убывает с возрастанием скорости [2].

[1]) Так, при поперечном обтекании длинного цилиндра турбулизация пограничного слоя сдвигает положение точки отрыва от 95 до 60° (угол на окружности сечения цилиндра отсчитывается от направления обтекания).

[2]) Отметим, что первое возникновение нестационарности при обтекании шара (при R порядка нескольких десятков) не сопровождается скачкообразным изменением силы сопротивления. Это связано с непрерывностью перехода при мягком самовозбуждении. Изменение характера течения могло бы проявиться лишь в появлении излома на кривой C(R).

Можно отметить, что на явление кризиса влияет степень турбулентности набегающего на тело потока. Чем она больше, тем раньше (при меньших R) наступает турбулизация пограничного слоя. В связи с этим и падение коэффициента сопротивления начинается при меньших числах Рейнольдса (и растягивается по более широкому интервалу их значений).

На рисунках 34 и 35 приведен экспериментально найденный график зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса $\mathrm{R} = Ud/\nu$ для шара диаметра d (на рис. 34 — в логарифмическом, а на рис. 35 — в обыкновенном масштабе). При самых малых R ($\mathrm{R} \ll 1$) коэффициент сопротивления падает по закону $C = 24/\mathrm{R}$ (формула Стокса). Падение C продолжается затем более медленно вплоть до $\mathrm{R} \approx 5 \cdot 10^3$, где C достигает минимума, вслед за чем несколько повышается. В области чисел Рейнольдса $2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^5$ имеет место закон (45.2), т. е. C практически остается постоянным. При $\mathrm{R} \approx$ $\approx (2 \div 3) \cdot 10^5$ наступает кризис сопротивления, причем коэффициент сопротивления падает примерно в 4 — 5 раз.

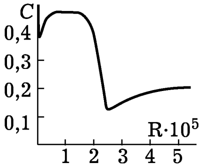


Рис. 35

Для сравнения приведем пример обтекания, при котором не происходит явления кризиса. Рассмотрим обтекание плоского диска в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Место отрыва в этом случае заранее очевидно из чисто геометрических соображений, — ясно, что отрыв произойдет по краю диска и в дальнейшем уже никуда не будет смещаться. Поэтому при увеличении R коэффициент сопротивления диска остается постоянным, не обнаруживая кризиса.

Следует иметь в виду, что при тех больших скоростях, когда наступает кризис сопротивления, может уже стать заметным влияние сжимаемости жидкости. Параметром, характеризующим степень этого влияния, является число $\mathrm{M} = U/c$, где c — скорость звука; жидкость можно рассматривать как несжимаемую, если $\mathrm{M} \ll 1$ (§ 10). Поскольку из двух чисел M и R лишь одно содержит размеры тела, то эти числа могут меняться независимо друг от друга.

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что сжимаемость оказывает в общем стабилизующее влияние на движение в ламинарном пограничном слое. При возрастании числа M увеличивается критическое значение R, при котором происходит турбулизация пограничного слоя. В связи с этим отодвигается также и наступление кризиса сопротивления. Так, для шара при изменении M от 0,3 до 0,7 кризис сопротивления отодвигается примерно от $\mathrm{R} \approx 4 \cdot 10^5$ до $8 \cdot 10^5$.

Укажем также, что при увеличении M положение точки отрыва в ламинарном пограничном слое смещается вверх по те-

чению — по направлению к переднему концу тела, что должно приводить к некоторому увеличению сопротивления.

З а д а ч а

Определить силу сопротивления, действующую на движущийся в жидкости газовый пузырек при больших числах Рейнольдса.

Р е ш е н и е. На границе жидкости с газом должна обращаться в нуль не сама касательная составляющая скорости жидкости, а лишь ее нормальная производная (вязкостью газа пренебрегаем.) Поэтому градиент скорости вблизи поверхности не будет аномально велик, пограничный слой (в том виде, о котором шла речь в § 39) будет отсутствовать, а потому будет отсутствовать (почти по всей поверхности пузырька) также и явление отрыва. При вычислении диссипации энергии с помощью объемного интеграла (16.3) можно поэтому во всем пространстве пользоваться распределением скоростей, соответствующим потенциальному обтеканию шара (задача 2 § 10), пренебрегая при этом ролью поверхностного слоя жидкости и очень тонкого турбулентного следа. Производя вычисление по формуле, полученной в задаче к § 16, найдем

$$\dot{E}_{\text{кин}} = -\eta \int \frac{\partial v^2}{\partial r}\bigg|_{r=R} \cdot 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta = -12\pi\eta R U^2.$$

Отсюда видно, что искомая диссипативная сила сопротивления

$$F = 12\pi\eta R U.$$

Область применимости этой формулы фактически невелика, так как при достаточном увеличении скорости пузырек теряет свою сферическую форму.

§ 46. Хорошо обтекаемые тела

Можно поставить вопрос о том, какова должна быть форма тела (при заданной, например, площади его сечения) для того, чтобы оно испытывало при движении в жидкости по возможности малое сопротивление. Из всего предыдущего ясно, что для этого во всяком случае необходимо достичь по возможности более позднего отрыва: отрыв должен произойти поближе к заднему концу тела так, чтобы турбулентный след был как можно более узким. Мы уже знаем, что возникновение отрыва облегчается наличием быстрого возрастания давления вдоль обтекаемого тела вниз по течению. Поэтому необходимо придать телу такую форму, чтобы изменение давления вдоль него, — в той области, где давление возрастает, происходило по возможности медленно и плавно. Этого можно достичь приданием телу удлиненной (в направлении обтекания) формы, причем оно плавно заостряется в направлении обтекания так, что стекающие с разных сторон поверхности тела потоки как бы плавно смыкаются без того, чтобы им пришлось где-либо обтекать какие-нибудь углы или же сильно поворачивать по отношению к направлению набегающего потока. Спереди же тело должно быть закруглено; при наличии здесь угла скорость жидкости на его краю обратилась бы в беско-

нечность (см. задачу 6 § 10), вслед за чем произошли бы сильное возрастание давления вниз по течению и неизбежный отрыв.

Всем этим требованиям в высокой степени удовлетворяют формы типа, изображенного на рис. 36. Изображенный на нижнем рисунке профиль может представлять собой сечение удлиненного тела вращения, но может быть и сечением тела с большим размахом (о таких телах мы будем условно говорить как о *крыльях*). Профиль сечения крыла может быть и не симметричным, как, например, на верхнем рис. 36. При обтекании тел такой формы отрыв происходит лишь в непосредственной близости острого конца, в результате чего коэффициент сопротивления достигает относительно малых значений. Такие тела называют *хорошо обтекаемыми*.

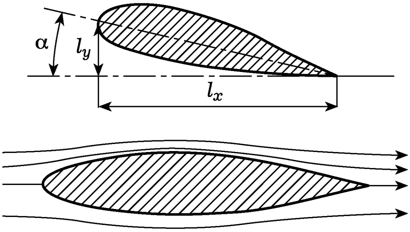


Рис. 36

В сопротивлении хорошо обтекаемых тел заметную роль играет эффект непосредственного трения жидкости о поверхность в пограничном слое. Этот эффект сравнительно очень мал и потому практически совершенно несуществен для плохо обтекаемых тел (о которых шла речь в предыдущем параграфе). В обратном же предельном случае обтекания плоской пластинки (параллельным ей потоком жидкости) он представляет собой единственный источник сопротивления (§ 39).

При обтекании хорошо обтекаемого крыла, наклоненного под малым углом к направлению потока (α на рис. 36, так называемый *угол атаки*), развивается большая подъемная сила F_y, при этом сопротивление F_x становится малым, и в результате отношение F_y/F_x может достичь больших значений (порядка 10—100). Так продолжается, однако, лишь до тех пор, пока угол атаки не сделается слишком большим (обычно $\sim 10^\circ$). После этого сопротивление начинает очень быстро возрастать, а подъемная сила падать. Это явление обусловливается тем, что при больших углах атаки тело перестает удовлетворять условиям хорошей обтекаемости: место отрыва сильно смещается по поверхности тела по направлению к его переднему краю, в результате чего след делается значительно более широким. Надо иметь в виду, что в предельном случае тела очень малой толщины, т. е. плоской пластинки, хорошее обтекание имеет место только при очень малом угле атаки; отрыв происходит на переднем крае пластинки уже при малых углах ее наклона к направлению потока.

Угол атаки α отсчитывается, по определению, от того положения крыла, при котором подъемная сила равна нулю. При ма-

лых углах атаки подъемную силу можно разложить в ряд по степеням α. Ограничиваясь первым членом разложения, мы можем считать силу F_y пропорциональной α. Далее, по тем же соображениям размерности, как и для силы сопротивления, подъемная сила должна быть пропорциональна ρU^2. Введя также длину размаха l_z крыла, можно написать:

$$F_y = \mathrm{const}\cdot\rho U^2 \alpha l_x l_z, \tag{46.1}$$

где const — численная постоянная, зависящая только от формы крыла и не зависящая, в частности, от угла атаки. Для крыльев очень большого размаха можно считать подъемную силу пропорциональной размаху; в этом случае const зависит только от формы профиля поперечного сечения крыла.

Вместо подъемной силы крыла часто пользуются так называемым коэффициентом подъемной силы, определяемым как

$$C_y = \frac{F_y}{{}^1\!/_2\rho U^2 l_x l_z}. \tag{46.2}$$

Для крыльев очень большого размаха согласно сказанному выше он пропорционален углу атаки и не зависит ни от скорости движения, ни от размаха крыла:

$$C_y = \mathrm{const}\cdot\alpha. \tag{46.3}$$

Для вычисления подъемной силы хорошо обтекаемого крыла с помощью формулы Жуковского необходимо определить циркуляцию скорости Γ. Это делается следующим образом. Везде, кроме области следа, движение потенциально. В данном же случае след очень тонок и занимает на поверхности крыла лишь очень небольшую область вблизи его задней заостренной кромки. Поэтому для определения распределения скоростей (а с ним и циркуляции Γ) можно решать задачу о потенциальном обтекании крыла идеальной жидкостью. Наличие следа учитывается при этом тем, что от острой задней кромки крыла отходит поверхность касательного разрыва, на которой потенциал испытывает скачок $\varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma$. Как было уже показано в § 38, на этой поверхности испытывает скачок также и производная $\partial\varphi/\partial z$, а производные $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ непрерывны. Для крыла конечного размаха поставленная таким образом задача имеет однозначное решение. Нахождение точного решения, однако, весьма сложно.

Если крыло обладает очень большим размахом (и постоянным вдоль размаха сечением), то, рассматривая его как бесконечно длинное вдоль оси z, можно считать движение жидкости плоским (в плоскости xy). Из соображений симметрии ясно, что при этом скорость $v_z = \partial\varphi/\partial z$ в направлении размаха будет вообще равной нулю. В этом случае, следовательно, мы долж-

ны искать решение, в котором испытывает скачок только сам потенциал при непрерывных его производных; другими словами, поверхность касательного разрыва вообще отсутствует, и мы имеем дело просто с неоднозначной функцией $\varphi(x, y)$, принимающей конечное приращение Γ при обходе по замкнутому контуру, охватывающему обтекаемый профиль. В таком виде, однако, задача о плоском обтекании не однозначна, так как допускает решение при произвольном, заранее заданном скачке потенциала. Для получения однозначного ответа необходимо потребовать выполнения дополнительного условия (*С.А. Чаплыгин*, 1909).

Это условие заключается в требовании, чтобы скорость жидкости не обращалась в бесконечность на острой задней кромке крыла; напомним в этой связи, что при огибании угла идеальной жидкостью скорость в вершине угла обращается, вообще говоря, в бесконечность по степенному закону (задача 6 § 10). Можно сказать, что поставленное условие означает, что струи, стекающие с обеих сторон крыла, должны плавно смыкаться без того, чтобы поворачивать вокруг острого угла. Естественно, что при выполнении этого условия решение задачи о потенциальном обтекании приведет к картине, наиболее близкой к истинной, при которой скорость везде конечна и отрыв происходит лишь у самой задней кромки. Решение становится после этого вполне однозначным и, в частности, определяется и нужная для вычисления подъемной силы циркуляция Γ.

§ 47. Индуктивное сопротивление

Существенную часть силы сопротивления, испытываемой хорошо обтекаемым крылом (конечного размаха), составляет сопротивление, связанное с диссипацией энергии в тонком турбулентном следе. Это сопротивление называют индуктивным.

В § 21 было показано, каким образом можно вычислить связанную со следом силу сопротивления, рассматривая движение жидкости вдали от тела. Полученная там формула (21.1), однако, в данном случае неприменима. Согласно этой формуле сопротивление определяется интегралом от v_x по площади сечения следа, т. е. расходом жидкости через сечение следа. Но ввиду тонкости следа за хорошо обтекаемым крылом этот расход в данном случае мал, и в рассматриваемом ниже приближении им можно вовсе пренебречь.

Подобно тому как мы поступали в § 21, запишем силу F_x в виде разности полных потоков x-компоненты импульса через плоскости $x = x_1$ и $x = x_2$, проходящие соответственно значительно позади и значительно впереди тела. Написав три компоненты скорости в виде $U + v_x$, v_y, v_z, будем иметь для компоненты Π_{xx} плотности потока импульса выражение $\Pi_{xx} = p + \rho(U + v_x)^2$, так

что сила сопротивления есть

$$F_x = \left(\iint\limits_{x=x_2} - \iint\limits_{x=x_1} \right) [p + \rho(U + v_x)^2]\, dy\, dz. \qquad (47.1)$$

Ввиду тонкости следа можно пренебречь (в интеграле по плоскости $x = x_1$) интегралом по площади его сечения и, таким образом, интегрировать везде только по области вне следа. Но вне следа движение потенциально и имеет место формула Бернулли

$$p + \frac{\rho}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = p_0 + \frac{\rho U^2}{2},$$

откуда

$$p = p_0 - \rho U v_x - \frac{\rho}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \qquad (47.2)$$

Пренебречь здесь квадратичными членами (как это было сделано в § 21) нельзя, так как именно ими определяется в данном случае искомая сила сопротивления. Подставляя (47.2) в (47.1), получим

$$F_x = \left(\iint\limits_{x=x_2} - \iint\limits_{x=x_1} \right) \left[p_0 + \rho U^2 + \rho U v_x + \frac{\rho}{2}(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) \right] dy\, dz.$$

Разность интегралов от постоянной величины $p_0 + \rho U^2$ обращается в нуль; исчезает также разность интегралов от $\rho U v_x$, поскольку потоки жидкости $\iint \rho v_x\, dy\, dz$ через переднюю и заднюю плоскости должны быть одинаковыми (расходом жидкости через сечение следа в рассматриваемом приближении пренебрегаем). Далее, отодвигая плоскость $x = x_2$ достаточно далеко вперед от тела, будем иметь на ней очень малые значения скорости $\mathbf{v}$, так что интегралом от $\rho(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)$ по этой плоскости можно пренебречь. Наконец, при обтекании хорошо обтекаемого крыла скорость v_x вне следа мала по сравнению с v_y и v_z. Поэтому в интеграле по плоскости $x = x_1$ можно пренебречь v_x^2 по сравнению с $v_y^2 + v_z^2$. Таким образом, получаем

$$F_x = \frac{\rho}{2} \iint (v_y^2 + v_z^2)\, dy\, dz, \qquad (47.3)$$

где интегрирование производится по плоскости $x = \text{const}$, расположенной на большом расстоянии позади тела, причем сечение следа исключается из области интегрирования [1]).

[1]) Формула (47.3) может создать впечатление, что порядок величины скоростей v_y, v_z вообще не убывает с расстоянием x. Это действительно так до тех пор, пока толщина следа мала по сравнению с его шириной, что и предполагалось при выводе формулы (47.3). На очень больших расстояниях позади крыла след в конце концов расширится настолько, что его сечение станет примерно круговым. Формула (47.3) здесь уже неприменима, а скорости v_y, v_z будут быстро убывать с увеличением расстояния.

Вычисленное таким образом сопротивление хорошо обтекаемого крыла можно выразить через ту же циркуляцию скорости Г, которая определяет, и подъемную силу. Для этого прежде всего заметим, что на достаточно большом расстоянии от тела скорость слабо зависит от координаты x и потому можно рассматривать $v_y(y, z)$, $v_z(y, z)$ как скорость некоторого двумерного движения, считая ее не зависящей от x вовсе. Удобно ввести в качестве вспомогательной величины функцию тока (§ 10), так что $v_x = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial z$. Таким образом,

$$F_x = \frac{\rho}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] dy\,dz,$$

где интегрирование по вертикальной координате y производится от $+\infty$ до y_1 и от y_2 до $-\infty$ (y_1, y_2 — координаты верхней и нижней границ следа; см. рис. 26). Ввиду потенциальности движения вне следа ($\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$) имеем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0.$$

Применяя к написанному интегралу двумерную формулу Грина, получаем

$$F_x = -\frac{\rho}{2}\oint\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dl,$$

где интегрирование производится по контуру, огибающему область интегрирования в исходном интеграле ($\partial/\partial n$ — дифференцирование по направлению внешней нормали к контуру). На бесконечности $\psi = 0$ и, следовательно, надо интегрировать по контуру поперечного сечения следа (сечения плоскостью yz), в в результате чего получаем

$$F_x = \frac{\rho}{2}\int\psi\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1\right] dz.$$

Здесь надо интегрировать по ширине следа dz, а стоящая в квадратных скобках разность есть скачок производной $\partial\psi/\partial y$ при прохождении через след. Замечая, что $\partial\psi/\partial y = v_z = \partial\varphi/\partial z$, имеем

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_1 = \frac{d\Gamma}{dz},$$

так что

$$F_x = \frac{\rho}{2}\int\psi\frac{d\Gamma}{dz}\,dz.$$

Наконец, воспользуемся известной из теории потенциала формулой

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_1\right]\ln r\,dl,$$

где интегрирование производится по некоторому плоскому контуру, r — расстояние от dl до точки, в которой разыскивается значение ψ, а в квадратных скобках стоит заданный скачок производной от ψ по направлению нормали к контуру [1]. В нашем случае контуром интегрирования является отрезок оси z, так что для значений функции $\psi(y, z)$ на оси z можно написать:

$$\psi(0, z) = \frac{1}{2\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_2\right]\ln|z - z'|\,dz' = \\ = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\Gamma(z')}{dz'}\ln|z - z'|\,dz'.$$

Наконец, подставляя это в F_x, получим окончательно для индуктивного сопротивления следующую формулу:

$$F_x = -\frac{\rho}{4\pi}\int_0^l\int_0^l \frac{d\Gamma(z)}{dz}\frac{d\Gamma(z')}{dz'}\ln|z - z'|\,dz\,dz' \tag{47.4}$$

(*L. Prandtl*, 1918). Длина размаха крыла обозначена здесь через $l_z = l$, а начало отсчета z выбрано на одном из его концов.

Если увеличить все размеры по оси z в некоторое число раз (при неизменных Γ), то интеграл (47.4) не изменится [2]. Это показывает, что полное индуктивное сопротивление крыла не изменяется по порядку величины при увеличении его размаха. Другими словами, индуктивное сопротивление, отнесенное к единице длины крыла, падает с увеличением этой длины [3]. В противоположность сопротивлению полная подъемная сила

$$F_y = -\rho U\int\Gamma\,dz \tag{47.5}$$

[1]) Эта формула определяет в двумерной теории потенциала потенциал, создаваемый заряженным плоским контуром с плотностью заряда, равной

$$\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_1\right].$$

[2]) Во избежание недоразумений отметим, что тот факт, что при изменении единиц измерения длины стоящий под знаком интеграла логарифм увеличивается на постоянную, несуществен. Действительно, интеграл, отличающийся от написанного тем, что в нем вместо $\ln|z - z'|$ стоит const, все равно равен нулю, так как $\int\frac{d\Gamma}{dz}dz = \Gamma| = 0$ (на краях следа Γ обращается в нуль).

[3]) В пределе, при стремлении размаха к бесконечности, отнесенное к единице длины индуктивное сопротивление обращается в нуль. В действительности при этом остается небольшое сопротивление, определяющееся расходом жидкости (т. е. интегралом $\iint v_x\,dy\,dz$) в следе, которым мы пренебрегли при выводе формулы (47.3); это сопротивление включает в себя как сопротивление трения, так и остающуюся часть сопротивления, связанного с диссипацией в следе.

растет примерно пропорционально размаху крыла, а отнесенная к единице длины — остается постоянной.

Для фактического вычисления интегралов (47.4) и (47.5) удобен следующий метод. Вместо координаты z вводим новую переменную θ согласно выражению

$$z = \frac{l}{2}(1 - \cos\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{47.6}$$

Распределение же циркуляции задается в виде тригонометрического ряда

$$\Gamma = -2Ul \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta. \tag{47.7}$$

Здесь выполнено условие $\Gamma = 0$ на концах крыла, т. е. при $z = 0$, l или $\theta = 0$, π.

Подставив это выражение в формулу (47.5) и производя интегрирование (учитывая при этом взаимную ортогональность функций $\sin\theta$ и $\sin n\theta$ с $n \neq 1$), получим

$$F_y = \frac{\rho U^2}{2}\pi l^2 A_1.$$

Таким образом, подъемная сила зависит только от первого коэффициента в разложении (47.7). Для коэффициента подъемной силы (46.2) имеем

$$C_y = \pi\lambda A_1, \tag{47.8}$$

где введено отношение $\lambda = l/l_x$ размаха крыла к его ширине.

Для вычисления сопротивления перепишем формулу (47.4), произведя в ней однократное интегрирование по частям:

$$F_x = \frac{\rho}{4\pi}\int_0^l\int_0^l \Gamma(z)\frac{d\Gamma(z')}{dz'}\frac{dz'\,dz}{z - z'}. \tag{47.9}$$

Стоящий здесь интеграл по dz' должен быть взят, как легко видеть, в смысле его главного значения. Элементарное вычисление с подстановкой (47.7) [1]) приводит к следующей формуле для

[1]) При интегрировании по dz' приходится брать интеграл (главное значение)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta}\,d\theta' = \frac{\pi \sin n\theta}{\sin\theta}.$$

При интегрировании же по dz пользуемся тем, что

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta\,d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{при} \quad n = m, \\ 0 & \text{при} \quad n \neq m. \end{cases}$$

коэффициента индуктивного сопротивления:

$$C_x = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2. \tag{47.10}$$

Коэффициент сопротивления крыла мы определяем как

$$C_x = \frac{F_x}{{}^1\!/_2 \rho U^2 l_x l_z}, \tag{47.11}$$

относя его, как и коэффициент подъемной силы, к площади крыла в плане.

Задача

Определить минимальное значение индуктивного сопротивления, которое может быть достигнуто при заданных подъемной силе и размахе крыла $l_z = l$.

Решение. Из формул (47.8) и (47.10) ясно, что минимальное значение C_x при заданном C_y (т. е. заданном A_1) достигается, если равны нулю все A_n с $n \neq 1$. При этом

$$C_{x\ \min} = \frac{1}{\pi\lambda} C_y^2. \tag{1}$$

Распределение же циркуляции по размаху крыла дается формулой

$$\Gamma = -\frac{4}{\pi l} U l_x C_y \sqrt{z(l-z)}\,. \tag{2}$$

Если длина размаха достаточно велика, то движение жидкости вокруг каждого сечения крыла приближенно соответствует плоскому обтеканию бесконечно длинного крыла с таким профилем сечения. В этом случае можно утверждать, что распределение (2) циркуляции осуществляется при эллиптической в плане (в плоскости xz) форме крыла с полуосями $l_x/2$ и $l/2$.

§ 48. Подъемная сила тонкого крыла

Задача о вычислении подъемной силы крыла сводится по теореме Жуковского к задаче о вычислении циркуляции Γ. Эта задача может быть решена в общем виде для хорошо обтекаемого тонкого крыла бесконечного размаха, с постоянным вдоль размаха профилем сечения (излагаемый ниже метод решения принадлежит *М.В. Келдышу* и *Л.И. Седову*, 1939).

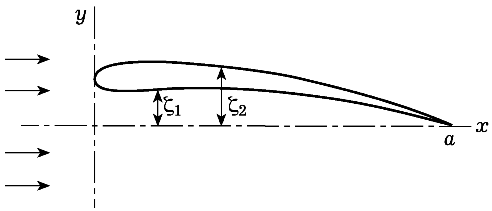


Рис. 37

Пусть $y = \zeta_1(x)$ и $y = \zeta_2(x)$ — уравнения нижней и верхней частей контура сечения (рис. 37). Мы предполагаем, что этот профиль тонкий, слабо изогнутый и наклонен к направлению обтекания (оси x) под малым углом атаки; другими словами, малы как

сами ζ_1, ζ_2, так и производные ζ_1', ζ_2', т. е. нормаль к контуру направлена везде почти параллельно оси y. При этих условиях можно считать возмущение $\mathbf{v}$ скорости жидкости, вызываемое присутствием крыла, везде (кроме лишь малой области вблизи передней закругленной кромки крыла) малым по сравнению со скоростью натекания U. Граничное условие на поверхности крыла гласит $v_y/U = \zeta'$ при $y = \zeta$. В силу сделанных предположений можно потребовать его выполнения не при $y = \zeta$, а при $y = 0$. Тогда на отрезке оси абсцисс от $x = 0$ до $x = l_x \equiv a$ должно быть:

$$v_y = U\zeta_2'(x) \quad \text{при} \quad y \to +0, \qquad v_y = U\zeta_1'(x) \quad \text{при} \quad y \to -0. \tag{48.1}$$

Имея в виду применить методы теории функций комплексного переменного, вводим комплексную скорость $dw/dz = v_x - iv_y$ (ср. § 10), представляющую собой аналитическую функцию переменной $z = x + iy$. В данном случае на отрезке $(0,\, a)$ оси абсцисс эта функция должна удовлетворять условию

$$\operatorname{Im}\frac{dw}{dz} = \begin{cases} -U\zeta_2'(x) & \text{при} \quad y \to +0, \\ -U\zeta_1'(x) & \text{при} \quad y \to -0. \end{cases} \tag{48.2}$$

Для решения поставленной задачи прежде всего представим искомое поле скоростей $v(x,\, y)$ в виде суммы $\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-$ двух распределений, обладающих следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} &v_x^-(x,\, -y) = v_x^-(x,\, y), \qquad v_y^-(x,\, -y) = -v_y^-(x,\, y), \\ &v_x^+(x,\, -y) = -v_x^+(x,\, y), \quad v_y^+(x,\, -y) = v_y^+(x,\, y). \end{aligned} \tag{48.3}$$

Эти свойства (для каждого из распределений $\mathbf{v}^-$ и $\mathbf{v}^+$ в отдельности) не противоречат уравнениям непрерывности и потенциальности, и ввиду линейности задачи эти распределения можно искать независимо друг от друга.

Соответственно представится в виде суммы $w' = w_+' + w_-'$ также и комплексная скорость, причем граничные условия на отрезке $(0,\, a)$ для обоих членов суммы гласят:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} w_+'\big|_{y\to+0} = \operatorname{Im} w_+'\big|_{y\to-0} = -\frac{U}{2}\bigl(\zeta_1' + \zeta_2'\bigr), \\ &\operatorname{Im} w_-'\big|_{y\to+0} = -\operatorname{Im} w_-'\big|_{y\to-0} = \frac{U}{2}\bigl(\zeta_1' - \zeta_2'\bigr) \end{aligned} \tag{48.4}$$

Функция w_-' может быть определена с помощью формулы Коши:

$$w_-'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{w_-'(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,$$

где интегрирование производится в плоскости комплексного переменного ξ по окружности L малого радиуса с центром в точке $\xi = z$ (рис. 38). Контур L можно заменить окружностью C' бесконечно большого радиуса и обходимым по часовой стрелке контуром C; последний может быть стянут к дважды пробегаемому отрезку $(0,\, a)$. Интеграл по C' обращается в нуль, так как $w'(z)$ исчезает на бесконечности. Интеграл же по C дает следующее выражение:

$$w'_- = -\frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta_2'(\xi) - \zeta_1'(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{48.5}$$

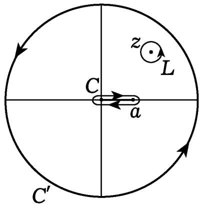


Рис. 38

При этом мы воспользовались предельными значениями (48.4) мнимой части w'_- на отрезке $(0,\, a)$ и тем, что согласно условиям симметрии (48.3) вещественная часть w'_- на этом отрезке не испытывает скачка.

Для нахождения же функции w'_+ надо применить формулу Коши не к самой этой функции, а к произведению $w'_+(z)g(z)$, где

$$g(z) = \sqrt{\frac{z}{z-a}},$$

причем при $z = x > a$ корень берется со знаком плюс. На отрезке $(0,\, a)$ вещественной оси функция $g(z)$ чисто мнимая и имеет разрыв:

$$g(x + i0) = -g(x - i0) = -i\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Ввиду этих свойств функции $g(z)$ ясно, что мнимая часть произведения gw'_+ будет иметь на отрезке $(0,\, a)$ разрыв, а вещественная часть будет непрерывна, подобно тому как это имеет место у функции w'_-. Поэтому в точности аналогично выводу формулы (48.5) получим

$$w'_+(z)g(z) = -\frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta_1'(\xi) + \zeta_2'(\xi)}{\xi - z} g(\xi + i0)\, d\xi.$$

Собирая полученные выражения, найдем окончательно следующую формулу, определяющую распределение скоростей вокруг тонкого крыла:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{U}{2\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z}}\int_0^a \frac{\zeta_1'(\xi) + \zeta_2'(\xi)}{\xi - z}\sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}}\, d\xi - \frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta_2'(\xi) - \zeta_1'(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{48.6}$$

Вблизи закругленной передней кромки (т. е. при $z \to 0$) это выражение, вообще говоря, обращается в бесконечность, что связано с непригодностью в этой области рассматриваемого приближения. Вблизи же задней заостренной кромки (т. е. при $z \to 0$) первый член в (48.6) конечен; второй же член хотя, вообще говоря, и обращается в бесконечность, но лишь логарифмическим образом [1]. Эта логарифмическая особенность связана с характером принятого здесь приближения и исчезает при более точном рассмотрении; никакой же степенной расходимости, в согласии с условием Чаплыгина, на задней кромке не оказывается. Выполнение этого условия достигнуто соответствующим выбором использованной выше функции $g(z)$.

Формула (48.6) позволяет определить циркуляцию скорости Γ вокруг профиля крыла. Согласно общему правилу (см. § 10) Γ определяется вычетом функции $w'(z)$ относительно точки $z = 0$, являющейся ее простым полюсом. Искомый вычет легко определить как коэффициент при $1/z$ в разложении функции $w'(z)$ по степеням $1/z$ бесконечно удаленной точки:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \ldots,$$

причем для Γ получается простая формула

$$\Gamma = U\int_0^a \left(\zeta_1' + \zeta_2'\right)\sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}}\,d\xi. \tag{48.7}$$

Отметим, что сюда входит только сумма функций ζ_1 и ζ_2. Можно сказать, что подъемная сила не изменится, если заменить тонкое крыло изогнутой пластинкой, форма которой задается функцией $(\zeta_1 + \zeta_2)/2$.

Так, например, для крыла в виде плоской пластинки бесконечного размаха, наклоненной под малым углом атаки α, имеем $\zeta_1 = \zeta_2 = \alpha(a - x)$, и формула (48.7) дает $\Gamma = -\pi\alpha a U$. Коэффициент подъемной силы такого крыла равен

$$C_y = \frac{-\rho U\Gamma}{{}^1\!/_2\rho U^2 a} = 2\pi\alpha.$$

[1]) Эта расходимость отсутствует, если вблизи задней кромки ζ_1 и ζ_2 обращаются в нуль как $(a-x)^k$, $k > 1$, т. е. если угловая точка контура у заднего его края есть точка возврата.

ГЛАВА V

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ЖИДКОСТИ

§ 49. Общее уравнение переноса тепла

В конце § 2 было указано, что полная система гидродинамических уравнений должна содержать пять уравнений. Для жидкости, в которой имеют место процессы теплопроводности и внутреннего трения, одним из этих уравнений является по-прежнему уравнение непрерывности; уравнения Эйлера заменяются уравнениями Навье–Стокса. Что же касается пятого уравнения, то для идеальной жидкости им является уравнение сохранения энтропии (2.6). В вязкой жидкости это уравнение, разумеется, не имеет места, поскольку в ней происходят необратимые процессы диссипации энергии.

В идеальной жидкости закон сохранения энергии выражается уравнением (6.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right].$$

Слева стоит скорость изменения энергии единицы объема жидкости, а справа — дивергенция плотности потока энергии. В вязкой жидкости закон сохранения энергии, конечно, тоже имеет место: изменение полной энергии жидкости в некотором объеме (в 1 с) должно быть по-прежнему равно полному потоку энергии через границы этого объема. Однако плотность потока энергии выглядит теперь иным образом. Прежде всего помимо потока $\rho\mathbf{v}(v^2/2+w)$, связанного с простым переносом массы жидкости при ее движении, имеется еще поток, связанный с процессами внутреннего трения. Этот второй поток выражается вектором — $(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')$ с компонентами $v_i\sigma'_{ik}$ (см. § 16). Этим, однако, не исчерпываются все дополнительные члены в потоке энергии.

Если температура жидкости не постоянна вдоль ее объема, то наряду с обоими указанными механизмами переноса энергии будет происходить перенос тепла также и посредством так называемой *теплопроводности*. Под этим подразумевается непосредственный молекулярный перенос энергии из мест с более высокой в места с более низкой температурой. Он не связан с макроскопическим движением и происходит также и в неподвижной жидкости.

Обозначим через $\mathbf{q}$ плотность потока тепла, переносимого посредством теплопроводности. Поток $\mathbf{q}$ связан некоторым образом с изменением температуры вдоль жидкости. Эту зависимость можно написать сразу в тех случаях, когда градиент температуры в жидкости не слишком велик; практически в явлениях теплопроводности мы почти всегда имеем дело именно с такими случаями. Мы можем тогда разложить $\mathbf{q}$ в ряд по степеням градиента температуры, ограничившись первыми членами разложения. Постоянный член в этом разложении, очевидно, исчезает, поскольку $\mathbf{q}$ должно обращаться в нуль вместе с ∇T. Таким образом, получаем

$$\mathbf{q} = -\varkappa \nabla T. \tag{49.1}$$

Постоянная $\varkappa$ называется *теплопроводностью*. Она всегда положительна, — это видно уже из того, что поток энергии должен быть направлен из мест с более высокой в места с более низкой температурой, т. е. $\mathbf{q}$ и ∇T должны иметь противоположные направления. Коэффициент $\varkappa$ является, вообще говоря, функцией температуры и давления.

Таким образом, полная плотность потока энергии в жидкости при наличии вязкости и теплопроводности равна сумме

$$\rho \mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) - (\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}') - \varkappa \nabla T.$$

Соответственно этому общий закон сохранения энергии выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\operatorname{div}\left[\rho \mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) - (\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}') - \varkappa \nabla T\right]. \tag{49.2}$$

Это уравнение можно было бы выбрать в качестве последнего из полной системы гидродинамических уравнений вязкой жидкости. Удобно, однако, придать ему другой вид, преобразовав его с помощью уравнений движения. Для этого вычислим производную по времени от энергии единицы объема жидкости, исходя из уравнений движения. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = \frac{v^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v}\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Подставляя сюда $\partial\rho/\partial t$ из уравнения непрерывности и $\partial\mathbf{v}/\partial t$ из уравнения Навье–Стокса, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\frac{v^2}{2}\operatorname{div}\rho\mathbf{v} - \rho(\mathbf{v}\nabla)\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\nabla p + v_i\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} + \\ + \rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \operatorname{div}\rho\mathbf{v}.$$

Воспользуемся теперь термодинамическим соотношением

$$d\varepsilon = Tds - p\,dV = Tds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho,$$

откуда

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} = T\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2}\,\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}).$$

Подставляя это и вводя тепловую функцию $w = \varepsilon + p/\rho$, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\left(w + \frac{v^2}{2}\right)\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v}\nabla)\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\nabla p + \\ + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} + v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

Далее, из термодинамического соотношения $dw = Tds + dp/\rho$ имеем

$$\nabla p = \rho\nabla w - \rho T\nabla s.$$

Последний же член в правой части равенства можно написать в виде

$$v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v_i\sigma'_{ik}\right) - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \equiv \mathrm{div}(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Подставляя эти выражения, прибавляя и вычитая $\mathrm{div}(\varkappa\nabla T)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\,\mathrm{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) - (\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}') - \varkappa\nabla T\right] + \\ + \rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \mathrm{div}(\varkappa\nabla T). \quad (49.3)$$

Сравнив это выражение для производной от энергии единицы объема с выражением (49.2), получим следующее уравнение:

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \mathrm{div}(\varkappa\nabla T). \quad (49.4)$$

Мы будем называть это уравнение *общим уравнением переноса тепла*. При отсутствии вязкости и теплопроводности его правая часть обращается в нуль и получается уравнение сохранения энтропии (2.6) идеальной жидкости.

Нужно обратить внимание на следующее истолкование уравнения (49.4). Стоящее слева выражение есть не что иное, как умноженная на ρT полная производная от энтропии по времени ds/dt. Последняя определяет изменение энтропии данной передвигающейся в пространстве единицы массы жидкости; Tds/dt

есть, следовательно, количество тепла, получаемого этой единицей массы в единицу времени, а $\rho T ds/dt$ — количество тепла, отнесенное к единице объема. Из (49.4) мы видим поэтому, что количество тепла, получаемого единицей объема жидкости, есть

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\varkappa\nabla T).$$

Первый член здесь представляет собой энергию, диссипируемую в виде тепла благодаря вязкости, а второй — тепло, приносимое в рассматриваемый объем посредством теплопроводности.

Раскроем первый член в правой части уравнения (49.4), подставив в него выражение (15.3) для σ'_{ik}:

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Легко проверить, что первый член может быть написан в виде

$$\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2,$$

а во втором имеем

$$\zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2.$$

Таким образом, уравнение (49.4) приобретает вид

$$\rho T\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) = \operatorname{div}(\varkappa\nabla T) + \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 + \zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2. \quad (49.5)$$

В результате необратимых процессов теплопроводности и внутреннего трения энтропия жидкости возрастает. Речь идет при этом, конечно, не об энтропии каждого элемента объема жидкости в отдельности, а о полной энтропии всей жидкости, равной интегралу $\int \rho s\, dV$. Изменение энтропии в единицу времени определяется производной

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s\, dV = \int \frac{\partial(\rho s)}{\partial t}\, dV.$$

С помощью уравнения непрерывности и уравнения (49.5) имеем

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = \rho\frac{\partial s}{\partial t} + s\frac{\partial \rho}{\partial t} = -s\operatorname{div}\rho\mathbf{v} - \rho\mathbf{v}\nabla s + \frac{1}{T}\operatorname{div}(\varkappa\nabla T) + \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 + \frac{\zeta}{T}(\operatorname{div}\mathbf{v})^2.$$

Первые два члена дают в сумме $-\operatorname{div}(\rho s\mathbf{v})$. Интеграл по объему от этого члена преобразуется в интеграл от потока энтропии $\rho s\mathbf{v}$ по поверхности. Рассматривая неограниченный объем жидкости, покоящейся на бесконечности, мы можем стремить граничную поверхность на бесконечность; тогда подынтегральное выражение в поверхностном интеграле обращается в нуль и интеграл исчезает. Интеграл от третьего члена преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{1}{T}\operatorname{div}(\varkappa\nabla T)\,dV = \int \operatorname{div}\left(\frac{\varkappa\nabla T}{T}\right)dV + \int \frac{\varkappa(\nabla T)^2}{T^2}\,dV.$$

Считая, что температура жидкости на бесконечности достаточно быстро стремится к постоянному пределу, преобразуем первый интеграл в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, на которой $\nabla T = 0$, так что интеграл тоже исчезает.

В результате получается:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s\,dV = \int \frac{\varkappa(\nabla T)^2}{T^2}\,dV + \int \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV + \\ + \int \frac{\zeta}{T}(\operatorname{div}\mathbf{v})^2\,dV. \qquad (49.6)$$

Первый член представляет собой увеличение энтропии благодаря теплопроводности, а остальные два — увеличение энтропии, обусловленное внутренним трением.

Энтропия может только возрастать, т. е. сумма (49.6) должна быть положительна. С другой стороны, в каждом из членов этой суммы подынтегральное выражение может быть отлично от нуля даже при равенстве нулю двух других интегралов. Поэтому каждый из этих интегралов должен быть всегда положителен. Отсюда следует наряду с известной уже нам положительностью $\varkappa$ и η также и положительность второго коэффициента вязкости ζ.

При выводе формулы (49.1) молчаливо подразумевалось, что поток тепла зависит только от градиента температуры и не зависит от градиента давления. Это предположение, априори не очевидное, может быть оправдано теперь следующим образом. Если бы в $\mathbf{q}$ входил член, пропорциональный ∇p, то в выражении (49.6) для изменения энтропии прибавился бы еще член, содержащий под интегралом произведение $\nabla p\nabla T$. Поскольку это последнее может быть как положительным, так и отрицательным, то и производная от энтропии по времени не была бы существенно положительной, что невозможно.

Наконец, необходимо уточнить изложенные выше рассуждения еще и в следующем отношении. Строго говоря, в термодинамически неравновесной системе, каковой является жидкость при наличии в ней градиентов скорости и температуры, обычные определения термодинамических величин теряют смысл и

должны быть уточнены. Подразумевавшиеся нами здесь определения заключаются прежде всего в том, что ρ, ε и $\mathbf{v}$ определяются по-прежнему: ρ и $\rho\varepsilon$ есть масса и внутренняя энергия, заключенные в единице объема, а $\mathbf{v}$ есть импульс единицы массы жидкости. Остальные же термодинамические величины определяются затем как те функции от ρ и ε, которыми они являются в состоянии теплового равновесия. При этом, однако, энтропия $s = s(\varepsilon, \rho)$ уже не будет истинной термодинамической энтропией: интеграл $\int \rho s\, dV$ не будет, строго говоря, той величиной, которая должна возрастать со временем. Тем не менее, легко видеть, что при малых градиентах скорости и температуры в принятом нами здесь приближении s совпадает с истинной энтропией.

Действительно, при наличии градиентов в энтропии появляются, вообще говоря, связанные с ними дополнительные (по отношению к $s(\rho, \varepsilon)$) члены. На изложенных выше результатах, однако, могли бы сказаться лишь линейные по градиентам члены (например, член, пропорциональный скаляру $\operatorname{div}\mathbf{v}$). Такие члены неизбежно могли бы принимать как положительные, так и отрицательные значения. Между тем они должны быть существенно отрицательными, так как равновесное значение $s = s(\rho, \varepsilon)$ является максимально возможным. Поэтому разложение энтропии по степеням малых градиентов может содержать (помимо нулевого члена) лишь члены начиная со второго порядка.

Аналогичные замечания должны были быть по существу сделаны уже в § 15 (ср. примеч. на с. 72), так как уже наличие градиента скорости является термодинамической неравновесностью. Именно, под давлением p, которое входит в выражение для тензора плотности потока импульса в вязкой жидкости, следует понимать ту функцию $p = p(\varepsilon, \rho)$, которой она является в состоянии теплового равновесия. При этом p не будет уже, строго говоря, давлением в обычном смысле слова, т. е. не будет совпадать с нормальной силой, действующей на элемент поверхности. В отличие от того, что было сказано выше об энтропии, здесь различие проявляется уже в величинах первого порядка по малому градиенту: мы видели, что в нормальной компоненте силы наряду с p появляется еще и член, пропорциональный $\operatorname{div}\mathbf{v}$ (в несжимаемой жидкости этот член отсутствует и там разница имеет место лишь в членах более высокого порядка).

Таким образом, три коэффициента η, ζ, $\varkappa$, фигурирующие в системе уравнений движения вязкой теплопроводящей жидкости, полностью определяют гидродинамические свойства жидкости в рассматриваемом, всегда применяемом приближении (т. е. при пренебрежении производными высших порядков по координатам от скорости, температуры и т. п.). Введение в уравнения каких-либо дополнительных членов (например, введение в плот-

ность потока массы членов, пропорциональных градиентам плотности или температуры) лишено физического смысла и означало бы в лучшем случае лишь изменение определения основных величин; в частности, скорость не совпадала бы с импульсом единицы массы жидкости [1]).

§ 50. Теплопроводность в несжимаемой жидкости

Общее уравнение теплопроводности в форме (49.4) или (49.5) может быть в различных случаях значительно упрощено.

Если скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических величин) можно пренебречь. Однако неравномерно нагретая жидкость не является все же при этом вполне несжимаемой в том смысле, как это понималось выше. Дело в том, что плотность меняется еще и под влиянием изменения температуры; этим изменением плотности, вообще говоря, нельзя пренебречь, и потому даже при достаточно малых скоростях плотность неравномерно нагретой жидкости все же нельзя считать постоянной. При определении производных от термодинамических величин в этом случае надо, следовательно, считать постоянным давление, а не плотность. Так, имеем

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \nabla T,$$

и поскольку $T\left(\dfrac{\partial s}{\partial T}\right)_p$ есть теплоемкость c_p при постоянном давлении, то

$$T\frac{\partial s}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T\nabla s = c_p \nabla T.$$

[1]) В худшем же случае введение таких членов может вообще нарушить соблюдение необходимых законов сохранения. Следует иметь в виду, что при любом определении величин плотность потока массы $\mathbf{j}$ во всяком случае должна совпадать с импульсом единицы объема жидкости. Действительно, плотность потока $\mathbf{j}$ определяется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0;$$

умножая его на $\mathbf{r}$ и интегрируя по всему занятому жидкостью объему, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \mathbf{r}\, dV = \int \mathbf{j}\, dV,$$

а поскольку интеграл $\int \rho \mathbf{r}\, dV$ определяет положение центра инерции данной массы жидкости, то ясно, что интеграл $\int \mathbf{j}\, dV$ есть ее импульс.

Уравнение (49.4) принимает вид

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T\right)=\operatorname{div}(\varkappa\nabla T)+\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \qquad (50.1)$$

Для того чтобы в уравнениях движения неравномерно нагретой жидкости можно было считать плотность постоянной, необходимо (помимо малости отношения скорости жидкости к скорости звука), чтобы имеющиеся в жидкости разности температур были достаточно малы; подчеркнем, что здесь речь идет именно об абсолютных значениях разностей температур, а не о градиенте температуры. Тогда жидкость можно считать несжимаемой в том же смысле, как это подразумевалось раньше; в частности, уравнение непрерывности будет выглядеть просто как $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$. Считая разности температур малыми, мы будем пренебрегать также и температурным изменением величин η, $\varkappa$, c_p, т. е. будем считать их постоянными. Написав член $\sigma'_{ik}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ в том виде, как это сделано в (49.5), мы получим в результате уравнение переноса тепла в несжимаемой жидкости в следующем сравнительно простом виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T=\chi\Delta T+\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2, \qquad (50.2)$$

где $\nu=\eta/\rho$ — кинематическая вязкость, а вместо $\varkappa$ введена *температуропроводность*

$$\chi=\varkappa/(\rho c_p). \qquad (50.3)$$

В особенности просто выглядит уравнение переноса тепла в неподвижной жидкости, где перенос энергии обязан целиком теплопроводности. Опуская в (50.2) члены, содержащие скорость, получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\chi\Delta T. \qquad (50.4)$$

Это уравнение называется в математической физике *уравнением теплопроводности* или *уравнением Фурье*. Оно может быть выведено, разумеется, и гораздо более простым образом, без помощи общего уравнения переноса тепла в движущейся жидкости. Согласно закону сохранения энергии количество тепла, поглощающееся в некотором объеме в единицу времени, должно быть равно полному потоку тепла, втекающего в этот объем через ограничивающую его поверхность. Как мы знаем, такой закон сохранения может быть выражен в виде уравнения непрерывности для количества тепла. Это уравнение получается приравниванием количества тепла, поглощающегося в единице объема жидкости в единицу времени, дивергенции плотности потока тепла, взятой с обратным знаком. Первое из них равно $\rho c_p\dfrac{\partial T}{\partial t}$;

здесь должна быть взята теплоемкость c_p, так как вдоль неподвижной жидкости давление должно быть, разумеется, постоянным. Приравняв это выражение $-\operatorname{div}\mathbf{q} = \varkappa\nabla T$, получим как раз уравнение (50.4).

Необходимо отметить, что применимость уравнения теплопроводности (50.4) к жидкостям практически сильно ограничена. Дело в том, что в жидкостях, реально находящихся в поле тяжести, уже малый градиент температуры приводит в большинстве случаев к возникновению заметного движения (так называемая конвекция; см. § 56). Поэтому реально можно иметь дело с неравномерным распределением температуры в неподвижной жидкости, разве только, если градиент температуры направлен противоположно силе тяжести или же если жидкость очень вязкая. Тем не менее, изучение уравнения теплопроводности в форме (50.4) весьма существенно, так как уравнением такого вида описываются процессы теплопроводности в твердых телах. Имея это в виду, мы займемся здесь и в § 51, 52 более подробным его исследованием.

Если распределение температуры в неравномерно нагретой неподвижной среде поддерживается (посредством некоторых внешних источников тепла) постоянным во времени, то уравнение теплопроводности принимает вид

$$\Delta T = 0. \tag{50.5}$$

Таким образом, стационарное распределение температуры в неподвижной среде описывается уравнением Лапласа. В более общем случае, когда коэффициент $\varkappa$ нельзя считать постоянным, вместо (50.5) имеем уравнение

$$\operatorname{div}(\varkappa\nabla T) = 0. \tag{50.6}$$

Если в жидкости имеются посторонние источники тепла, то к уравнению теплопроводности должен быть добавлен соответствующий дополнительный член (таким источником тепла может, например, являться нагревание электрическим током). Пусть Q есть количество тепла, выделяемое этими источниками в единице объема жидкости в единицу времени; Q является, вообще говоря, функцией от координат и от времени. Тогда условие баланса тепла, т. е. уравнение теплопроводности, напишется в виде

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa\Delta T + Q. \tag{50.7}$$

Напишем граничные условия для уравнения теплопроводности, которые должны иметь место на границе двух сред. Прежде всего, на границе должны быть равными температуры обеих сред:

$$T_1 = T_2. \tag{50.8}$$

Кроме того, поток тепла, выходящего из одной среды, должен быть равен потоку, входящему во вторую среду. Выбирая систему координат, в которой данный участок границы покоится, можно написать это условие в виде

$$\varkappa_1 \nabla T_1 \, d\mathbf{f} = \varkappa_2 \nabla T_2 \, d\mathbf{f}$$

для каждого элемента $d\mathbf{f}$ поверхности раздела. Написав

$$\nabla T \, d\mathbf{f} = \frac{\partial T}{\partial n} \, df,$$

где $\partial T/\partial n$ — производная от T по направлению нормали к поверхности, получим граничное условие в виде

$$\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \tag{50.9}$$

Если на поверхности раздела имеются посторонние источники тепла, выделяющие количество тепла $Q^{(s)}$ на единице площади в единицу времени, то вместо условия (50.9) надо написать:

$$\varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = Q^{(s)}. \tag{50.10}$$

В физических задачах о распределении температуры при наличии источников тепла интенсивность последних обычно сама задается в виде функции температуры. Если функция $Q(T)$ достаточно быстро возрастает с увеличением T, то установление стационарного распределения температуры в теле, границы которого поддерживаются при заданных условиях (например, при заданной температуре), может оказаться невозможным. Теплоотвод через внешнюю поверхность тела пропорционален некоторому среднему значению разности температур $T - T_0$ тела и внешней среды вне зависимости от закона тепловыделения внутри тела. Ясно, что если последнее достаточно быстро возрастает с температурой, то теплоотвод может оказаться недостаточным для осуществления равновесного состояния.

В этих условиях может возникнуть *тепловой взрыв*: если скорости экзотермической реакции горения достаточно быстро возрастают с температурой, то при невозможности стационарного распределения возникают быстрое разогревание вещества и ускорение реакции (*Н.Н. Семенов*, 1923). Скорость (а с ней и интенсивность выделения тепла) взрывных реакций горения зависит от температуры в основном пропорционально множителю $\exp(-U/T)$ с большой энергией активации U. Для исследования условий возникновения теплового взрыва следует рассматривать ход реакции при сравнительно незначительном разогревании вещества и соответственно этому разложить

$$\frac{1}{T} \approx \frac{1}{T_0} - \frac{T - T_0}{T_0^2},$$

где T_0 — внешняя температура. Таким образом, задача сводится к исследованию уравнения теплопроводности с объемной интенсивностью источников тепла вида

$$Q = Q_0 \exp\left[\alpha(T - T_0)\right] \tag{50.11}$$

(*Д.А. Франк-Каменецкий*, 1939), — см. задачу 1.

З а д а ч и

1. В слое вещества между двумя параллельными плоскостями распределены источники тепла с объемной интенсивностью (50.11). Граничные плоскости поддерживаются при постоянной температуре. Найти условие, определяющее возможность установления стационарного распределения температуры (*Д.А. Франк-Каменецкий*, 1939) [1].

Р е ш е н и е. Уравнение стационарной теплопроводности в данном случае гласит:

$$\varkappa \frac{d^2T}{dx^2} = -Q_0 e^{\alpha(T-T_0)}$$

с граничными условиями $T = T_0$ при $x = 0$ и $x = 2l$ ($2l$ — ширина слоя). Вводим безразмерные переменные $\tau = \alpha(T - T_0)$ и $\xi = x/l$; тогда

$$\tau'' + \lambda e^{\tau} = 0, \quad \lambda = \frac{Q_0 \alpha l^2}{\varkappa}.$$

Интегрируя это уравнение (умножив его на $2\tau'$) один раз, найдем

$$\tau'^2 = 2\lambda\left(e^{\tau_0} - e^{\tau}\right),$$

где τ_0 — постоянная. Последняя представляет собой, очевидно, максимальное значение τ, которое ввиду симметрии задачи должно достигаться посередине слоя, т. е. при $\xi = 1$. Поэтому вторичное интегрирование с учетом условия $\tau = 0$ при $\xi = 0$ дает

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int\limits_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_0} - e^{\tau}}} = \int\limits_0^1 d\xi = 1.$$

Произведя интегрирование, получим

$$e^{-\tau_0/2} \operatorname{Arch} e^{\tau_0/2} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,. \tag{1}$$

Определяемая этим равенством функция $\lambda(\tau_0)$ имеет максимум $\lambda = \lambda_{\text{кр}}$ при определенном значении $\tau_0 = \tau_{0\,\text{кр}}$; если $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$, то удовлетворяющего граничным условиям решения не существует [2]. Численные значения: $\lambda_{\text{кр}} = 0{,}88$, $\tau_{0\,\text{кр}} = 1{,}2$ [3].

---

[1]) Подробное изложение относящихся сюда вопросов см. в кн.: *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967.

[2]) Из двух корней уравнения (1) при $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ устойчивому распределению температуры соответствует лишь меньший.

[3]) Аналогичные значения для сферической области (с ее радиусом в качестве длины l) равны $\lambda_{\text{кр}} = 3{,}32$, $\tau_{0\,\text{кр}} = 1{,}47$, а для бесконечного цилиндра $\lambda_{\text{кр}} = 2{,}00$ $\tau_{0\,\text{кр}} = 1{,}36$.

2. В неподвижную жидкость, в которой поддерживается постоянный градиент температуры, погружен шар. Определить возникающее стационарное распределение температуры в жидкости и шаре.

Р е ш е н и е. Распределение температуры определяется во всем пространстве уравнением $\Delta T = 0$ с граничными условиями

$$T_1 = T_2, \quad \varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \varkappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}$$

при $r = R$ (R — радиус шара; величины с индексами 1 и 2 относятся соответственно к шару и жидкости) и условием $\nabla T = \mathbf{A}$ на бесконечности ($\mathbf{A}$ — заданный градиент температуры). В силу симметрии условий задачи $\mathbf{A}$ есть единственный вектор, которым должно определяться искомое решение. Такими решениями уравнения Лапласа являются $\mathrm{const}\,\mathbf{Ar}$ и $\mathrm{const}\,\mathbf{A}\nabla(l/r)$. Замечая, кроме того, что решение должно оставаться конечным в центре шара, ищем температуры T_1 и T_2 в виде

$$T_1 = c_1 \mathbf{Ar}, \quad T_2 = c_2 \mathbf{A} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{Ar};$$

постоянные c_1 и c_2 определяются из условий при $r = R$, и в результате находим

$$T_1 = \frac{3\varkappa_2}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} \mathbf{Ar}, \quad T_2 = \left[1 + \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_1 + 2\varkappa_2} \left(\frac{R}{r}\right)^3\right] \mathbf{Ar}.$$

§ 51. Теплопроводность в неограниченной среде

Рассмотрим теплопроводность в неограниченной неподвижной среде. Наиболее общей постановкой задачи является следующая. В начальный момент времени $t = 0$ задано распределение температуры во всем пространстве:

$$T = T_0(\mathbf{r}) \quad \text{при} \quad t = 0,$$

где $T_0(\mathbf{r})$ — заданная функция координат. Требуется определить распределение температуры во все последующие моменты времени.

Разложим искомую функцию $T(\mathbf{r}, t)$ в интеграл Фурье по координатам:

$$T(\mathbf{r}, t) = \int T_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad T_{\mathbf{k}}(t) = \int T(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{kr}}\, d^3x. \quad (51.1)$$

Для каждой фурье-компоненты температуры, $T_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}$, уравнение (50.4) дает

$$\frac{dT_{\mathbf{k}}}{dt} + k^2 \chi T_{\mathbf{k}} = 0,$$

откуда находим зависимость $T_{\mathbf{k}}$ от времени:

$$T_{\mathbf{k}} = T_{0\mathbf{k}} e^{-k^2 \chi t}.$$

Поскольку при $t = 0$ должно быть $T = T_0(\mathbf{r})$, то ясно, что $T_{0\mathbf{k}}$ представляет собой коэффициенты фурье-разложения функции T_0:

$$T_{0\mathbf{k}} = \int T_0(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{kr}'}\, d^3x'.$$

Таким образом, находим

$$T(\mathbf{r},\, t) = \int T_0(\mathbf{r}')e^{-k^2\chi t}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d^3x'\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Интеграл по d^3k разбивается на произведение трех одинаковых интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\xi^2}\cos\beta\xi\, d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\beta^2/(4\alpha)},$$

где ξ — одна из компонент вектора $\mathbf{k}$ (аналогичный интеграл с $\sin$ вместо $\cos$ исчезает в силу нечетности функции $\sin$). В результате получаем окончательно следующее выражение:

$$T(\mathbf{r},\, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\int T_0(\mathbf{r}')\exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4\chi t}\right] d^3x'. \tag{51.2}$$

Эта формула полностью решает поставленную задачу, определяя распределение температуры в любой момент времени по ее заданному распределению в начальный момент.

Если начальное распределение температуры зависит только от одной координаты x, то, произведя в (51.2) интегрирование по $dy'\,dz'$, получим

$$T(x,\, t) = \frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} T_0(x')\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right] dx'. \tag{51.3}$$

Пусть при $t = 0$ температура равна нулю во всем пространстве, за исключением одной точки (начала координат), в которой она принимает бесконечно большое значение, но так, что полное количество тепла, пропорциональное интегралу $\int T_0(\mathbf{r})\, d^3x$, остается конечным. Такое распределение можно представить δ-функцией:

$$T_0(\mathbf{r}) = \mathrm{const}\cdot\delta(\mathbf{r}). \tag{51.4}$$

Интегрирование в формуле (51.2) сводится тогда просто к замене $\mathbf{r}'$ нулем, в результате чего получаем

$$T(\mathbf{r},\, t) = \mathrm{const}\cdot\frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}e^{-r^2/(4\chi t)}. \tag{51.5}$$

С течением времени температура в точке $r = 0$ падает как $t^{-3/2}$. Одновременно повышается температура в окружающем пространстве, причем область заметно отличной от нуля температуры постепенно расширяется (рис. 39). Ход этого расширения определяется в основном экспоненциальным множителем в (51.5): порядок величины l размеров этой области дается

выражением

$$l \sim \sqrt{\chi t}, \tag{51.6}$$

т. е. растет пропорционально корню из времени.

Аналогично, если в начальный момент времени конечное количество тепла сконцентрировано в плоскости $x = 0$, то в последующее время распределение температуры определится формулой

$$T(x,\, t) = \mathrm{const} \cdot \frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}} e^{-x^2/(4\chi t)}. \tag{51.7}$$

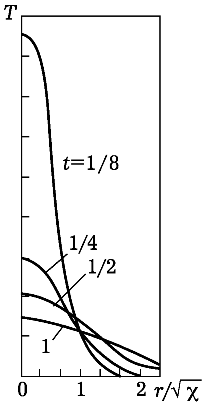


Рис. 39

Формулу (51.6) можно истолковать с несколько иной точки зрения. Пусть l есть порядок величины размеров тела. Тогда можно утверждать, что если это тело было неравномерно нагрето, то порядок величины времени τ, в течение которого температуры в разных точках тела заметно выравнятся, равен

$$\tau \sim l^2/\chi. \tag{51.8}$$

Время τ, которое можно назвать временем релаксации для процесса теплопроводности, пропорционально квадрату размеров тела и обратно пропорционально коэффициенту температуропроводности.

Процесс теплопроводности, описываемый полученными здесь формулами, обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на все пространство. Так, из формулы (51.5) видно, что тепло из точечного источника распространяется так, что уже в следующий момент времени температура среды обращается в нуль лишь асимптотически на бесконечности. Это свойство сохраняется и для среды с зависящей от температуры температуропроводностью χ, если только эта зависимость не приводит к обращению χ в нуль в какой-либо области пространства. Если же χ есть функция температуры, убывающая и обращающаяся в нуль вместе с нею, то это приводит к такому замедлению процесса распространения тепла, в результате которого влияние любого теплового возмущения будет простираться в каждый момент времени лишь на некоторую конечную область пространства; речь идет о распространении тепла в среду, температуру которой (вне области влияния) можно считать равной нулю (*Я.Б. Зельдович*, *А.С. Компанеец*, 1950; им же принадлежит решение приведенных ниже задач).

Задачи

1. Теплоемкость и теплопроводность среды — степенные функции температуры, а ее плотность постоянна. Определить закон обращения темпера-

туры в нуль вблизи границы области, до которой в данный момент распространялось тепло из некоторого произвольного источника; вне этой области температура равна нулю.

Р е ш е н и е. Если $\varkappa$ и c_p — степенные функции температуры, то то же самое относится к температуропроводности χ и к тепловой функции $w = \int c_p\,dT$ (постоянный член в w опускаем). Поэтому можно написать $\chi = aW^n$, где через $W = \rho w$ мы обозначили тепловую функцию единицы объема среды. Тогда уравнение теплопроводности

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\varkappa \nabla T)$$

приобретет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \operatorname{div}(W^n \nabla W). \tag{1}$$

В течение небольшого интервала времени малый участок границы можно считать плоским, а скорость его перемещения в пространстве v — постоянной. Соответственно этому ищем решение уравнения (1) в виде $W = W(x - vt)$, где x — координата в перпендикулярном к границе направлении:

$$-v\frac{\partial W}{\partial t} = a\frac{d}{dx}\left(W^n \frac{dW}{dx}\right), \tag{2}$$

откуда после двукратного интегрирования находим следующий закон обращения W в нуль:

$$W \propto |x|^{1/n}, \tag{3}$$

где $|x|$ — расстояние от границы нагретой области. В то же время этим подтверждается вывод о наличии границы нагретой области (вне которой W, а с ней и T равны нулю), если показатель $n > 0$. Если $n \leqslant 0$, то уравнение (2) не имеет решений, обращающихся в нуль на конечном расстоянии, т. е. тепло распределено в каждый момент по всему пространству.

2. В той же среде в начальный момент времени в плоскости $x = 0$ сконцентрировано количество тепла, равное (будучи отнесено к единице площади) Q, а в остальном пространстве $T = 0$. Определить распределение температуры в последующие моменты времени.

Р е ш е н и е. В одномерном случае уравнение (1) гласит:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(W^n \frac{\partial W}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Из имеющихся в нашем распоряжении параметров Q и a и переменных x, t можно составить лишь одну безразмерную комбинацию:

$$\xi = \frac{x}{(Q^n a t)^{1/(2+n)}} \tag{5}$$

(Q и a имеют размерность соответственно эрг/см^2 и см^2/с (см^3/эрг)^n). Поэтому искомая функция $W(x, t)$ должна иметь вид

$$W = \left(\frac{Q^2}{at}\right)^{1/(2+n)} f(\xi), \tag{6}$$

где безразмерная функция $f(\xi)$ умножена на величину, имеющую размерность эрг/см^3. После этой подстановки уравнение (4) дает

$$(2+n)\frac{d}{d\xi}\left(f^n \frac{df}{d\xi}\right) + \xi\frac{df}{d\xi} + f = 0.$$

Это уравнение в полных производных имеет простое решение, удовлетворяющее условиям задачи:

$$f(\xi) = \left[\frac{n}{2(2+n)}\left(\xi_0^2 - \xi^2\right)\right]^{1/n}, \tag{7}$$

где ξ_0 — постоянная интегрирования.

При $n > 0$ эта формула дает распределение температуры в области между границами $x = \pm x_0$, определяющимися равенством $\xi = \pm\xi_0$; вне этих границ $W = 0$. Отсюда следует, что границы нагретой области расширяются со временем по закону

$$x_0 = \text{const} \cdot t^{1/(2+n)}.$$

Постоянная ξ_0 определяется условием постоянства полного количества тепла:

$$Q = \int\limits_{-x_0}^{x_0} W\,dx = \int\limits_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi)\,d\xi, \tag{8}$$

откуда получается

$$\xi_0^{2+n} = \frac{(2+n)^{1+n}2^{1-n}}{n\pi^{n/2}}\,\frac{\Gamma^n\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)}{\Gamma^n(1/n)}. \tag{9}$$

При $n = -\nu < 0$ напишем решение в виде

$$f(\xi) = \left[\frac{\nu}{2(2-\nu)}\left(\xi_0^2 + \xi^2\right)\right]^{-1/\nu}. \tag{10}$$

Здесь тепло распределено по всему пространству, причем на больших расстояниях W убывает по степенному закону: $W \sim x^{-2/\nu}$. Это решение применимо лишь при $\nu < 2$; при $\nu \geqslant 2$ интеграл (8) (который берется теперь в пределах $\pm\infty$) расходится, что, физически означает мгновенный уход тепла на бесконечное расстояние. При $\nu < 2$ постоянная ξ_0 в (10) равна

$$\xi_0^{2-\nu} = \frac{2(2-\nu)\pi^{\nu/2}}{\nu}\,\frac{\Gamma^\nu\left(\dfrac{1}{\nu}-\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma^\nu(1/\nu)}. \tag{11}$$

Наконец, при $n \to 0$ имеем $\xi_0 \to 2/\sqrt{n}$ и решение, определяемое формулами (5)–(7), дает

$$W = \lim_{n\to 0}\left[\frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}\left(1 - n\frac{x^2}{4at}\right)^{1/n}\right] = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}e^{-x^2/(4at)}$$

в согласии с формулой (51.7).

§ 52. Теплопроводность в ограниченной среде

В задачах о теплопроводности в ограниченной среде задание начального распределения температуры недостаточно для однозначности решения, и необходимо еще задание краевых условий на ограничивающей среду поверхности.

Рассмотрим теплопроводность в полупространстве ($x > 0$) и начнем со случая, когда на граничной поверхности $x = 0$ поддерживается заданная постоянная температура. Эту температуру мы примем условно за нуль, т. е. будем отсчитывать от нее температуру в других точках среды.

В начальный момент времени по-прежнему задано распределение температуры во всей среде. Таким образом, граничные и начальные условия гласят:

$$T = 0 \text{ при } x = 0; \;\; T = T_0(x,\, y,\, z) \text{ при } t = 0, \;\; x > 0. \tag{52.1}$$

Решение уравнения теплопроводности с этими условиями можно свести к решению того же уравнения для среды, не ограниченной в обоих направлениях оси x, при помощи следующего искусственного приема. Представим себе, что среда распространяется и по левую сторону от плоскости $x = 0$, причем в начальный момент времени распределение температуры в этой части среды описывается той же функцией T_0, но только взятой с обратным знаком. Другими словами, в начальный момент времени распределение температуры во всем пространстве описывается некоторой функцией, нечетной по переменной x, т. е. такой, что

$$T_0(-x,\, y,\, z) = -T_0(x,\, y,\, z). \tag{52.2}$$

Из равенства (52.2) следует, что $T_0(0,\, y,\, z) = -T_0(0,\, y,\, z) = 0$, т. е. требуемое граничное условие (52.1) автоматически выполнено в начальный момент времени, и из симметрии условий задачи очевидно, что оно будет выполнено и во всякий другой момент времени.

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (50.4) в неограниченной среде с начальной функцией $T_0(x,\, y,\, z)$, удовлетворяющей (52.2), и без какого бы то ни было граничного условия. Поэтому мы можем воспользоваться общей формулой (51.2).

Разобьем в (51.2) область интегрирования по dx' на две части: от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞, и воспользуемся соотношением (52.2). Мы получим тогда:

$$T(\mathbf{r},\, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} T_0(\mathbf{r}') \exp\left[-\frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{4\chi t}\right] \times$$
$$\times \left\{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{4\chi t}\right]\right\} dx'\, dy' dz'. \tag{52.3}$$

Эта формула полностью решает поставленную задачу, определяя температуру во всей среде.

Если начальное распределение температуры зависит только от x, то формула (52.3) принимает вид

$$T(x,\,t)=\frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}}\int\limits_0^\infty T_0(x')\Big\{\exp\Big[-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\Big]-\\-\exp\Big[-\frac{(x+x')^2}{4\chi t}\Big]\Big\}\,dx'. \quad (52.4)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда в начальный момент везде, кроме $x=0$, температура равна заданной постоянной величине, которую, не ограничивая общности, можно положить равной -1; температура же на плоскости $x=0$ все время равна нулю. Соответствующее решение получается непосредственно подстановкой $T_0(x)=-1$ в (52.4). Разобьем интеграл в (52.4) на два интеграла и в каждом из них произведем замену переменных типа $\dfrac{x'-x}{2\sqrt{\chi t}}=\xi$. Тогда мы получим для $T(x,\,t)$ следующее выражение:

$$T(x,\,t)=\frac{1}{2}\Big[\operatorname{erf}\Big(-\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\Big)-\operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\Big)\Big],$$

где функция $\operatorname{erf} x$ определяется как

$$\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi \quad (52.5)$$

и называется *интегралом ошибок* (заметим, что $\operatorname{erf}(\infty)=1$). Поскольку $\operatorname{erf}(-x)=-\operatorname{erf}(x)$, мы получаем окончательно:

$$T(x,\,t)=-\operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\Big). \quad (52.6)$$

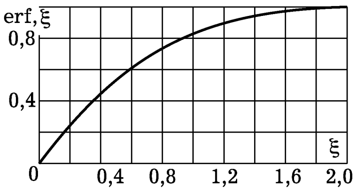


Рис. 40

На рис. 40 изображен график функции $\operatorname{erf}\xi$. С течением времени распределение температуры по пространству все более сглаживается. Это сглаживание происходит таким образом, что каждое заданное значение температуры перемещается вправо пропорционально $\sqrt{t}$. Последний результат, впрочем, заранее очевиден. Действительно, рассматриваемая задача определяется всего одним параметром — начальной разностью температур T_0 граничной плоскости и остального пространства (положенной выше условно равной единице). Из имеющихся в нашем распоряжении параметров T_0 и χ и переменных x и t можно составить всего одну безразмерную комбинацию $x/\sqrt{\chi t}$, поэтому ясно, что искомое распределение температуры должно определяться функцией вида $T=T_0 f(x/\sqrt{\chi t})$.

Рассмотрим теперь случай, когда граничная поверхность среды теплоизолирована. Другими словами, на плоскости $x = 0$ тепловой поток должен отсутствовать, т. е. должно быть $\partial T/\partial x = 0$.

Таким образом, имеем теперь следующие граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0; \; T = T_0(x,\, y,\, z) \text{ при } t = 0, \; x > 0. \tag{52.7}$$

Для нахождения решения поступим аналогично тому, как мы делали в предыдущем случае. Именно, опять представим себе среду неограниченной в обе стороны от плоскости $x = 0$. Распределение же температуры в начальный момент времени представим себе теперь симметричным относительно плоскости $x = 0$. Другими словами, функцию $T_0(x,\, y,\, z)$ предположим теперь четной по переменной x:

$$T_0(-x,\, y,\, z) = T_0(x,\, y,\, z). \tag{52.8}$$

Тогда

$$\frac{\partial T_0(x,\, y,\, z)}{\partial x} = -\frac{\partial T_0(-x,\, y,\, z)}{\partial x}$$

и при $x = 0$ будет $\partial T_0/\partial x = 0$. Из симметрии очевидно, что это условие автоматически будет выполнено и во все последующие моменты времени. Повторив произведенные выше вычисления, но используя при этом (52.8) вместо (52.2), найдем, что общее решение поставленной задачи дается формулами, отличающимися от (52.3) или (52.4) лишь тем, что вместо разности двух членов в квадратных скобках стоит их сумма.

Перейдем к задачам с другого рода граничными условиями, тоже допускающими решение уравнения теплопроводности в общем виде. Рассмотрим среду, ограниченную плоскостью $x = 0$, через которую извне подводится поток тепла, являющийся заданной функцией времени. Другими словами, имеем граничные и начальные условия:

$$-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x} = q(t) \text{ при } x = 0; \; T = 0 \text{ при } t = -\infty, \; x > 0, \tag{52.9}$$

где $q(t)$ — заданная функция.

Предварительно решим вспомогательную задачу, в которой $q(t) = \delta(t)$. Легко сообразить, что эта задача физически эквивалентна задаче о распространении тепла в неограниченной среде от точечного источника, содержащего заданное полное количество тепла. Действительно, граничное условие $-\varkappa\dfrac{\partial T}{\partial x} = \delta(t)$ при $x = 0$ физически означает, что через каждую единицу площади плоскости $x = 0$ мгновенно подводится количество тепла, равное единице. В задаче же с условием $T = \dfrac{2}{\rho c_p}\delta(x)$ при $t = 0$ на

той же площади в начальный момент времени сконцентрировано количество тепла $\int \rho c_p T\,dx = 2$, из которого половина распространяется затем в направлении положительных x (а другая половина — к отрицательным x). Поэтому ясно, что решения обеих задач тождественны и согласно (51.7) находим

$$\varkappa T(x,\, t) = \sqrt{\frac{\chi}{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right).$$

Поскольку в силу линейности уравнений эффекты от тепла, подводимого в различные моменты времени, просто складываются, то искомое общее решение уравнения теплопроводности с условиями (52.9) есть

$$\varkappa T(x,\, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q\tau \exp\left[-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}\right] d\tau. \tag{52.10}$$

В частности, на самой плоскости $x = 0$ температура меняется по закону

$$\varkappa T(0,\, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q\tau\, d\tau. \tag{52.11}$$

С помощью этих результатов можно непосредственно получить решение другой задачи, в которой заданной функцией времени является сама температура T на плоскости $x = 0$:

$$T = T_0(t) \text{ при } x = 0; \;\; T = 0 \text{ при } t = -\infty,\;\; x > 0. \tag{52.12}$$

Для этого замечаем, что если некоторая функция $T(x,\, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то этому же уравнению удовлетворяет и производная $\partial T/\partial x$. С другой стороны, дифференцируя по x выражение (52.10), получим

$$-\varkappa \frac{\partial T(x,\, t)}{\partial x} = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{x q(\tau)}{2(\pi\chi)^{1/2}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}\right] d\tau.$$

Это есть функция, удовлетворяющая уравнению теплопроводности, причем $q(t)$ есть (согласно (52.9)) ее же значение при $x = 0$; очевидно, что она и дает искомое решение задачи с условиями (52.12). Написав $T(x,\, t)$ вместо $-\varkappa \dfrac{\partial T}{\partial x}$ и $T_0(t)$ вместо $q(t)$, получаем таким образом:

$$T(x,\, t) = \frac{x}{2(\pi\chi)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}\right] d\tau. \tag{52.13}$$

Для потока тепла $q = -\varkappa\dfrac{\partial T}{\partial x}$ граничную поверхность $x = 0$ получаем после короткого преобразования:

$$q(t) = \frac{\varkappa}{\sqrt{\pi\chi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{dT_0(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{52.14}$$

Эта формула представляет собой обращение интегрального соотношения (52.11).

Очень просто решается важная задача, в которой на граничной поверхности $x = 0$ температура задается в течение всего времени в виде периодической функции:

$$T = T_0 e^{-i\omega t} \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Ясно, что распределение температуры во всем пространстве будет зависеть от времени посредством того же множителя $e^{-i\omega t}$. Поскольку одномерное уравнение теплопроводности формально совпадает с уравнением (24.3), определяющим движение вязкой жидкости над колеблющейся плоскостью, то по аналогии с формулой (24.5) мы можем сразу написать искомое распределение температуры в виде

$$T = T_0 \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right)\exp\left(ix\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} - i\omega t\right). \tag{52.15}$$

Мы видим, что колебания температуры на граничной поверхности распространяются от нее в виде быстро затухающих в глубь среды тепловых волн.

Другой тип задач теории теплопроводности представляют задачи о скорости выравнивания температуры неравномерно нагретых конечных тел, поверхность которых поддерживается при заданных условиях. Следуя общим методам, ищем решения уравнения теплопроводности вида

$$T = T_n(\mathbf{r})e^{-\lambda_n t}$$

с постоянными λ_n. Для функций T_n получаем уравнение

$$\chi\Delta T_n = -\lambda_n T_n. \tag{52.16}$$

Это уравнение при заданных граничных условиях имеет отличные от нуля решения лишь при определенных λ_n, составляющих набор его собственных значений. Все эти значения вещественны и положительны, а соответствующие функции $T_n(x, y, z)$ составляют полную систему взаимно ортогональных функций. Пусть распределение температуры в начальный момент времени дается функцией $T_0(x, y, z)$. Разлагая ее по системе функций T_n:

$$T_0(\mathbf{r}) = \sum_n c_n T_n(\mathbf{r}),$$

получим искомое решение поставленной задачи в виде

$$T(\mathbf{r},\, t) = \sum_n c_n T_n(\mathbf{r}) e^{-\lambda_n t}. \tag{52.17}$$

Скорость выравнивания температуры определяется, очевидно, в основном тем членом этой суммы, который соответствует наименьшему из λ_n; пусть это будет λ_1. Время выравнивания температуры можно определить как $\tau = 1/\lambda_1$.

Задачи

1. Определить распределение температуры вокруг сферической поверхности (радиуса R), температура которой есть заданная функция времени $T_0(t)$.

Решение. Уравнение теплопроводности для центрально-симметрического распределения температуры в сферических координатах есть

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{r}\frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2}.$$

Подстановкой $T(r,\, t) = F(r,\, t)/r$ оно приводится к уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

типа одномерного уравнения теплопроводности. Поэтому искомое решение можно написать прямо на основании (52.13) в виде

$$T(r,\, t) = \frac{R(r-R)}{2r(\pi\chi)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}\right] d\tau.$$

2. То же, если температура сферической поверхности есть $T_0 e^{-i\omega t}$.

Решение. Аналогично (52.15), получим

$$T = T_0 e^{-i\omega t}\frac{R}{r}\exp\left[-(1-i)(r-R)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right].$$

3. Определить время выравнивания температуры для куба (с длиной ребра a), поверхность которого: а) поддерживается при заданной температуре $T = 0$; б) теплоизолирована.

Решение. В случае а) наименьшему значению λ соответствует следующее решение уравнения (52.16):

$$T_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\sin\frac{\pi z}{a}$$

(начало координат — в одной из вершин куба), причем

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{a^2}{3\pi^2\chi}.$$

В случае же б) имеем $T_1 = \cos\dfrac{\pi x}{a}$ (или такая же функция от y или z), причем $\tau = a^2/(\pi^2\chi)$.

4. То же для шара радиуса R.

Р е ш е н и е. Наименьшему значению λ соответствует центрально-симметричное решение уравнения (52.16)

$$T_1 = \sin\frac{kr}{r},$$

причем в случае а) $k = \pi/R$, так что

$$\tau = \frac{1}{\chi k^2} = \frac{R^2}{\chi\pi^2}.$$

В случае же б) k определяется как наименьший корень уравнения $\operatorname{tg} kR = kR$, откуда $kR = 4{,}493$, так что $\tau = 0{,}050\,R^2\chi$.

§ 53. Закон подобия для теплопередачи

Процессы теплопередачи в жидкости осложняются по сравнению с теплопередачей в твердых телах возможностью движения жидкости. Погруженное в движущуюся жидкость нагретое тело охлаждается значительно быстрее, чем в неподвижной жидкости, где теплопередача происходит только с помощью процессов теплопроводности. О движении неравномерно нагретой жидкости говорят как о *конвекции*.

Будем предполагать, что имеющиеся в жидкости разности температур достаточно малы для того, чтобы ее физические свойства можно было считать не зависящими от температуры. С другой стороны, эти разности будут предполагаться настолько большими, чтобы по сравнению с ними можно было пренебречь изменениями температуры, обусловленными выделением тепла, связанным с диссипацией энергии путем внутреннего трения (см. § 55). Тогда в уравнении (50.2) может быть опущен член, содержащий вязкость, так что остается

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \tag{53.1}$$

где $\chi = \varkappa/(\rho c_p)$ — температуропроводность. Это уравнение вместе с уравнением Навье–Стокса и уравнением непрерывности полностью описывает конвекцию в рассматриваемых условиях. Ниже мы будем рассматривать стационарное конвективное движение [1]). Тогда все производные по времени выпадают, и мы получаем следующую систему основных уравнений:

$$\mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \tag{53.2}$$

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{53.3}$$

[1]) Для того чтобы конвекция могла быть стационарной, необходимо, строго говоря, чтобы в соприкасающихся с жидкостью твердых телах находились источники тепла, поддерживающие их при постоянной температуре.

В эту систему, в которой неизвестными функциями являются **v**, T и p/ρ, входят всего два постоянных параметра: ν и χ. Кроме того, решение этих уравнений зависит, через посредство граничных условий, еще от некоторого характерного параметра длины l, скорости U и характерной разности температур T_1-T_0. Первые два определяют, как всегда, размеры фигурирующих в задаче твердых тел и скорость основного потока жидкости, а третий — разность температур между жидкостью и твердыми телами.

При составлении безразмерных величин из имеющихся в нашем распоряжении параметров возникает вопрос о том, какую размерность следует приписать температуре. Для этого замечаем, что температура определяется уравнением (53.2), являющимся линейным и однородным по T. Поэтому температура может быть умножена без нарушения уравнений на произвольный постоянный множитель. Другими словами, единицы для измерения температуры могут быть выбраны произвольным образом. Возможность такого преобразования температуры может быть учтена формально посредством приписывания ей некоторой особой размерности, которая бы не входила в размерности остальных величин. Таковой является как раз размерность градуса — единицы, в которой температура обычно и измеряется.

Таким образом, конвекция характеризуется в рассматриваемых условиях пятью параметрами со следующими размерностями:

$$[\nu]=[\chi]=\text{см}^2/\text{с},\quad [U]=\text{см}/\text{с},\quad [l]=\text{см},\quad [T_1-T_0]=\text{град}.$$

Из них можно составить две независимые безразмерные комбинации. В качестве таковых мы выберем число Рейнольдса $\mathrm{R} = Ul/\nu$ и *число Прандтля*, определяемое как отношение

$$\mathrm{P}=\nu/\chi. \tag{53.4}$$

Всякая другая безразмерная величина может быть выражена через R и P [1]. Что касается числа Прандтля, то оно представляет собой просто некоторую материальную константу вещества и не зависит от свойств самого потока. У газов это число — всегда порядка единицы. Значения же P для различных жидкостей лежат в более широком интервале. У очень вязких жидкостей P может достигать очень больших значений. Приведем в качестве примера значения P при 20 °C для ряда веществ:

воздух	0,733,
вода	6,75,
спирт	16,6,
глицерин	7250,
ртуть	0,044.

[1]) Иногда пользуются *числом Пекле* (*Peclet*), определяемым как Ul/χ. Оно сводится к произведению RP.

Подобно тому как было сделано в § 19, мы можем теперь заключить, что в стационарном конвекционном потоке (заданного типа) распределение температуры и скорости имеет вид

$$\frac{T-T_0}{T_1-T_0} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathrm{R}, \mathrm{P}\right), \quad \frac{\mathbf{v}}{U} = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathrm{R}\right). \tag{53.5}$$

Безразмерная функция, определяющая распределение температуры, зависит как от параметров от обоих чисел R и P; распределение же скоростей — только от числа R, поскольку оно определяется уравнениями (53.3), в которые теплопроводность не входит вовсе. Два конвекционных потока подобны, если их числа Рейнольдса и Прандтля одинаковы.

Теплопередачу между твердыми телами и жидкостью характеризуют обычно так называемым *коэффициентом теплопередачи* α, определяемым как отношение

$$\alpha = \frac{q}{T_1-T_0}, \tag{53.6}$$

где q — плотность потока тепла через поверхность тела, а $T_1 - T_0$ — характерная разность температур твердого тела и жидкости. Если распределение температуры в жидкости известно, то коэффициент теплопередачи легко определить, вычисляя плотность потока тепла $q = -\varkappa \partial T/\partial n$ на границе жидкости (производная берется по нормали к поверхности тела).

Коэффициент теплопередачи является размерной величиной. В качестве безразмерной величины, характеризующей теплопередачу, пользуются *числом Нуссельта*

$$\mathrm{N} = \alpha l/\varkappa. \tag{53.7}$$

Из соображений подобия следует, что для каждого данного типа конвекционного движения число Нуссельта является определенной функцией только от чисел Рейнольдса и Прандтля:

$$\mathrm{N} = f(\mathrm{R}, \mathrm{P}). \tag{53.8}$$

Эта функция приобретает тривиальный вид при конвекции с достаточно малыми числами Рейнольдса. Малым R соответствуют малые скорости движения. Поэтому в первом приближении в уравнении (53.2) можно пренебречь членом, содержащим скорость, так что распределение температуры определяется уравнением $\Delta T = 0$, т. е. обычным уравнением стационарной теплопроводности в неподвижной среде. Коэффициент теплопередачи не может, очевидно, зависеть теперь ни от скорости, ни от вязкости жидкости и потому должно быть

$$\mathrm{N} = \mathrm{const}, \tag{53.9}$$

причем при вычислении этой постоянной можно рассматривать жидкость как неподвижную.

Задача

Определить распределение температуры в жидкости, совершающей пуазейлевское течение по трубе кругового сечения, температура стенки которой меняется вдоль длины трубы по линейному закону.

Решение. Условия течения одинаковы во всех сечениях трубы, и распределение температуры можно искать в виде $T = Az + f(r)$, где Az — температура стенки (выбраны цилиндрические координаты с осью z по оси трубы). Для скорости имеем согласно (17.9)

$$v_z = v = 2\overline{v}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

где $\overline{v}$ — средняя скорость. Подставляя это в (53.2), находим уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) = \frac{2\overline{v}A}{\chi}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

Решение этого уравнения не имеющее особенностей при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $f = 0$ при $r = R$, есть

$$f(r) = -\frac{\overline{v}AR^2}{2\chi}\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^4\right].$$

Плотность потока тепла

$$q = \varkappa\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{1}{2}\rho c_p\overline{v}RA.$$

Она не зависит от теплопроводности.

§ 54. Теплопередача в пограничном слое

Распределение температуры в жидкости при очень больших числах Рейнольдса обнаруживает особенности, аналогичные тем, которыми обладает и само распределение скоростей. Очень большие значения R эквивалентны очень малой вязкости. Но поскольку число $\mathrm{P} = \nu/\chi$ не бывает очень малым, то вместе с ν должен рассматриваться как малый и коэффициент температуропроводности χ. Это соответствует тому, что при достаточно больших скоростях движения жидкость может приближенно рассматриваться как идеальная, — в идеальной жидкости должны отсутствовать как процессы внутреннего трения, так и процессы теплопроводности.

Такое рассмотрение, однако, опять будет неприменимо в пристеночном слое жидкости, поскольку при нем не будут выполняться на поверхности тела ни граничное условие прилипания, ни условие одинаковости температур жидкости и тела. В результате в пограничном слое происходит наряду с быстрым падением скорости также и быстрое изменение температуры жидкости до значения, равного температуре поверхности твердого тела. Пограничный слой характеризуется наличием в нем больших градиентов как скорости, так и температуры.

Что касается распределения температуры в основном объеме жидкости, то легко видеть, что при обтекании нагретого тела (при больших R) нагревание жидкости будет происходить практически только в области следа, между тем как вне следа температура жидкости не изменится. Действительно, при очень больших R процессы теплопроводности в основном потоке не играют практически никакой роли. Поэтому температура изменится только в тех местах пространства, в которые попадает при своем движении нагретая в пограничном слое жидкость. Но мы знаем (см. § 35), что из пограничного слоя линии тока выходят в область основного потока только за линией отрыва, где они попадают в область турбулентного следа. Из области же следа линии тока в окружающее пространство уже не выходят. Таким образом, текущая мимо поверхности нагретого тела в пограничном слое жидкость попадает целиком в область следа, в котором и остается. Мы видим, что тепло оказывается распределенным в тех же областях, в которых имеется отличная от нуля завихренность.

Внутри самой турбулентной области происходит интенсивный теплообмен, обусловленный сильным перемешиванием жидкости, которое характерно для всякого турбулентного движения. Такой механизм теплопередачи можно назвать турбулентной температуропроводностью и характеризовать соответствующим коэффициентом $\chi_{\text{турб}}$, подобно тому как мы ввели понятие о коэффициенте турбулентной вязкости $\eta_{\text{турб}}$ (§ 33). По порядку величины коэффициент *турбулентной температуропроводности* определяется такой же формулой, как и $\nu_{\text{турб}}$ (33.2):

$$\chi_{\text{турб}} \sim l\Delta u.$$

Таким образом, процессы теплопередачи в ламинарном и турбулентном потоках являются принципиально различными. В предельном случае сколь угодно малых вязкости и теплопроводности в ламинарном потоке процессы теплопередачи вообще отсутствуют и температура жидкости в каждом месте пространства не меняется. Напротив, в турбулентно движущейся жидкости в том же предельном случае теплопередача происходит и приводит к быстрому выравниванию температуры в различных участках потока.

Рассмотрим сначала теплопередачу в ламинарном пограничном слое. Уравнения движения (39.13) сохраняют свой вид. Аналогичное упрощение должно быть произведено теперь и для уравнения (53.2). Написанное в раскрытом виде это уравнение имеет вид (все величины не зависят от координаты z):

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right).$$

В правой его части можно пренебречь производной $\partial^2 T/\partial x^2$ по сравнению с $\partial^2 T/\partial y^2$, так что остается

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{54.1}$$

Из сравнения этого уравнения с первым из уравнений (39.13) ясно, что если число Прандтля — порядка единицы, то порядок величины δ толщины слоя, в котором происходит падение скорости v_x и изменение температуры T, будет по-прежнему определяться полученными в § 39 формулами, т. е. будет обратно пропорционален $\sqrt{\mathrm{R}}$. Поток тепла

$$q = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial n} \sim \varkappa \frac{T_1 - T_2}{\delta}.$$

Поэтому мы приходим к результату, что q, а вместе с ним и число Нуссельта, прямо пропорционально $\sqrt{\mathrm{R}}$. Зависимость же N от P остается неопределенной. Таким образом, получаем

$$\mathrm{N} = \sqrt{\mathrm{R}}\, f(\mathrm{P}). \tag{54.2}$$

Отсюда, в частности, следует, что коэффициент теплопередачи α обратно пропорционален корню из размеров l тела.

Перейдем теперь к теплопередаче в турбулентном пограничном слое. При этом удобно, как и в § 42, рассмотреть бесконечный плоскопараллельный турбулентный поток, текущий вдоль бесконечной плоской поверхности. Поперечный градиент температуры dT/dy в таком потоке может быть определен из таких же соображений размерности, какие были использованы для нахождения градиента скорости du/dy. Обозначим через q плотность потока тепла вдоль оси y, вызванного наличием градиента температуры. Этот поток является такой же постоянной (не зависящей от y) величиной, какой является поток импульса σ, и наряду с ним может рассматриваться как заданный параметр, определяющий свойства потока. Кроме того, мы имеем теперь в качестве параметров плотность ρ и теплоемкость c_p единицы массы жидкости. Вместо σ введем в качестве параметра величину v_*; q и c_p обладают размерностями соответственно эрг/с $\cdot$ см^2 = г/с^3 и эрг/г $\cdot$ град = см^2/с^2 $\cdot$ град. Что касается коэффициентов вязкости и теплопроводности, то они при достаточно больших R не могут входить в dT/dy явно.

В силу упоминавшейся уже в § 53 однородности уравнений по температуре можно изменить температуру в любое число раз без того, чтобы нарушить уравнения. Но при изменении температуры должен во столько же раз измениться и поток тепла. Поэтому q и T должны быть пропорциональны друг другу. Но из q, v_*, ρ, c_p и y можно составить всего только одну величину, которая

имеет размерность град/см и в то же время пропорциональна q. Такой величиной является $q/(\rho c_p v_* y)$. Поэтому должно быть

$$\frac{dT}{dy} = \beta \frac{q}{\rho c_p \varkappa v_* y},$$

где β есть числовая постоянная, которая должна быть определена экспериментально [1]. Отсюда имеем

$$T = \beta \frac{q}{\varkappa \rho c_p v_*}(\ln y + c). \tag{54.3}$$

Таким образом, температура, как и скорость, распределена по логарифмическому закону. Входящая сюда постоянная интегрирования c, как и при выводе (42.7), должна быть определена из условий в вязком подслое. Полная разность между температурой жидкости в данной точке и температурой стенки (которую мы принимаем условно за нуль) складывается из падения температуры в турбулентном слое и ее падения в вязком подслое. Логарифмическим законом (54.3) определяется только первое из них. Поэтому, если написать (54.3) в виде

$$T = \beta \frac{q}{\varkappa \rho c_p v_*}\left(\ln \frac{y v_*}{\nu} + \mathrm{const}\right),$$

введя под знаком логарифма множителем толщину y_0, то const (умноженная на множитель, стоящий перед скобкой) должна представлять собой изменение температуры в вязком подслое. Это изменение зависит, конечно, и от коэффициентов ν и χ. Поскольку const есть величина безразмерная, то она должна иметь вид некоторой функции от числа P, являющегося единственной безразмерной комбинацией, которую можно составить из имеющихся в нашем распоряжении величин ν, χ, ρ, v_*, c_p (что касается потока тепла q, то он не может входить в const, поскольку T должно быть пропорционально q, а q входит уже в множитель перед скобкой). Таким образом, получаем закон распределения температуры в виде

$$T = \beta \frac{q}{\varkappa \rho c_p v_*}\left[\ln \frac{v_* y}{\nu} + f(\mathrm{P})\right] \tag{54.4}$$

(*Л.Д. Ландау*, 1944). Эмпирическое значение постоянной β в этом выражении: $\beta \approx 0{,}9$. Значение функции f для воздуха: $f(0{,}7) \approx 1{,}5$.

---

[1]) Здесь $\varkappa$ — постоянная Кармана, входящая в логарифмический профиль скоростей (42.4). При таком определении $\beta = \nu_{\text{турб}}/\chi_{\text{турб}}$, где $\nu_{\text{турб}}$ и $\chi_{\text{турб}}$ — коэффициенты в соотношениях

$$q = \rho c_p \chi_{\text{турб}} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \sigma = \rho \nu_{\text{турб}} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

С помощью формулы (54.4) можно рассчитать теплопередачу при турбулентном течении по трубе, при обтекании плоской пластинки и т. п. Мы не станем останавливаться здесь на этом.

Турбулентные пульсации температуры. Говоря выше о температуре турбулентной жидкости, мы подразумевали, конечно, ее усредненное по времени значение. Истинная же температура испытывает в каждой точке пространства крайне нерегулярное изменение со временем, подобное пульсациям скорости.

Будем считать, что существенное изменение средней температуры происходит на тех же расстояниях l (основной масштаб турбулентности), на которых меняется средняя скорость движения. К мелкомасштабным (масштабы $\lambda \ll l$) пульсациям температуры можно применить те же общие представления и соображения подобия, которые были уже использованы при рассмотрении локальных свойств турбулентности в § 33. При этом будем считать, что число $\mathrm{P} \sim 1$ (в противном случае может оказаться необходимым введение двух внутренних масштабов, определенных по ν и по χ). Тогда инерционный интервал масштабов является в то же время *конвективным*, — выравнивание температур в нем происходит путем механического перемешивания различно нагретых «жидких частиц» без участия истинной теплопроводности; свойства температурных пульсаций в этом интервале не зависят и от крупномасштабного движения. Определим зависимость разностей температур T_λ от расстояний λ в инерционном интервале (*А.М. Обухов*, 1949).

Теплопроводностная диссипация энергии (в единице объема) дается выражением $\varkappa(\nabla T)^2/T$ (ср. (49.6) или ниже (79.1)). Разделив его на ρc_p, получим величину $\chi(\nabla T)^2/T \equiv \varphi(T)$, определяющую скорость диссипативного понижения температуры; предполагая турбулентные колебания температуры относительно малыми, можно заменить T в знаменателе постоянной средней температурой. Введенная таким образом величина φ представляет собой еще один (наряду с ε) параметр, определяющий локальные свойства турбулентности в неравномерно нагретой жидкости.

Следуя изложенному в § 33 способу (см. текст после (33.1)), выражаем φ через величины, характеризующие пульсации масштаба λ:

$$\varphi \sim \chi_{\text{турб}\,\lambda}(T_\lambda/\lambda)^2.$$

Подставив сюда

$$\chi_{\text{турб}\,\lambda} \sim \nu_{\text{турб}\,\lambda} \sim \lambda v_\lambda, \quad v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$$

(согласно (33.2) и (33.6)), получим искомый результат:

$$T_\lambda^2 \sim \varphi\varepsilon^{-1/3}\lambda^{2/3}. \tag{54.5}$$

Таким образом, для $\lambda \gg \lambda_0$ пульсации температуры, как и пульсации скорости, пропорциональны $\lambda^{1/3}$.

На расстояниях же $\lambda \lesssim \lambda_0$ температура сглаживается путем истинной теплопроводности. На масштабах $\lambda \ll \lambda_0$ температура меняется плавно. По тем же соображениям, что и для скорости (ср. (33.19)), разности T_λ здесь пропорциональны λ.

Задачи

1. Определить предельный закон зависимости числа Нуссельта от числа Прандтля в ламинарном пограничном слое при больших значениях P и больших R.

Решение. При больших P расстояние δ', на котором происходит изменение температуры, мало по сравнению с толщиной δ слоя, в котором происходит падение скорости v_x (δ' может быть названо толщиной температурного пограничного слоя). Порядок величины δ' может быть получен оценкой членов уравнения (54.1). На расстоянии от $y = 0$ до $y \sim \delta'$ температура испытывает изменение порядка полной разности $T_1 - T_0$ температур жидкости и твердого тела, а скорость v_x на том же расстоянии испытывает изменение порядка $U\delta'/\delta$ (полное изменение порядка U скорость испытывает на расстоянии δ). Поэтому при $y \sim \delta'$ члены уравнения (54.1) порядка величины

$$\chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \chi \frac{T_1 - T_0}{\delta'^2}, \quad v_x \frac{\partial T}{\partial x} \sim U \frac{\delta'}{\delta} \frac{T_1 - T_0}{l}.$$

Сравнение обоих выражений дает $\delta'^3 \sim \chi \delta l/U$. Подставляя $\delta \sim l/\sqrt{\mathrm{R}}$, получаем

$$\delta' \sim \frac{l}{\mathrm{R}^{1/2}\mathrm{P}^{1/3}} \sim \frac{\delta}{\mathrm{P}^{1/3}}.$$

Таким образом, при больших P толщина температурного пограничного слоя убывает по сравнению с толщиной скоростного пограничного слоя обратно пропорционально кубическому корню из P. Поток тепла

$$q = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial y} \sim \varkappa \frac{T_1 - T_0}{\delta'},$$

и окончательно находим предельный закон теплопередачи [1]:

$$\mathrm{N} = \mathrm{const} \cdot \mathrm{R}^{1/2}\mathrm{P}^{1/3}.$$

2. Определить предельный вид функции $f(\mathrm{P})$ в логарифмическом законе распределения температуры (54.4) при больших значениях P.

Решение. Согласно сказанному в § 42 поперечная скорость в вязком подслое порядка величины $v_*(y/y_0)^2$, а масштаб турбулентного движения —

[1]) Для реальных значений коэффициента теплопроводности различных веществ число Прандтля не достигает тех больших значений, для которых мог бы иметь место этот предельный закон. Такие законы, однако, могут быть применены к конвективной диффузии, описывающейся теми же уравнениями, что и конвективная теплопередача, причем роль температуры играет концентрация растворенного вещества, роль теплового потока — поток этого вещества, а *диффузионное число Прандтля* определяется как $\mathrm{P}_D = \nu/D$, где D — коэффициент диффузии. Так, для растворов в воде и сходных жидкостях число P_D достигает значений порядка 10^3, а для растворов в очень вязких растворителях — 10^6 и более.

порядка y^2/y_0. Турбулентная температуропроводность, следовательно,

$$\chi_{\text{турб}} \sim v_* y_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^4 \sim \nu \left(\frac{y}{y_0}\right)^4$$

(мы воспользовались здесь соотношением (42.5)); $\chi_{\text{турб}}$ сравнивается по порядку величины с обычным коэффициентом χ, на расстояниях $y_1 \sim y_0 \mathrm{P}^{-1/4}$. Поскольку $\chi_{\text{турб}}$ очень быстро растет с y, то ясно, что основное изменение температуры в вязком подслое происходит на расстояниях от стенки порядка y_1 и его можно считать пропорциональным y_1, т. е. имеющим порядок величины

$$\frac{q y_1}{\varkappa} \sim \frac{q y_0}{\varkappa \mathrm{P}^{1/4}} \sim \frac{q}{\rho c_p v_*} \mathrm{P}^{3/4}.$$

Сравнивая с формулой (54.4), находим, что функция $f(\mathrm{P})$ будет иметь вид

$$f(\mathrm{P}) = \mathrm{const} \cdot \mathrm{P}^{3/4},$$

где const — численная постоянная.

3. Вынести соотношение, связывающее локальные корреляционные функции

$$B_{TT} = \langle (T_2 - T_1)^2 \rangle, \quad B_{iTT} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(T_2 - T_1)^2 \rangle$$

в неравномерно нагретом турбулентном потоке (*А.М. Яглом*, 1949).

Р е ш е н и е. Все вычисления аналогичны выводам в § 34. Наряду с функциями B_{TT} и B_{iTT} вводим вспомогательные функции

$$b_{TT} = \langle T_1 T_2 \rangle, \quad b_{iTT} = \langle v_{1i} T_1 T_2 \rangle,$$

и для облегчения рассуждений рассматриваем турбулентность как полностью однородную и изотропную. Имеем тогда:

$$B_{TT} = 2\langle T^2 \rangle - 2 b_{TT}, \quad B_{iTT} = 4 b_{iTT} \tag{1}$$

(средние значения

$$\langle v_{1i} T_1 T_2 \rangle = -\langle v_{2i} T_1 T_2 \rangle,$$

а средние значения вида $\langle v_{1i} T_2^2 \rangle$ обращаются в нуль в силу несжимаемости жидкости — ср. вывод (34.18)). С помощью уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

вычисляем производную

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{TT} = -2 \frac{\partial}{\partial x_{1i}} b_{iTT} + 2\chi \Delta_1 b_{TT}. \tag{2}$$

В силу тех же изотропии и однородности, функции b_{iTT} имеют вид

$$b_{iTT} = n_i b_{rTT} \tag{3}$$

(где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$), а b_{rTT} и b_{TT} зависят только от r. С учетом (1) и (3), уравнение (2) принимает вид

$$-2\varphi - \frac{\partial B_{TT}}{\partial t} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\mathbf{n} B_{rTT} \right) - \chi \Delta B_{TT} =$$
$$= \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 B_{rTT} \right) - \frac{\chi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial B_{TT}}{\partial r} \right),$$

где введена величина

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle T^2 \rangle$$

(совпадающая с введенной в тексте). Поскольку локальную турбулентность можно считать стационарной, производной $\partial B_{TT}/\partial t$ пренебрегаем. Интегрируя оставшееся равенство по r, получим искомое соотношение (аналогичное (34.21)):

$$B_{rTT} - 2\chi \frac{dB_{TT}}{dr} = -\frac{4}{3} r\varphi. \qquad (4)$$

При $r \gg \lambda_0$ член, содержащий χ, мал, а согласно (54.5) функция $B_{TT} \propto r^{2/3}$. Тогда из (4) имеем

$$B_{rTT} \approx -\frac{4}{3} r\varphi.$$

На расстояниях же $r \ll \lambda_0$ имеем $B_{TT} \propto r^2$, а членом B_{rTT} можно пренебречь; тогда

$$B_{TT} \approx \frac{1}{3\chi} r^2 \varphi.$$

§ 55. Нагревание тела в движущейся жидкости

Термометр, погруженный в неподвижную жидкость, показывает температуру, равную температуре жидкости. Если же жидкость движется, то термометр покажет температуру несколько более высокую. Это обусловливается нагреванием благодаря внутреннему трению тормозящейся у поверхности термометра жидкости.

Общую задачу можно сформулировать следующим образом. Тело произвольной формы погружается в движущуюся жидкость; по истечении достаточного промежутка времени установится некоторое тепловое равновесие и требуется определить возникающую при этом разность температур $T_1 - T_0$ между ними.

Решение этой задачи определяется уравнением (50.2), в котором, однако, теперь уже нельзя пренебречь членом, содержащим вязкость, как это было сделано в (53.1); именно этот член определяет интересующий нас здесь эффект. Таким образом, для установившегося состояния имеем уравнение

$$\mathbf{v}\nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \qquad (55.1)$$

К нему должны быть присоединены уравнения движения (53.3) самой жидкости и, строго говоря, еще и уравнение теплопроводности внутри твердого тела. В предельном случае достаточно малой теплопроводности тела можно пренебречь ею вовсе и температуру каждой точки поверхности тела считать просто равной температуре жидкости в той же точке, получающейся в результате решения уравнения (55.1) с граничным условием $\partial T/\partial n = 0$, т. е. условием исчезновения потока тепла через поверхность тела. В обратном предельном случае достаточно большой теплопроводности тела можно приближенно потребовать одинаковости температуры во всех точках его поверхности; производная

$\partial T/\partial n$ при этом, вообще говоря, не обращается в нуль на всей поверхности и следует требовать исчезновения лишь полного потока тепла через всю поверхность тела (т. е. интеграла от $\partial T/\partial n$ по этой поверхности). В обоих этих предельных случаях коэффициент теплопроводности тела не входит явно в решение задачи; ниже мы будем предполагать, что имеем дело с одним из них.

В уравнения (55.1) и (53.3) входят постоянные параметры χ, ν и c_p и, кроме того, в их решение войдут размеры тела l и скорость U набегающего потока. (Разность же температур $T_1 - T_0$ не является теперь произвольным параметром, а должна сама быть определена в результате решения уравнений.) Из этих параметров можно составить две независимые безразмерные комбинации, в качестве которых выберем R и P. Тогда можно утверждать, что искомая разность $T_1 - T_0$ равна какой-либо величине с размерностью температуры (в качестве таковой выберем U^2/c_p), умноженной на функцию от R и P:

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f\big(\mathrm{R},\, \mathrm{P}\big). \tag{55.2}$$

Легко определить вид этой функции в случае очень малых чисел Рейнольдса, т. е. достаточно малых скоростей U. Тогда член $\mathbf{v}\nabla T$ в (55.1) мал по сравнению с $\chi\Delta T$, так что уравнение (55.1) упрощается:

$$\chi\Delta T = -\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \tag{55.3}$$

Температура и скорость испытывают заметное изменение на протяжении расстояний порядка размеров l тела. Поэтому оценка обеих частей уравнения (55.3) дает

$$\frac{\chi(T_1 - T_0)}{l^2} \sim \frac{\nu U^2}{c_p l^2}.$$

Таким образом, приходим к результату, что при малых R

$$T_1 - T_0 = \mathrm{const}\cdot \mathrm{P}\frac{U^2}{c_p}, \tag{55.4}$$

где const — численная постоянная, зависящая от формы тела. Отметим, что разность температур оказывается пропорциональной квадрату скорости U.

Некоторые общие заключения о виде функции $f(\mathrm{P},\, \mathrm{R})$ в (55.2) можно сделать и в обратном предельном случае больших R, когда скорость и температура меняются только в узком пограничном слое. Пусть δ и δ' — расстояния, на которых меняются соответственно скорость и температура; δ и δ' отличаются друг от друга множителем, зависящим от P. Количество тепла, выделяемое в пограничном слое в единицу времени благодаря вязкости, дается интегралом (16.3). Отнесенное к единице площади

поверхности тела, оно равно по порядку величины $\nu\rho(U/\delta)^2\delta = \nu\rho U^2/\delta$. С другой стороны, это тепло должно быть равно теплу, теряемому телом и равному потоку

$$q = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial n} \sim \chi c_p\rho\frac{T_1 - T_0}{\delta'}.$$

Сравнив оба выражения, приходим к результату

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p}f(\mathrm{P}). \tag{55.5}$$

Таким образом, и в этом случае функция f оказывается не зависящей от R; зависимость же ее от P остается неопределенной.

Задачи

1. Определить распределение температуры в жидкости, совершающей пуазейлевское течение по трубе кругового сечения, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре T_0.

Решение. В цилиндрических координатах с осью z по оси трубы имеем

$$v_z = v = 2\overline{v}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$$

где $\overline{v}$ — средняя скорость течения. Подстановка в (55.3) приводит к уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right) = -\frac{16\overline{v}^2}{R^4}\frac{\nu}{\chi c_p}r^2.$$

Решение этого уравнения, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $T = T_0$ при $r = R$, есть

$$T_1 - T_0 = \overline{v}^2\frac{\mathrm{P}}{c_p}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

2. Определить разность температур между твердым шаром и обтекающей его жидкостью при малых числах Рейнольдса; теплопроводность шара предполагается большой.

Решение. Выбираем сферические координаты r, θ, φ с началом в центре шара и полярной осью вдоль направления скорости и натекающего потока. Вычисляя компоненты тензора $\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i$ с помощью формул (15.20) и формулы (20.9) для скорости жидкости, обтекающей шар, получаем уравнение (53.3) в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) = -A\frac{R^4}{r^4}\left[\cos^2\theta\left(3 - \frac{6R^2}{r^2} + \frac{2R^4}{r^4}\right) + \frac{R^4}{r^4}\right],$$

где

$$A = \frac{9}{4}u^2\frac{\mathrm{P}}{c_p}.$$

Ищем $T(r, \theta)$ в виде

$$T = f(r)\cos^2\theta + g(r)$$

и получаем после отделения частей, зависящей и не зависящей от θ, два уравнения для f и g:

$$r^2 f'' + 2rf' - 6f = -A\left(\frac{3R^2}{r^2} - \frac{6R^4}{r^4} + \frac{2R^6}{r^6}\right),$$

$$r^2 g'' + 2rg' + 2f = -A\frac{R^6}{r^6}.$$

Из первого уравнения получаем

$$f = A\left(\frac{3R^2}{4r^2} + \frac{R^4}{r^4} - \frac{1}{12}\frac{R^6}{r^6}\right) + \frac{c_1 R^3}{r^3}$$

(член вида $\mathrm{const}\cdot r^2$ опускаем как не исчезающий на бесконечности), после чего второе приводит к решению

$$g = -\frac{A}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{R^2}{r^2} + \frac{1}{3}\frac{R^4}{r^4} + \frac{1}{18}\frac{R^6}{r^6}\right) - \frac{c_1 R^3}{3r^3} + \frac{c_2 R}{r} + c_3.$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются из условий

$$T = \mathrm{const} \quad \text{и} \quad \int \frac{\partial T}{\partial r} r^2 \sin\theta\, d\theta = 0 \quad \text{при} \quad r = R,$$

что эквивалентно требованию

$$f(R) = 0, \quad g'(R) + \frac{1}{3}f'(R) = 0;$$

на бесконечности должно быть $T = T_0$. Находим:

$$c_1 = -\frac{5}{3}A, \quad c_2 = \frac{2}{3}A, \quad c_3 = T_0.$$

Для разности температур шара ($T_1 = T(R)$) и жидкости (T_0) получаем

$$T_1 - T_0 = \frac{5}{8}\mathrm{P}\frac{u^2}{c_p}.$$

Заметим, что найденное распределение температуры оказывается удовлетворяющим и условию $\partial T/\partial r = 0$ при $r = R$, т. е. $f'(R) = g'(R) = 0$. Поэтому оно является одновременно и решением той же задачи в случае малой теплопроводности шара.

§ 56. Свободная конвекция

Мы видели в § 3, что если в находящейся в поле тяжести жидкости имеет место механическое равновесие, то распределение температуры в ней должно зависеть только от высоты z: $T = T(z)$. Если же распределение температуры не удовлетворяет этому требованию, являясь в общем случае функцией всех трех координат, то механическое равновесие в жидкости невозможно. Больше того, даже если $T = T(z)$, то механическое равновесие

все же может оказаться невозможным, если вертикальный градиент температуры направлен вниз и по абсолютной величине превышает определенное предельное значение (§ 4).

Отсутствие механического равновесия приводит к возникновению в жидкости внутренних течений, стремящихся перемешать жидкость так, чтобы в ней установилась постоянная температура. Такое возникающее в поле тяжести движение называют *свободной конвекцией.*

Выведем уравнения, описывающие конвекцию. Мы будем рассматривать жидкость как несжимаемую. Это значит, что давление предполагается достаточно мало меняющимся вдоль жидкости, так что изменением плотности под влиянием изменения давления можно пренебречь. Например, в атмосфере, где давление меняется с высотой, это значит, что мы не будем рассматривать слишком высоких ее столбов, в которых изменение плотности с высотой становится существенным. Что же касается изменения плотности благодаря неравномерной нагретости жидкости, то этим изменением, конечно, нельзя пренебречь. Именно оно приводит к появлению сил, вызывающих конвекционное движение.

Напишем переменную температуру в виде $T = T_0 + T'$, где T_0 есть некоторое постоянное среднее значение, от которого отсчитывается неравномерность температуры T'. Будем предполагать, что T' мало по сравнению с T_0.

Плотность жидкости тоже напишем в виде $\rho = \rho_0 + \rho'$ с постоянным ρ_0. Ввиду малости изменения температуры T' мало также и вызываемое им изменение плотности ρ', причем можно написать

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p T' = -\rho_0 \beta T', \tag{56.1}$$

где $\beta = -\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)$ — *температурный коэффициент расширения* жидкости [1]).

В давлении же $p = p_0 + p'$ величина p_0 не будет постоянной. Это — давление, соответствующее механическому равновесию при постоянных (равных T_0 и ρ_0) температуре и плотности. Оно меняется с высотой согласно гидростатическому уравнению

$$p_0 = \rho_0 \mathbf{g}\mathbf{r} + \mathrm{const} = -\rho_0 g z + \mathrm{const}, \tag{56.2}$$

где координата z отсчитывается вертикально вверх.

В столбе жидкости высотой h гидростатический перепад давления составляет $\rho_0 g h$. Этот перепад приводит к изменению плотности на $\sim\rho g h/c^2$, где c — скорость звука (см. ниже (64.4)). Согласно условию, это изменение должно быть пренебрежимо мало, причем не только по сравнению с самой плотностью, но и

[1]) Будем полагать, что $\beta > 0$.

по сравнению с ее тепловым изменением (56.1). Другими словами, должно удовлетворяться неравенство

$$gh/c^2 \ll \beta\Theta, \tag{56.3}$$

где Θ — характерная разность температур.

Начнем с преобразования уравнения Навье–Стокса, которое при наличии поля тяжести имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g},$$

получающийся добавлением к правой части (15.7) действующей на единицу массы силы $\mathbf{g}$. Подставим сюда $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$. С точностью до малых первого порядка имеем

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_0}{\rho_0} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2}\rho',$$

или, подставляя (56.1) и (56.2):

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} + \mathbf{g}T'\beta.$$

Подставляя это выражение в уравнение Навье–Стокса и опуская индекс у ρ_0, получаем окончательно:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T'. \tag{56.4}$$

В уравнении теплопроводности (50.2) член, содержащий вязкость, при свободной конвекции, как можно показать, мал по сравнению с другими членами уравнения и потому может быть опущен. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T' = \chi\Delta T'. \tag{56.5}$$

Уравнения (56.4) и (56.5) вместе с уравнением непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ представляют собой полную систему уравнений, описывающих свободную конвекцию (*A. Oberbeck*, 1879; *J. Boussinesq*, 1903).

Для стационарного движения уравнения конвекции принимают вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho} - \mathbf{g}\beta T' + \nu\Delta\mathbf{v}, \tag{56.6}$$

$$\mathbf{v}\nabla T' = \chi\Delta T', \tag{56.7}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{56.8}$$

В эту систему пяти уравнений, определяющих неизвестные функции $\mathbf{v}$, p'/ρ, T', входят три параметра: ν, χ и $g\beta$. Кроме

того, в их решение входят характерная длина h и характерная разность температур Θ. Характерная скорость теперь отсутствует, поскольку никакого вынужденного посторонними причинами движения нет, и все течение жидкости обусловливается ее неравномерной нагретостью. Из этих величин можно составить две независимые безразмерные комбинации (напомним, что температуре надо при этом приписывать особую размерность — см. § 53). В качестве этих комбинаций обычно выбирают число Прандтля $\mathrm{P} = \nu/\chi$ и *число Рэлея* [1]:

$$\mathcal{R} = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu\chi}. \tag{56.9}$$

Число Прандтля зависит только от свойств самого вещества жидкости; основной же характеристикой конвекции как таковой является число Рэлея.

Закон подобия для свободной конвекции гласит

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{h}\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{h}, \mathcal{R}, \mathrm{P}\right), \quad T = \Theta f\left(\frac{\mathbf{r}}{h}, \mathcal{R}, \mathrm{P}\right). \tag{56.10}$$

Два течения подобны, если их числа $\mathcal{R}$ и P одинаковы. Теплопередачу при конвекции в поле тяжести характеризуют числом Нуссельта, по-прежнему определенным согласно (53.7). Оно является теперь функцией только от $\mathcal{R}$ и P.

Конвективное движение может быть как ламинарным, так и турбулентным. Наступление турбулентности определяется числом Рэлея — конвекция становится турбулентной при очень больших значениях $\mathcal{R}$.

З а д а ч и

1. Привести к решению обыкновенных дифференциальных уравнений задачу об определении числа Нуссельта при свободной конвекции у плоской вертикальной стенки. Предполагается, что скорость и разности температур заметно отличны от нуля лишь в тонком пограничном слое у поверхности стенки (*E. Pohlhausen*, 1921).

Р е ш е н и е. Выбираем начало координат на нижнем краю стенки, ось x — вертикально в ее плоскости, а ось y — перпендикулярно стенке. В пограничном слое давление не меняется вдоль оси y (ср. § 39) и потому везде равно гидростатическому давлению $p_0(x)$, так что $p' = 0$. С обычной для пограничного слоя точностью уравнения (56.6)–(56.8) принимают вид

$$\begin{gathered} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g\beta(T - T_0), \\ v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} = \chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

[1]) В литературе используется также *число Грассгофа*:

$$\mathrm{G} = g\beta\Theta h^3/\nu^2 = \mathcal{R}/\mathrm{P}.$$

с граничными условиями

$$v_x = v_y = 0, \quad T = T_1 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad v_x = 0, \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad y = \infty$$

(T_1 — температура стенки, T_0 — температура жидкости вдали от стенки). Эти уравнения могут быть преобразованы в обыкновенные дифференциальные уравнения введением в качестве независимой переменной величины

$$\xi = \mathrm{G}^{1/4}\frac{y}{(4xh^3)^{1/4}}, \quad \mathrm{G} = \frac{g\beta(T_1 - T_0)h^3}{\nu^2} \tag{2}$$

(h — высота стенки). Полагаем:

$$v_x = \frac{2\nu}{h^{3/2}}\mathrm{G}^{1/2}\sqrt{x}\varphi'(\xi), \quad T - T_0 = (T_1 - T_0)\theta(\xi). \tag{3}$$

Тогда последнее из уравнений (1) дает

$$v_y = \frac{\nu \mathrm{G}^{1/4}}{(4xh^3)^{1/4}}(\xi\varphi' - 3\varphi),$$

а первые два дают уравнения для функций $\varphi(\xi)$ и $\theta(\xi)$:

$$\varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \theta = 0, \quad \theta'' + 3\mathrm{P}\varphi\theta' = 0. \tag{4}$$

Из (3), (4) следует, что толщина пограничного слоя $\delta \sim (xh^3/\mathrm{G})^{1/4}$. Условие применимости решения, $\delta \ll h$, выполняется при достаточно больших значениях G.

Полный поток тепла (отнесенный к единице площади стенки)

$$q = -\frac{1}{h}\int_0^h \varkappa\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} dx = -\frac{4\varkappa}{3}\theta'(0;\,\mathrm{P})(T_1 - T_0)\left(\frac{\mathrm{G}}{4h}\right)^{1/4}.$$

Число Нуссельта

$$\mathrm{N} = f(\mathrm{P})\mathrm{G}^{1/4},$$

где функция $f(\mathrm{P})$ определяется решением уравнений (4).

2. Горячая турбулентная затопленная струя газа изгибается под влиянием поля тяжести; требуется определить ее форму (*Г.Н. Абрамович*, 1938).

Р е ш е н и е. Пусть T' — некоторое среднее (по сечению струи) значение разности температур в струе и в окружающем газе, u — некоторое среднее значение скорости газа в струе, а l — расстояние вдоль струи от точки ее выхода (l предполагается большим по сравнению с размерами выходного отверстия струи). Условие постоянства потока тепла Q вдоль струи гласит:

$$Q \sim \rho c_p T' u R^2 = \mathrm{const},$$

а поскольку радиус турбулентной струи пропорционален l (ср. § 36), то

$$T' u l^2 = \mathrm{const} \sim \frac{Q}{\rho c_p} \tag{1}$$

(заметим, что без учета поля тяжести $u \propto 1/l$ — см. (36.3) — и из (1) следует, что $T' \propto 1/l$).

Вектор потока импульса через поперечное сечение струи пропорционален $\rho u^2 R^2 \mathbf{n} \sim \rho u^2 l^2 \mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления струи). Его горизонтальная составляющая постоянна вдоль струи:

$$u^2 l^2 \cos\theta = \mathrm{const} \tag{2}$$

(θ — угол между $\mathbf{n}$ и горизонталью), а изменение вертикальной компоненты определяется действующей на струю подъемной силой. Последняя пропорциональна

$$\rho\beta T' R^2 g \sim \rho\beta T' l^2 g \sim \frac{\beta g Q}{c_p}\frac{1}{u}.$$

Поэтому имеем

$$\frac{d}{dl}(l^2u^2\sin\theta) \sim \frac{\beta g Q}{\beta c_p u}. \tag{3}$$

Ввиду (2) отсюда следует

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,\theta}{dl} = \mathrm{const}\cdot l\sqrt{\cos\theta}\,,$$

откуда окончательно

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{(\cos\theta)^{5/2}} = \mathrm{const}\cdot l^2 \tag{4}$$

(θ_0 определяет направление струи в точке ее выхода).

В частности, если на всем протяжении струи изменение угла θ незначительно, то (4) дает

$$\theta - \theta_0 = \mathrm{const}\cdot l^2.$$

Это значит, что струя имеет форму кубической параболы, в которой отклонение d от прямоугольной траектории $d = \mathrm{const}\cdot l^3$.

3. От неподвижного горячего тела поднимается вверх турбулентная (число Рэлея велико) струя нагретого газа. Определить закон изменения скорости и температуры струи с высотой (*Я.Б. Зельдович*, 1937).

Р е ш е н и е. Как и в предыдущем случае, радиус струи пропорционален расстоянию от источника, и аналогично (1) имеем

$$T'uz^2 = \mathrm{const},$$

а вместо (3)

$$\frac{d}{dz}(z^2u^2) = \frac{\mathrm{const}}{u}$$

(z — высота над телом, предполагающаяся большой по сравнению с его размерами). Интегрируя последнее уравнение, найдем

$$u \propto z^{-1/3},$$

а для температуры соответственно

$$T' \propto z^{-5/3}.$$

4. То же для ламинарной свободной восходящей конвективной струи (*Я.Б. Зельдович*, 1937).

Р е ш е н и е. Наряду с соотношением

$$T'uR^2 = \mathrm{const},$$

выражающим постоянство потока тепла, имеем соотношение

$$u^2/z \sim \nu u/R^2 \sim g\beta T',$$

вытекающее из уравнения (56.6). Из этих соотношений находим следующие законы изменения радиуса, скорости и температуры струи с высотой:

$$R \propto \sqrt{z}\,, \quad u = \mathrm{const}, \quad T' \propto 1/z.$$

Заметим, что число

$$\mathcal{R} \propto T'R^3 \propto \sqrt{z}$$

растет с высотой; поэтому на некоторой высоте струя становится турбулентной.

§ 57. Конвективная неустойчивость неподвижной жидкости

Если в заданной конфигурации жидкости и твердых стенок постепенно увеличивать число Рэлея, то наступит момент, когда состояние покоя жидкости становится неустойчивым по отношению к сколь угодно малым возмущениям [1]). В результате возникает конвекция, причем переход от режима чистой теплопроводности в неподвижной жидкости к конвективному режиму совершается непрерывным образом. Поэтому зависимость числа Нуссельта от $\mathcal{R}$ при этом переходе не испытывает скачка, а лишь излом.

Теоретическое определение критического значения $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ должно производиться по схеме, уже объясненной в § 26. Повторим ее здесь применительно к данному случаю.

Представим T' и p' в виде

$$T' = T_0' + \tau, \quad p' = p_0' + \rho w, \tag{57.1}$$

где T_0' и p_0' относятся к неподвижной жидкости, а τ и w — возмущение. T_0' и p_0' удовлетворяют уравнениям

$$\Delta T_0' = \frac{d^2 T_0'}{dz^2} = 0, \quad \frac{dp_0'}{dz} = \rho g \beta T_0'.$$

Из первого имеем $T_0' = -Az$, где A — постоянная; в интересующем нас случае подогрева жидкости снизу эта постоянная $A > 0$.

В уравнениях (56.4), (56.5) малыми величинами являются $\mathbf{v}$ (невозмущенная скорость отсутствует), τ и w. Опустив квадратичные члены и рассматривая возмущения, зависящие от времени как $e^{-i\omega t}$, получим уравнения:

$$-i\omega\mathbf{v} = -\nabla w + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\tau\mathbf{g},$$
$$-i\omega\tau - Av_z = \chi\Delta\tau, \ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Целесообразно записать эти уравнения в безразмерном виде, вводя следующие единицы измерения всех фигурирующих в них величин: для длины, частоты, скорости, давления и температуры это будут соответственно h, ν/h^2, ν/h, $\rho\nu^2/h^2$ и $Ah\nu/\chi$. Ниже в этом параграфе (а также в задачах к нему) все буквы обозначают соответствующие безразмерные величины. Уравнения принимают вид

$$-i\omega\mathbf{v} = -\nabla w + \Delta\mathbf{v} + \mathcal{R}\tau\mathbf{n}, \tag{57.2}$$

$$-i\omega\tau\mathrm{P} = \Delta\tau + v_z, \tag{57.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{57.4}$$

[1]) Не смешивать эту неустойчивость с конвективной неустойчивостью, о которой шла речь в § 28!

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении оси z, — вертикально вверх). Здесь ясно выступают безразмерные параметры $\mathcal{R}$ и P. Если граничащие с жидкостью твердые поверхности поддерживаются при постоянных температурах, то на них должны выполняться условия [1])

$$\mathbf{v} = 0, \quad \tau = 0. \tag{57.5}$$

Уравнения (57.2)–(57.4) с граничными условиями (57.5) определяют спектр собственных частот ω. При $\mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{кр}}$ их мнимые части $\gamma \equiv \operatorname{Im}\omega < 0$ и возмущения затухают. Значение $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ определяется моментом, когда (по мере увеличения $\mathcal{R}$) впервые появляется собственное значение частоты с $\gamma > 0$; при $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{кр}}$ значение γ проходит через нуль.

Задача о конвективной неустойчивости неподвижной жидкости обладает той спецификой, что все собственные значения $i\omega$ вещественны, так что возмущения затухают или усиливаются монотонно, без колебаний. Соответственно, и возникающее в результате неустойчивости неподвижной жидкости устойчивое движение стационарно. Покажем это для жидкости, заполняющей замкнутую полость, с граничными условиями (57.5) на ее стенках [2]).

Умножим уравнения (57.2) и (57.3) соответственно на v^* и τ^* и проинтегрируем их по объему полости. Проинтегрировав члены $\mathbf{v}^*\Delta\mathbf{v}$ и $\tau^*\Delta\tau$ по частям [3]) и заметив, что интегралы по поверхности полости обращаются в нуль в силу граничных условий, получим

$$\begin{gathered} -i\omega \int |\mathbf{v}|^2\, dV = \int \left(-|\operatorname{rot}\mathbf{v}|^2 + \mathcal{R}\tau v_z^*\right) dV, \\ -i\omega \mathrm{P} \int |\tau|^2\, dV = \int (-|\nabla\tau|^2 + \tau^* v_z)\, dV. \end{gathered} \tag{57.6}$$

Вычитая из этих равенств их комплексно-сопряженные,

---

[1]) Мы рассматриваем простейшие граничные условия, отвечающие идеально теплопроводящим стенкам. При конечной теплопроводности стенок к системе уравнений должно было бы быть добавлено еще и уравнение распространения тепла в стенке. Мы не рассматриваем также случаев, когда жидкость имеет свободную поверхность. В таких случаях, строго говоря, должна была бы учитываться деформация поверхности в результате возмущения, и появляющиеся при этом силы поверхностного натяжения.

[2]) В этом выводе и дальнейшей формулировке вариационного принципа мы следуем *В.С. Сорокину* (1953).

[3]) С использованием равенств

$$\mathbf{v}^*\Delta\mathbf{v} = -\mathbf{v}^* \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{div}[\mathbf{v}^*\ \operatorname{rot}\mathbf{v}] - |\operatorname{rot}\mathbf{v}|^2,$$

$$\tau^*\Delta\tau = \operatorname{div}(\tau^*\nabla\tau) - |\nabla\tau|^2, \quad \mathbf{v}\Delta w = \operatorname{div}(w\mathbf{v}).$$

находим

$$-i(\omega+\omega^*)\int|\mathbf{v}|^2\,dV=\mathcal{R}\int(\tau v_z^*-\tau^* v_z)\,dV,$$

$$-i(\omega+\omega^*)\mathrm{P}\int|\tau|^2\,dV=-\int(\tau v_z^*-\tau^* v_z)\,dV.$$

Наконец, умножив второе равенство на $\mathcal{R}$ и сложив с первым, получим

$$\operatorname{Re}\omega\int(|\mathbf{v}|^2+\mathcal{R}\mathrm{P}|\tau|^2)\,dV=0.$$

В виду существенной положительности интеграла, отсюда следует искомый результат $\operatorname{Re}\omega=0$ [1]). Отметим, что при $A<0$ (жидкость подогревается сверху), чему формально отвечает $\mathcal{R}<0$, интеграл мог бы обращаться в нуль и $i\omega$ могло бы быть комплексным.

Вернемся к равенствам (57.6). Умножив теперь второе на $\mathcal{R}$ и сложив с первым, получим для инкремента $\gamma=-i\omega$ следующее выражение:

$$-\gamma=J/N, \tag{57.7}$$

где J и N обозначают интегралы

$$J=\int[(\operatorname{rot}\mathbf{v})^2+\mathcal{R}(\nabla\tau)^2-2\mathcal{R}\tau v_z]\,dV,\quad N=\int(\mathbf{v}^2+\mathcal{R}\mathrm{P}\tau^2)\,dV \tag{57.8}$$

(функции $\mathbf{v}$ и τ предполагаются вещественными). Как известно, задача о собственных значениях самосопряженных линейных дифференциальных операторов допускает вариационную формулировку, основанную именно на выражении вида (57.7), (57.8). Рассматривая J и N как функционалы по отношению к функциям $\mathbf{v}$ и τ, потребуем экстремальности J при дополнительных условиях $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ и $N=1$; последнее играет роль «условия

[1]) С математической точки зрения, изложенный вывод сводится к доказательству самосопряженности системы уравнений (57.2)–(57.4). С физической точки зрения, происхождение этого результата можно пояснить следующими соображениями. Пусть при возмущении элемент жидкости смещается, например, наверх. Попав в окружение менее нагретой жидкости, он будет охлаждаться за счет теплопроводности, оставаясь все же более нагретым, чем окружающая среда. Поэтому действующая на него сила плавучести будет направлена вверх и элемент будет продолжать движение в том же направлении — затухающее или ускоряющееся в зависимости от соотношения между градиентом температуры и диссипативными коэффициентами. В обоих случаях ввиду отсутствия «возвращающей силы» колебания не возникают. Отметим, что при наличии свободной поверхности возвращающая сила возникает за счет поверхностного натяжения, стремящегося сгладить деформированную поверхность; при учете этой силы сделанные утверждения уже не справедливы.

нормировки». По общим правилам вариационного исчисления, составляем вариационное уравнение

$$\delta J + \gamma\delta N - \int 2w\delta(\operatorname{div}\mathbf{v})\,dV = 0, \tag{57.9}$$

где константа γ и функция $w(\mathbf{r})$ играют роль лагранжевых неопределенных множителей. Вычислив входящие сюда вариации (произведя при этом интегрирования по частям с учетом граничных условий (57.5)) и приравнивая нулю выражения при независимых вариациях $\delta\mathbf{v}$ и $\delta\tau$, действительно получим уравнения (57.2), (57.3). Значение J, вычисленное по поставленной таким образом вариационной задаче, определяет согласно (57.7) наименьшее значение $-\gamma = -\gamma_1$, т. е. инкремент наиболее быстро усиливающихся (или декремент наименее быстро убывающих — в зависимости от знака γ) возмущений.

По смыслу его вывода, критическое значение $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ определяет границу устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям. Но для задачи о конвективной устойчивости неподвижной жидкости оказывается, что это число является в то же время границей устойчивости по отношению к любым конечным возмущениям [1]. Другими словами, при $\mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{кр}}$ не существует никаких незатухающих со временем решений уравнений движения, за исключением состояния покоя. Покажем это (*В.С. Сорокин*, 1954).

Для конечных возмущений уравнения движения должны быть написаны в виде

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla w + \Delta\mathbf{v} + \mathcal{R}\tau\mathbf{n} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}, \quad \mathrm{P}\frac{\partial\tau}{\partial t} = \Delta\tau + v_z - \mathrm{P}\mathbf{v}\nabla\tau, \tag{57.10}$$

отличающемся от (57.2), (57.3) нелинейными членами. Проделаем с этими уравнениями в точности те же операции, которые были произведены выше с уравнениями (57.2), (57.3) при выводе соотношений (57.6) и (57.7). Ввиду равенства $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, нелинейные члены сводятся к полным дивергенциям:

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \operatorname{div}\left(\frac{v^2}{2}\mathbf{v}\right), \quad \tau(\mathbf{v}\nabla)\tau = \operatorname{div}\left(\frac{\tau^2}{2}\mathbf{v}\right)$$

и при интегрировании выпадают. Поэтому мы получим в результате соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{dN}{dt} = -J,$$

[1]) Говоря о возмущениях конечной интенсивности, мы имеем здесь в виду возмущения, для которых в уравнениях (56.4), (56.5) нельзя пренебрегать нелинейными членами, но в то же время по-прежнему удовлетворяются условия, поставленные при выводе этих уравнений.

отличающееся от равенства $\gamma N = -J$ (57.7) лишь тем, что вместо произведения γN теперь стоит производная по времени. В силу сформулированного выше вариационного принципа, для любых функций $\mathbf{v}$ и τ будет $-J \leqslant \gamma_1 N$. Поэтому

$$\frac{dN(t)}{dt} \leqslant 2\gamma_1 N(t),$$

откуда

$$N(t) \leqslant N(0) e^{2\gamma_1 t}. \tag{57.11}$$

Но в надкритической ($\mathcal{R} < \mathcal{R}_{\text{кр}}$) области все полученные по линейной теории инкременты, в том числе наибольший из них γ_1, отрицательны. Поэтому из (57.11) следует, что $N(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а ввиду существенной положительности подынтегрального выражения в N стремятся к нулю также и сами функции $\mathbf{v}$ и τ.

Вернемся к вопросу о вычислении $\mathcal{R}_{\text{кр}}$. Поскольку все собственные значения $i\omega$ вещественны, то равенство $\gamma = 0$ при $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{кр}}$ означает, что и $\omega = 0$. Значение $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ определяется тогда как наименьшее из собственных значений параметра $\mathcal{R}$ в системе уравнений

$$\begin{gathered} \Delta\mathbf{v} - \nabla w + \mathcal{R}\tau\mathbf{n} = 0, \\ \Delta\tau = -v_z, \;\; \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \end{gathered} \tag{57.12}$$

(эта задача тоже допускает вариационную формулировку — см. задачу 2). Обратим внимание на то, что ни сами уравнения (57.12), ни граничные условия к ним не содержат числа Р. Поэтому и определяемое ими критическое число Рэлея для заданной конфигурации жидкости и твердых стенок не зависит от вещества жидкости.

Наиболее простой и в то же время теоретически важной является задача [1]) об устойчивости слоя жидкости между двумя неограниченными горизонтальными плоскостями, из которых верхняя поддерживается при более низкой температуре, чем нижняя.

Для этой задачи удобно привести систему (57.12) к одному уравнению [2]). Применив к первому уравнению операцию $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \nabla\operatorname{div} - \Delta$, взяв затем его z-компоненту и воспользовавшись двумя другими уравнениями, получим

$$\Delta^3\tau = \mathcal{R}\Delta_2\tau, \tag{57.13}$$

[1]) Впервые поставленная экспериментально *Бенаром* (*H. Bénar*, 1900) и рассматривавшаяся теоретически *Рэлеем* (*Rayleigh*, 1916).

[2]) Вещественность $i\omega$ для этой задачи была доказана *Пелью* и *Саутвеллом* (*A. Pellew*, *R.V. Southwell*, 1940).

(где $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный лапласиан). Граничные условия на обеих плоскостях:

$$\tau = 0, \;\; v_z = 0, \;\; \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \; 1$$

(последнее эквивалентно, ввиду уравнения непрерывности, условиям $v_x = v_y = 0$ при всех x, y). Ввиду второго из уравнений (57.12) условия для v_z можно заменить условиями для высших производных от τ:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = 0, \;\; \frac{\partial^3 \tau}{\partial z^3} - k^2 \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Ищем τ в виде

$$\tau = f(z)\varphi(x, y), \;\; \varphi = e^{i\mathbf{kr}} \tag{57.14}$$

(где $\mathbf{k}$ — вектор в плоскости xy) и получаем для $f(z)$ уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3 f + \mathcal{R}k^2 f = 0.$$

Общее решение этого уравнения представляет собой линейную комбинацию функций $\operatorname{ch}\mu z$ и $\operatorname{sh}\mu z$, где

$$\mu^2 = k^2 - \mathcal{R}^{1/3}k^{2/3}\sqrt[3]{1}$$

с тремя различными значениями корня. Коэффициенты этой комбинации определяются граничными условиями, приводящими к системе алгебраических уравнений, условие совместности которых дает трансцендентное уравнение, корни которого и определяют зависимости $k = k_n(\mathcal{R})$, $n = 1, 2, \ldots$ Обратные функции $\mathcal{R} = \mathcal{R}_n(k)$ имеют минимум при определенных значениях k; наименьший из этих минимумов и дает значение $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ [1]). Оно оказывается равным 1708, причем соответствующее значение волнового числа $k_{\text{кр}} = 3{,}12$ в единицах $1/h$ (*H. Jeffreys*, 1908).

Таким образом, горизонтальный слой жидкости толщины h с направленным вниз градиентом температуры A становится неустойчивым при [2])

$$\frac{g\beta A h^3}{\nu\chi} > 1708. \tag{57.15}$$

---

[1]) Детали вычислений можно найти в кн.: *Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972, а также в указанных на с. 145 книгах *С. Чандрасекхара* и *Дразина* и *Рейда.*

[2]) При заданном значении A это условие во всяком случае выполняется при достаточно большом h. Во избежание недоразумений следует напомнить, что речь идет здесь лишь о таких высотах h, при которых несущественно изменение плотности жидкости под влиянием поля тяжести. Поэтому к высоким столбам жидкости этот критерий неприменим. В таком случае следует применять критерий, полученный в § 4, из которого видно, что конвекция может отсутствовать при любой высоте столба, если градиент температуры не слишком велик.

При $\mathcal{R} > \mathcal{R}_{\text{кр}}$ в жидкости возникает стационарное конвективное движение, периодическое в плоскости xy. Все пространство между плоскостями разделяется на прилегающие друг к другу одинаковые ячейки, в каждой из которых жидкость движется по замкнутым траекториям, не переходя из одной ячейки в другую. Контуры этих ячеек на граничных плоскостях образуют в них некоторую решетку. Значение $k_{\text{кр}}$ определяет периодичность, но не симметрию этой решетки; линеаризованные уравнения движения допускают в (57.14) любую функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $(\Delta_2 - k^2)\varphi = 0$. Устранение этой неоднозначности в рамках линейной теории невозможно. По-видимому, должна осуществляться «двумерная» структура движения, в которой на плоскости xy имеется лишь одномерная периодичность — система параллельных полос [1].

З а д а ч и

1. Найти критическое число Рэлея для возникновения конвекции в жидкости в вертикальной цилиндрической трубе, вдоль которой поддерживается постоянный градиент температуры; стенки трубы *а*) идеально теплопроводны, или *б*) теплоизолирующие (*Г.А. Остроумов*, 1946).

Р е ш е н и е. Ищем решение уравнений (57.2)—(57.4), в котором конвективная скорость $\mathbf{v}$ направлена везде по оси трубы (ось z), а вся картина движения постоянна вдоль этой оси, т. е. величины $v_z = v$, τ, $\partial w/\partial z$ зависят только от координат в плоскости сечения трубы [2]. Уравнения принимают вид

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \Delta_2 v = -\mathcal{R}\tau + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \Delta_2 \tau = v$$

(число $\mathcal{R} = g\beta A R^4/(\chi\nu)$, R — радиус трубы). Из первых двух уравнений следует, что $\partial w \partial z = \text{const}$, а исключив из остальных уравнений τ, получим

$$\Delta_2^2 v = \mathcal{R} v.$$

На стенках трубы ($r = 1$) должны удовлетворяться условие $v = 0$ и условие $\tau = 0$ (в случае *а*) или $\partial\tau/\partial r = 0$ (в случае *б*). Кроме того, должен быть равен нулю полный поток жидкости через поперечное сечение трубы.

---

[1]) Теоретические указания состоят в том, что в надкритической области вблизи $\mathcal{R}_{\text{кр}}$ лишь эта структура оказывается устойчивой по отношению к малым возмущениям; «трехмерные» же призматические структуры оказываются неустойчивыми. Экспериментальные результаты существенно зависят от условий опыта (в том числе от формы и размеров боковых стенок сосуда) и не однозначны. Наблюдавшаяся в ряде случаев трехмерная гексагональная структура связана, по-видимому, с влиянием поверхностного натяжения на верхней свободной поверхности, и с температурной зависимостью вязкости жидкости (в изложенной теории вязкость ν рассматривалась, конечно, как постоянная).

[2]) Уравнения имеют также решения, периодические вдоль оси z, содержащие множитель $\exp(ikz)$. Все они, однако, приводят к более высоким значениям $\mathcal{R}_{\text{кр}}$. Обратим внимание на то, что рассматриваемое решение с $k = 0$ удовлетворяет также и точным (нелинеаризованным) уравнениям (57.10) ввиду тождественного обращения в нуль нелинейных членов $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}\nabla\tau$.

Уравнение имеет решения вида

$$\cos n\varphi \cdot J_n(kr), \;\; \cos n\varphi \cdot I_n(kr),$$

где J_n, I_n — функции Бесселя вещественного и мнимого аргумента, а $k^4 = \mathcal{R}$; r, φ — полярные координаты в плоскости сечения трубы. Моменту возникновения конвекции отвечает то решение, которому соответствует наименьшее значение $\mathcal{R}$. Оказывается, что таковым является решение с $n = 1$:

$$v = v_0 \cos\varphi [J_1(kr)\, I_1(k) - I_1(kr) J_1(k)],$$

$$\tau = \frac{v_0}{\mathcal{R}^{1/2}} \cos\varphi [J_1(kr) I_1(k) + I_1(kr) J_1(k)]$$

(причем градиент $\partial w/\partial z = 0$). Описываемое этими формулами движение антисимметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось трубы и делящей полость на две части; в одной из них жидкость опускается, а в другой поднимается. Написанное решение удовлетворяет условию $v = 0$ при $r = 1$. В случае *а* условие $\tau = 0$ приводит к уравнению $J_1(k) = 0$; его наименьший корень дает критическое число $\mathcal{R}_{\text{кр}} = k^4 = 216$. В случае *б* условие $\partial\tau/\partial r = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{J_0(k)}{J_1(k)} + \frac{I_0(k)}{I_1(k)} = \frac{2}{k}.$$

Наименьший корень этого уравнения дает $\mathcal{R}_{\text{кр}} = 68$.

2. Сформулировать вариационный принцип для задачи о собственных значениях $\mathcal{R}$, определяемых уравнениями (37.12).

Р е ш е н и е. Придадим уравнениям (57.12) более симметричный вид, введя вместо τ новую функцию $\widetilde{\tau} = \sqrt{\mathcal{R}}\,\tau$, т. е. снова изменив единицу измерения температуры. Тогда:

$$\sqrt{\mathcal{R}}\,\widetilde{\tau}\mathbf{n} = \nabla w - \Delta\mathbf{v}, \quad \sqrt{\mathcal{R}}\,v_z = -\Delta\widetilde{\tau}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Поступая, как при выводе (57.7), получим $\sqrt{\mathcal{R}} = J/N$, где

$$J = \frac{1}{2}\int [(\operatorname{rot}\mathbf{v})^2 + (\nabla\widetilde{\tau})^2]\, dV, \quad N = \int v_z \widetilde{\tau}\, dV$$

(интеграл N положителен, в чем легко убедиться, приведя его к виду $\mathcal{R}^{1/2}\displaystyle\int (\nabla\widetilde{\tau})^2\, dV$). Вариационный принцип формулируется, как требование экстремальности J при дополнительных условиях $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и $N = 1$. Минимальное значение J определяет наименьшее собственное значение $\sqrt{\mathcal{R}}$.

ГЛАВА VI

ДИФФУЗИЯ

§ 58. Уравнения гидродинамики для жидкой смеси

Во всем предыдущем изложении предполагалось, что жидкость полностью однородна по своему составу. Если же мы имеем дело со смесью жидкостей или газов, состав которой меняется вдоль ее объема, то уравнения гидродинамики существенно изменяются.

Мы ограничимся рассмотрением смесей с двумя только компонентами. Состав смеси мы будем описывать концентрацией c, определяемой как отношение массы одного из входящих в состав смеси веществ к полной массе жидкости в данном элементе объема.

С течением времени распределение концентрации в жидкости, вообще говоря, меняется. Изменение концентрации происходит двумя путями. Во-первых, при макроскопическом движении жидкости каждый данный ее участок передвигается как целое с неизменным составом. Этим путем осуществляется чисто механическое перемешивание жидкости; хотя состав каждого передвигающегося участка жидкости не меняется, но в каждой данной неподвижной точке пространства концентрация находящейся в этом месте жидкости будет со временем меняться. Если отвлечься от могущих одновременно иметь место процессов теплопроводности и внутреннего трения, то такое изменение концентрации является термодинамически обратимым процессом и не ведет к диссипации энергии.

Во-вторых, изменение состава может происходить путем молекулярного переноса веществ смеси из одного участка жидкости в другой. Выравнивание концентрации путем такого непосредственного изменения состава каждого из участков жидкости называют *диффузией*. Диффузия является процессом необратимым и представляет собой наряду с теплопроводностью и вязкостью один из источников диссипации энергии в жидкой смеси.

Будем обозначать буквой ρ полную плотность жидкости. Уравнение непрерывности для полной массы жидкости сохраняет прежний вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \qquad (58.1)$$

Оно означает, что полная масса жидкости в некотором объеме может измениться только путем втекания или вытекания жид-

кости из этого объема. Следует подчеркнуть, что, строго говоря, для жидкой смеси само понятие скорости должно быть определено заново. Написав уравнение непрерывности в виде (58.1), мы тем самым определили скорость в соответствии с прежним определением как полный импульс единицы массы жидкости.

Не меняется также и уравнение Навье–Стокса (15.5). Выведем теперь остальные гидродинамические уравнения для смесей.

При отсутствии диффузии состав каждого данного элемента жидкости оставался бы неизменным при его передвижении. Это значит, что полная производная $\dfrac{dc}{dt}$ была бы равна нулю, т. е. имело бы место уравнение

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla c = 0.$$

Это уравнение можно написать, используя (58.1), как

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}\rho c) = 0,$$

т. е. в виде уравнения непрерывности для одного из веществ в смеси (ρc есть масса одного из веществ смеси в единице объема). Написанное в интегральном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho c\, dV = -\oint \rho c\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$$

оно означает, что изменение количества данного вещества в некотором объеме равно количеству этого вещества, переносимому движущейся жидкостью через поверхность объема.

При наличии диффузии наряду с потоком $\mathbf{v}\rho c$ данного вещества вместе со всей жидкостью имеется еще и другой поток, который приводит к переносу веществ в смеси даже при отсутствии движения жидкости в целом. Пусть $\mathbf{i}$ есть плотность этого диффузионного потока, т. е. количество рассматриваемого вещества, переносимого путем диффузии в единицу времени через единицу поверхности [1]. Тогда для изменения количества этого вещества в некотором объеме имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho c\, dV = -\oint \rho c\mathbf{v}\, d\mathbf{f} - \oint \mathbf{i}\, d\mathbf{f},$$

или в дифференциальном виде

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho c\mathbf{v}) - \operatorname{div}\mathbf{i}. \tag{58.2}$$

С помощью (58.1) это уравнение непрерывности для одного из веществ в смеси можно написать в виде

$$\rho\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla c\right) = -\operatorname{div}\mathbf{i}. \tag{58.3}$$

---

[1]) Сумма плотностей потоков обоих веществ должна быть равна $\rho\mathbf{v}$. Поэтому если плотность потока одного из них есть $\rho\mathbf{v}c+\mathbf{i}$, то другого — $\rho\mathbf{v}(l-c)-\mathbf{i}$.

Для вывода еще одного уравнения повторим произведенный в § 49 вывод, учитывая, что термодинамические величины жидкости являются теперь функциями также и от концентрации. При вычислении (в § 49) производной

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)$$

с помощью уравнений движения нам приходилось, в частности, преобразовывать члены $\rho\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ и $-\mathbf{v}\nabla p$. Это преобразование теперь изменяется в связи с тем, что термодинамические соотношения для энергии и тепловой функции содержат дополнительный член с дифференциалом концентрации:

$$d\varepsilon = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho + \mu\,dc,$$

$$dw = Tds + \frac{1}{\rho}\,dp + \mu\,dc,$$

где μ — соответствующим образом определенный химический потенциал смеси [1]. Соответственно этому в производную $\rho\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}$ войдет теперь дополнительный член $\rho\mu\dfrac{\partial c}{\partial t}$. Написав второе из термодинамических соотношений в виде

$$dp = \rho\,dw - \rho T\,ds - \rho\mu\,dc,$$

мы видим, что в член $-\mathbf{v}\nabla p$ войдет дополнительный член $\rho\mu\mathbf{v}\nabla c$. Поэтому к выражению (49.3) надо добавить

$$\rho\mu\left(\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla c\right) = -\mu\,\mathrm{div}\,\mathbf{i}.$$

---

[1]) Из термодинамики известно (см. V, § 85), что для смеси двух веществ:

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV + \mu_1\,dn_1 + \mu_2\,dn_2,$$

где n_1, n_2 — числа частиц обоих веществ в 1 г смеси, а μ_1, μ_2 — химические потенциалы этих веществ. Числа n_1 и n_2 удовлетворяют соотношению $n_1m_1 + n_2m_2 = 1$, где m_1, m_2 — массы частиц обоего рода. Если ввести в качестве переменной концентрацию $c = n_1m_1$, то мы получим

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV + \left(\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{\mu_2}{m_2}\right)dc.$$

Сравнивая с приведенным в тексте соотношением, мы видим, что химический потенциал μ, которым мы пользуемся, связан с обычными потенциалами μ_1 и μ_2 соотношением

$$\mu = \frac{\mu_1}{m_1}-\frac{\mu_2}{m_2}.$$

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=$$
$$=-\operatorname{div}\left[\mathbf{v}\rho\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')+\mathbf{q}\right]+\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)-$$
$$-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\operatorname{div}\mathbf{q}-\mu\operatorname{div}\mathbf{i}. \quad (58.4)$$

Вместо $-\varkappa\nabla T$ мы пишем теперь некоторый поток тепла $\mathbf{q}$, который может зависеть не только от градиента температуры, но и от градиента концентрации (см. следующий параграф). Сумму двух последних членов в правой части равенства напишем в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{q}-\mu\operatorname{div}\mathbf{i}=\operatorname{div}(\mathbf{q}-\mu\mathbf{i})+\mathbf{i}\nabla\mu.$$

Выражение

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')+\mathbf{q},$$

стоящее под знаком div в (58.4), есть, по определению $\mathbf{q}$, полный поток энергии в жидкости. Первый член есть обратимый поток энергии, связанный просто с перемещением жидкости как целого, а сумма $-(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')+\mathbf{q}$ есть необратимый поток. При отсутствии макроскопического движения вязкий поток $(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')$ исчезает и тепловой поток есть просто $\mathbf{q}$.

Уравнение закона сохранения энергии гласит:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}')+\mathbf{q}\right]. \quad (58.5)$$

Вычитая его почленно из (58.4), получим искомое уравнение

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\operatorname{div}(\mathbf{q}-\mu\mathbf{i})-\mathbf{i}\nabla\mu, \quad (58.6)$$

обобщающее выведенное ранее уравнение (49.4).

Мы получили, таким образом, полную систему гидродинамических уравнений для жидких смесей. Число уравнений в этой системе на единицу больше, чем в случае чистой жидкости, соответственно тому, что имеется еще одна неизвестная функция — концентрация. Этими уравнениями являются: уравнения непрерывности (58.1), уравнения Навье–Стокса, уравнение непрерывности для одной из компонент смеси (58.2) и уравнение (58.6), определяющее изменение энтропии. Надо, впрочем, отметить, что уравнения (58.2) и (58.6) определяют пока по существу только вид соответствующих гидродинамических уравнений, поскольку в них входят неопределенные величины: потоки $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}$. Эти уравнения делаются определенными лишь при подстановке $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}$, выраженных через градиенты температуры и концентрации; соответствующие выражения будут получены в § 59.

Для изменения полной энтропии жидкости вычисление, полностью аналогичное произведенному в § 49 (с использованием (58.6) вместо (49.4)), приводит к результату

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s\,dV = -\int \frac{(\mathbf{q}-\mathbf{i}\mu)\nabla T}{T^2}\,dV - \int \frac{\mathbf{i}\nabla\mu}{T}\,dV + \ldots \qquad (58.7)$$

(члены, обусловленные вязкостью, для краткости не выписываем).

§ 59. Коэффициенты диффузии и термодиффузии

Диффузионный поток вещества **i** и тепловой поток **q** возникают в результате наличия в жидкости градиентов концентрации и температуры. Не следует при этом думать, что **i** зависит только от градиента концентрации, а **q** — только от градиента температуры. Напротив, каждый из этих потоков зависит, вообще говоря, от обоих указанных градиентов.

Если градиенты температуры и концентрации невелики, то можно считать, что **i** и **q** являются линейными функциями от $\nabla\mu$ и ∇T (от градиента давления — при заданных $\nabla\mu$ и ∇T — потоки **q** и **i** не зависят по той же причине, которая была уже указана для **q** в § 49). Соответственно этому напишем **i** и **q** в виде линейных функций от градиентов μ и T:

$$\mathbf{i} = -\alpha\nabla\mu - \beta\nabla T,$$
$$\mathbf{q} = -\delta\nabla\mu - \gamma\nabla T + \mu\mathbf{i}.$$

Между коэффициентами β и δ существует простое соотношение, являющееся следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов. Содержание этого общего принципа заключается в следующем (см. V, § 120). Рассмотрим какую-нибудь замкнутую систему и пусть $x_1, x_2, \ldots$ — некоторые величины, характеризующие состояние системы. Их равновесные значения определяются тем, что в статистическом равновесии энтропия S всей системы должна иметь максимум, т. е. должно быть $X_a = 0$, где X_a обозначают производные:

$$X_a = -\frac{\partial S}{\partial x_a}. \qquad (59.1)$$

Предположим, что система находится в состоянии, близком к равновесному. Это значит, что все x_a лишь мало отличаются от своих равновесных значений, а величины X_a малы. В системе будут происходить процессы, стремящиеся привести ее в состояние равновесия. Величины X_a являются при этом функциями времени, а скорость их изменения определяется производными по времени $\dot{x}_a$; представим последние в виде функций от X_a и

разложим эти функции в ряд. С точностью до членов первого порядка имеем

$$\dot{x}_a = -\sum_b \gamma_{ab} X_b. \qquad (59.2)$$

Принцип симметрии кинетических коэффициентов Онсагера утверждает, что величины γ_{ab} (называемые *кинетическими коэффициентами*) симметричны по индексам a, b:

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \qquad (59.3)$$

Скорость изменения энтропии S равна

$$\dot{S} = -\sum_a X_a \dot{x}_a.$$

Пусть теперь сами величины x_a различны в разных точках тела, т. е. каждый элемент объема тела должен характеризоваться своими значениями величин x_a. Другими словами, будем рассматривать x_a как функции от координат. Тогда в выражении для S, кроме суммирования по a, надо произвести также и интегрирование по всему объему системы, т. е.

$$\dot{S} = -\int \sum_a X_a \dot{x}_a \, dV. \qquad (59.4)$$

Что касается зависимости между X_a и $\dot{x}_a$, то обычно можно утверждать, что значения $\dot{x}_a$ в каждой данной точке системы зависят только от значений величин X_a в этой же точке. Если это условие выполняется, то можно писать связь между $\dot{x}_a$ и X_a для каждой точки в системе, и мы возвращаемся к прежним соотношениям.

В данном случае выберем в качестве величин $\dot{x}_a$ компоненты векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q} - \mu\mathbf{i}$. Тогда из сравнения (58.7) с (59.4) видно, что роль величин X_a будут играть соответственно компоненты векторов $T^{-1}\nabla\mu$ и $T^{-2}\nabla T$. Кинетическими же коэффициентами γ_{ab} будут являться коэффициенты при этих векторах в равенствах

$$\mathbf{i} = -\alpha T\left(\frac{\nabla\mu}{T}\right) - \beta T^2\left(\frac{\nabla T}{T^2}\right), \quad \mathbf{q} - \mu\mathbf{i} = -\delta T\left(\frac{\nabla\mu}{T}\right) - \gamma T^2\left(\frac{\nabla T}{T^2}\right).$$

В силу симметрии кинетических коэффициентов должно быть $\beta T^2 = \delta T$, т. е.

$$\delta = \beta T.$$

Это и есть искомое соотношение. Мы можем поэтому написать потоки $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}$ в виде

$$\mathbf{i} = -\alpha\nabla\mu - \beta\nabla T, \quad \mathbf{q} = -\beta T\nabla\mu - \gamma\nabla T + \mu\mathbf{i} \qquad (59.5)$$

всего с тремя независимыми коэффициентами: α, β, γ. В выражении для теплового потока удобно исключить градиент $\nabla\mu$,

выразив его через $\mathbf{i}$ и ∇T. Сделав это, получим

$$\mathbf{i} = -\alpha\nabla\mu - \beta\nabla T,$$
$$\mathbf{q} = \left(\mu + \frac{\beta T}{\alpha}\right)\mathbf{i} - \varkappa\nabla T, \tag{59.6}$$

где введено обозначение

$$\varkappa = \gamma - \frac{\beta^2 T}{\alpha}. \tag{59.7}$$

Если поток вещества $\mathbf{i}$ отсутствует, то говорят о чистой теплопроводности. Для того чтобы было $\mathbf{i} = 0$, T и μ должны удовлетворять уравнению $\alpha\nabla\mu + \beta\nabla T = 0$, или

$$\alpha\, d\mu + \beta\, dT = 0.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к соотношению вида $f(c, T) = 0$, не содержащему в явном виде координат (химический потенциал является функцией не только от c, T, но и от давления; в равновесии, однако, давление постоянно вдоль тела, и потому мы полагаем $p = \text{const}$). Это соотношение определяет связь между концентрацией и температурой, которая должна иметь место для отсутствия потока вещества. Далее, при $\mathbf{i} = 0$ имеем из (59.7) $\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T$; таким образом, $\varkappa$ является не чем иным, как теплопроводностью.

Перейдем теперь к обычным переменным p, T и c:

$$\nabla\mu = \left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}\nabla c + \left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{c,p}\nabla T + \left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_{c,T}\nabla p.$$

Последний член можно преобразовать, используя термодинамическое соотношение

$$d\varphi = -s\, dT + V\, dp + \mu\, dc, \tag{59.8}$$

где φ — термодинамический потенциал единицы массы, V — удельный объем:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_{c,T} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial c} = \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{p,T}.$$

Подставив $\nabla\mu$ в (59.6) и введя обозначения

$$D = \frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}, \quad \frac{\rho k_T D}{T} + \alpha\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{c,p} + \beta, \tag{59.9}$$

$$k_p = p\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{p,T}\Big/\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}, \tag{59.10}$$

получим следующие выражения:

$$\mathbf{i} = -\rho D\left(\nabla c + \frac{k_T}{T}\nabla T + \frac{k_p}{p}\nabla p\right), \tag{59.11}$$

$$\mathbf{q} = \left[k_T\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T} - T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{p,c} + \mu\right]\mathbf{i} - \varkappa\nabla T. \tag{59.12}$$

Коэффициент D называют *коэффициентом диффузии*; он определяет диффузионный поток при наличии одного только градиента концентрации. Диффузионный же поток, вызываемый градиентом температуры, определяется *коэффициентом термодиффузии* $k_T D$ (безразмерную же величину k_T называют *термодиффузионным отношением*). В учете последнего члена в (59.11) может возникнуть необходимость лишь при наличии в жидкости существенного градиента давления, вызванного, например, внешним полем. Величину $k_p D$ можно назвать *коэффициентом бародиффузии*; мы вернемся еще к этой величине в конце параграфа.

В чистой жидкости диффузионный поток, разумеется, отсутствует. Поэтому ясно, что коэффициенты k_T и k_p должны обращаться в нуль на обоих пределах: $c = 0$ и $c = 1$.

Условие возрастания энтропии накладывает определенные ограничения на коэффициенты в формулах (59.6). Подставив эти формулы в выражение (58.7) для скорости изменения энтропии, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s\, dV = \int \frac{\varkappa(\nabla T)^2}{T^2}\, dV + \int \frac{\mathbf{i}^2}{\alpha T}\, dV + \ldots \tag{59.13}$$

Отсюда видно, что наряду с известным уже нам условием $\varkappa > 0$ должно выполняться также условие $\alpha > 0$. Имея в виду, что согласно одному из термодинамических неравенств всегда

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T} > 0$$

(см. V, § 96), мы находим, что должен быть положителен коэффициент диффузии: $D > 0$. Величины же k_T и k_p могут быть как положительными, так и отрицательными.

Мы не станем выписывать громоздких общих уравнений, получающихся при подстановке полученных здесь выражений для $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}$ в уравнения (58.3), (58.6). Ограничимся лишь случаем, когда нет никакого существенного градиента давления, а концентрация и температура настолько мало меняются в жидкости, что коэффициенты в выражениях (59.11) и (59.12), являющиеся в общем случае функциями от c и T, можно считать постоянными. Будем, кроме того, считать, что в жидкости нет никакого макроскопического движения, помимо того, которое может быть вызвано самим наличием градиентов температуры и концентрации. Скорость такого движения будет пропорциональна этим градиентам, и потому в уравнениях (58.3) и (58.6) члены, содержащие скорость, оказываются величинами второго порядка малости и могут быть опущены. Величиной второго порядка является также и член $\mathbf{i}\nabla\mu$ в (58.6). Таким образом, остается

$$\rho\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{i} = 0, \quad \rho T\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{q} - \mu\mathbf{i}) = 0.$$

Подставим сюда для $\mathbf{i}$ и $\mathbf{q}$ выражения (59.11) и (59.12) (без члена с ∇p), а производную $\dfrac{\partial s}{\partial t}$ преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{c,\,p}\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{T,\,p}\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_p}{T}\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,\,c}\frac{\partial c}{\partial t}.$$

Здесь учтено, что согласно (59.8):

$$\left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{p,\,T} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial c\,\partial T} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,\,c}.$$

В результате получим после простого преобразования следующие уравнения:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\Delta c + \frac{k_T}{T}\Delta T\right), \tag{59.14}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k_T}{c_p}\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,\,T}\frac{\partial c}{\partial t} = \chi \Delta T. \tag{59.15}$$

Эта система линейных уравнений определяет распределение температуры и концентрации в жидкости.

В особенности важен случай, когда концентрация смеси мала. При стремлении концентрации к нулю коэффициент диффузии стремится к некоторой конечной постоянной, а коэффициент термодиффузии — к нулю. Поэтому при малых концентрациях k_T мало, и в уравнении (59.14) можно пренебречь членом $k_T \nabla T$. Оно переходит тогда в уравнение диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c. \tag{59.16}$$

Граничные условия для уравнения (59.16) в разных случаях различны. На границе с поверхностью тела, не растворимого в жидкости, должна обращаться в нуль нормальная к поверхности компонента диффузионного потока $\mathbf{i} = -\rho D \nabla c$; другими словами, должно быть $\partial c/\partial n = 0$. Если же речь идет о диффузии от тела, растворяющегося в жидкости, то вблизи его поверхности быстро устанавливается равновесие, при котором концентрация в примыкающей к поверхности тела жидкости равна концентрации насыщенного раствора c_0; диффузия вещества из этого слоя происходит медленнее, чем процесс растворения. Поэтому граничное условие на такой поверхности гласит: $c = c_0$. Наконец, если твердая поверхность «поглощает» попадающее на нее диффундирующее вещество, то граничным условием является равенство $c = 0$ (с таким случаем приходится, например, иметь дело при изучении химических реакций, происходящих на поверхности твердого тела).

Поскольку уравнения чистой диффузии (59.16) и теплопроводности имеют одинаковый вид, то все выведенные в § 51, 52 формулы могут быть непосредственно перенесены на случай

диффузии простой заменой T на c и χ на D. Граничному условию теплоизолированной поверхности соответствует при диффузии условие на нерастворимой твердой поверхности; поверхности же, поддерживаемой при постоянной температуре, соответствует диффузия от поверхности растворяющегося в жидкости тела.

В частности, по аналогии с формулой (51.5) можно написать следующее решение уравнения диффузии:

$$c(\gamma,\, t) = \frac{M}{8\rho(\pi D t)^{3/2}} e^{-r^2/(4Dt)}. \tag{59.17}$$

Оно определяет распределение растворенного вещества в произвольный момент времени, если в начальный момент $t = 0$ все вещество было сконцентрировано в бесконечно малом элементе объема жидкости в начале координат (M — полное количество растворенного вещества).

К сказанному в этом параграфе надо сделать важное замечание. Выражения (59.5) или (59.11), (59.12) представляют собой первые неисчезающие члены разложения потоков по производным от термодинамических величин. Как известно из кинетической теории (см. X, § 5, 6, 14), такое разложение является, с микроскопической точки зрения, разложением (для газов) по степеням l/L отношения длины свободного пробега молекул газа l к характерной пространственной длине L задачи. Учет членов с производными высших порядков означал бы учет величин более высокого порядка по указанному отношению. Следующими после написанных в (59.5) членов, которые можно образовать из производных от скалярных величин μ и T, были бы члены с производными третьего порядка: $\operatorname{grad}\Delta\mu$ и $\operatorname{grad}\Delta T$; эти члены заведомо малы по сравнению с уже учтенными в отношении $(l/L)^2$.

Но выражения для потоков могут содержать в себе также и члены с производными скорости. С помощью производных первого порядка, $\partial v_i/\partial x_k$, можно образовать лишь тензорные величины; это — вязкий тензор напряжений, входящий в состав тензора плотности потока импульса. Величины же векторного характера можно составить из производных второго порядка. Так, в векторе плотности диффузионного потока появятся члены

$$\mathbf{i}' = \rho\lambda_1 \Delta\mathbf{v} + \rho\lambda_2 \nabla \operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{59.18}$$

Требование, чтобы эти члены были малы по сравнению с уже фигурирующими в формулах (59.11), (59.12), приводит к дополнительным условиям применимости последних. Так, для того чтобы имело смысл оставлять в (59.11) член с ∇p и в то же время опускать члены (59.18), должно выполняться условие

$$\frac{D}{p}\frac{p_2 - p_1}{L} \gg \lambda \frac{U}{L^2},$$

где $p_2 - p_1$ — характерный перепад давлений на длине L, а U — характерный перепад скорости (в этой оценке положено $k_p \sim 1$ — см. задачу). Согласно кинетической теории D и λ выражаются через характеристики теплового движения молекул газа. Уже из соображений размерности очевидно, что $\lambda/D \sim l/v_T$, где v_T — средняя тепловая скорость молекул. Учтя также, что давление газа $p \sim \rho v_T^2$, приходим к условию

$$p_2 - p_1 \gg \rho v_T U \frac{l}{L}. \tag{59.19}$$

Это условие отнюдь не выполняется автоматически. Напротив, в важном случае стационарных течений с малыми числами Рейнольдса в диффузионном потоке члены с ∇p и с $\Delta \mathbf{v}$ оказываются одинакового порядка величины (*Ю.М. Каган*, 1962). Действительно, для такого движения градиент давления связан с производными скорости уравнением (20.1)

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nu \Delta \mathbf{v} \tag{59.20}$$

(принимаем, что при движении газа его можно считать несжимаемым). Кинематическая вязкость оценивается как $\nu \sim v_t l$ и потому из этого уравнения находим

$$p_2 - p_1 \sim \frac{\rho\nu U}{L} \sim \rho v_T U \frac{l}{L}$$

— вместо неравенства в (59.19). Поскольку $\Delta \mathbf{v}$ прямо выражается через ∇p согласно (20.1), то необходимость одновременного учета членов с ∇p и $\Delta \mathbf{v}$ означает, что бародиффузионный коэффициент k_p заменяется «эффективным» коэффициентом

$$(k_p)_{\text{эф}} = k_p - \frac{p\lambda_1}{\rho\nu D}. \tag{59.21}$$

Обратим внимание на то, что этот коэффициент оказывается в результате кинетической величиной, а не чисто термодинамической, каковой является согласно (59.10) коэффициент k_p.

З а д а ч а

Определить коэффициент бародиффузии для смеси двух идеальных газов.

Р е ш е н и е. Для удельного объема имеем

$$V = \frac{kT}{p}(n_1 + n_2)$$

(обозначения — см. примеч. на с. 320), а химические потенциалы имеют вид (см. V, § 93)

$$\mu_1 = f_1(p, T) + T \ln \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad \mu_2 = f_2(p, T) + T \ln \frac{n_2}{n_1 + n_2}.$$

Числа n_1, n_2 выражаются через концентрацию газа *1* согласно $n_1 m_1 = c$, $n_2 m_2 = 1 - c$. Вычисление по формуле (59.10) дает

$$k_p = (m_2 - m_1)c(1 - c)\left[\frac{1 - c}{m_2} + \frac{c}{m_1}\right].$$

§ 60. Диффузия взвешенных в жидкости частиц

Под влиянием молекулярного движения в жидкости взвешенные в ней частицы совершают беспорядочное *броуновское движение*. Пусть в начальный момент времени в некоторой точке (начале координат) находится одна такая частица. Ее дальнейшее движение можно рассматривать как диффузию, причем роль концентрации играет вероятность нахождения частицы в том или ином элементе объема жидкости. Соответственно для определения этой вероятности можно воспользоваться решением (59.17) уравнения диффузии. Возможность такого рассмотрения связана с тем, что при диффузии в слабых растворах (т. е. при $c \ll 1$, когда только и применимо уравнение диффузии в форме (59.16)) частицы растворенного вещества практически не взаимодействуют друг с другом, и потому можно рассматривать движение каждой частицы независимо от других.

Пусть $w(r,\, t)\, dr$ есть вероятность нахождения частицы в момент времени t на расстоянии между r и $r+dr$ от исходной точки. Полагая в (59.17) $M/\rho = 1$ и умножая на элемент объема $4\pi r^2\, dr$ шарового слоя, получим

$$w(r,\, t)\, dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) r^2\, dr. \tag{60.1}$$

Определим средний квадрат расстояния, на которое частица удалится от исходной точки в течение времени t:

$$\overline{r^2} = \int\limits_0^\infty r^2 w(r,\, t)\, dr. \tag{60.2}$$

Вычисление с помощью (60.1) дает

$$\overline{r^2} = 6Dt. \tag{60.3}$$

Таким образом, среднее расстояние, проходимое частицей в течение некоторого интервала времени, пропорционально квадратному корню из этого времени.

Коэффициент диффузии взвешенных в жидкости частиц может быть вычислен по их так называемой *подвижности*.

Предположим, что на эти частицы действует некоторая постоянная внешняя сила $\mathbf{f}$ (например, сила тяжести). В стационарном состоянии сила, действующая на каждую частицу, должна уравновешиваться силой сопротивления, испытываемой движущейся частицей со стороны жидкости. При не слишком больших скоростях сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости. Написав ее в виде $\mathbf{v}/b$, где b — постоянная, и приравнивая внешней силе $\mathbf{f}$, получим

$$\mathbf{v} = b\mathbf{f}, \tag{60.4}$$

т. е. скорость, приобретаемая частицей под влиянием внешней силы, пропорциональна этой силе. Постоянная b называется *подвижностью* и может быть, в принципе, вычислена с помощью гидродинамических уравнений. Так, для частиц, имеющих форму шариков (радиуса R), сила сопротивления равна $6\pi\eta Rv$ (см. (20.14)), а потому подвижность

$$b = \frac{1}{6\pi\eta R}. \tag{60.5}$$

Для частиц не шарообразной формы сила сопротивления зависит от направления движения; она может быть написана в виде $a_{ik}v_k$, где a_{ik} — симметрический тензор (см. (20.15)). При вычислении подвижности надо произвести усреднение по всем ориентациям частицы; если a_1, a_2, a_3 — главные значения симметрического тензора a_{ik}, то мы получим

$$b = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right). \tag{60.6}$$

Подвижность b связана с коэффициентом диффузии D простым соотношением. Для его вывода напишем диффузионный поток $\mathbf{i}$, который содержит наряду с обычным членом $-\rho D\nabla c$, связанным с градиентом концентрации (температуру предполагаем постоянной), также и член, связанный со скоростью, приобретаемой частицей под влиянием внешних сил. Этот последний член равен $\rho c\mathbf{v} = \rho cb\mathbf{f}$. Таким образом [1],

$$\mathbf{i} = -\rho D\nabla c + \rho cb\mathbf{f}. \tag{60.7}$$

Перепишем это выражение в виде

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{(\partial\mu/\partial c)_{T,\,p}}\nabla\mu + \rho cb\mathbf{f},$$

где μ — химический потенциал взвешенных частиц (играющих роль растворенного вещества). Зависимость этого потенциала от концентрации (в слабом растворе) дается выражением

$$\mu = T\ln c + \psi(p,\,T)$$

(см. V, § 87), так что

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho Dc}{T}\nabla\mu + \rho cb\mathbf{f}.$$

В состоянии термодинамического равновесия диффузия отсутствует и поток $\mathbf{i}$ должен обращаться в нуль. С другой стороны, при наличии внешнего поля условие равновесия требует постоянства вдоль раствора суммы $\mu+U$, где U — потенциальная энергия взвешенной частицы в этом поле. Тогда $\nabla\mu = -\nabla U = -\mathbf{f}$ и из равенства $\mathbf{i} = 0$ получим

$$D = Tb. \tag{60.8}$$

[1]) Здесь c может быть определено как число взвешенных частиц в единице массы жидкости, а $\mathbf{i}$ — как плотность потока числа этих частиц.

Это и есть искомое соотношение между коэффициентом диффузии и подвижностью (*соотношение Эйнштейна*).

Подставляя (60.5) в (60.8), найдем следующее выражение для коэффициента диффузии шарообразных частиц:

$$D = \frac{T}{6\pi\eta R}. \tag{60.9}$$

Наряду с поступательным броуновским движением и поступательной диффузией взвешенных частиц можно рассмотреть их вращательное броуновское движение и диффузию. Аналогично тому как коэффициент поступательной диффузии вычисляется через силу сопротивления, так и коэффициент вращательной диффузии может быть выражен через момент сил, действующих на вращающуюся в жидкости частицу.

Задачи

1. Частицы совершают броуновское движение в жидкости, ограниченной с одной стороны плоской стенкой; при попадании на стенку частицы «прилипают» к ней. Определить вероятность того, что частица, находящаяся в начальный момент времени на расстоянии x_0 от стенки, прилипнет к ней в течение времени t.

Решение. Распределение вероятностей $w(x, t)$ (x — расстояние от стенки) определяется диффузионным уравнением с граничным условием $w = 0$ при $x = 0$ и начальным условием $w = \delta(x - x_0)$ при $t = 0$. Такое решение определяется формулой (52.4), в которой надо теперь писать w вместо T, D вместо χ и положить под знаком интеграла $w_0(x') = \delta(x' - x_0)$. Тогда получим

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left\{\exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}\right] - \exp\left[-\frac{(x + x_0)^2}{4Dt}\right]\right\}.$$

Вероятность прилипания к стенке в единицу времени определяется значением диффузионного потока $D\dfrac{\partial w}{\partial x}$ при $x = 0$; искомая же вероятность $W(t)$ прилипания в течение времени t равна

$$W(t) = D\int_0^t \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} dt.$$

Подставляя w, получим

$$W(t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x_0}{2\sqrt{Dt}}\right).$$

2. Определить порядок величины времени τ, в течение которого взвешенная в жидкости частица поворачивается вокруг своей оси на большой угол.

Решение. Искомое время τ определится как время, в течение которого частица при броуновском движении сместится на расстояние порядка величины своих линейных размеров a. Согласно (60.3) имеем: $\tau \sim a^2 D$, а согласно (60.9) $D \sim T/(\eta a)$. Таким образом,

$$\tau \sim \frac{\eta a^3}{T}.$$

ГЛАВА VII

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 61. Формула Лапласа

В этой главе мы изучим явления, происходящие вблизи поверхности раздела между двумя сплошными средами (в действительности, конечно, соприкасающиеся тела разделены узким переходным слоем, который вследствие его весьма малой толщины можно рассматривать как поверхность).

Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи нее давления в обеих средах различны. Для определения этой разности давлений (называемой *поверхностным давлением*) напишем условие термодинамического равновесия обоих тел друг с другом с учетом свойств поверхности их раздела.

Пусть поверхность раздела подвергается бесконечно малому смещению. В каждой точке несмещенной поверхности проведем нормаль к ней. Отрезок нормали, заключенный между ее пересечениями с несмещенной и смещенной поверхностями, обозначим через $\delta\zeta$. Тогда объем каждого элемента пространства, заключенного между поверхностями, есть $\delta\zeta df$, где df — элемент поверхности. Пусть p_1 и p_2 — давления в первой и второй средах и будем считать $\delta\zeta$ положительным, если смещение поверхности раздела производится, скажем, в сторону второй среды. Тогда работа, которую надо произвести для описанного изменения объема, равна

$$\int(-p_1+p_2)\delta\zeta\, df.$$

Полная работа δR смещения поверхности получится путем прибавления сюда еще работы, связанной с изменением площади самой этой поверхности. Эта часть работы пропорциональна, как известно, изменению δf площади поверхности и равна $\alpha\delta f$, где α — поверхностное натяжение. Таким образом, полная работа равна

$$\delta R = -\int(p_1-p_2)\delta\zeta\, df + \alpha\,\delta f. \tag{61.1}$$

Условие термодинамического равновесия определяется, как известно, обращением δR в нуль.

Пусть далее R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны в данной точке поверхности; мы будем считать R_1 и R_2 положительными, если они направлены внутрь первой среды. Тогда элементы

длины dl_1 и dl_2 на поверхности, проведенные в плоскостях ее главных сечений, получают при бесконечно малом смещении поверхности приращения, равные соответственно $\frac{\delta\zeta}{R_1}dl_1$ и $\frac{\delta\zeta}{R_2}dl_2$ (dl_1 и dl_2 надо рассматривать как элементы дуги окружностей с радиусами R_1 и R_2). Поэтому элемент поверхности $df = dl_1\, dl_2$ будет равен после смещения

$$dl_1\Big(1 + \frac{\delta\zeta}{R_1}\Big)\, dl_2\Big(1 + \frac{\delta\zeta}{R_2}\Big) \approx dl_1\, dl_2\Big(1 + \frac{\delta\zeta}{R_1} + \frac{\delta\zeta}{R_2}\Big),$$

т. е. изменится на величину

$$\delta\zeta\, df\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big).$$

Отсюда видно, что полное изменение площади поверхности раздела есть

$$\delta f = \int \delta\zeta\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big)\, df. \tag{61.2}$$

Подставляя полученные выражения в (61.1) и приравнивая нулю, получим условие равновесия в виде

$$\int \delta\zeta\Big\{(p_1 - p_2) - \alpha\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big)\Big\}\, df = 0.$$

Это условие должно выполняться при произвольном бесконечно малом смещении поверхности, т. е. при произвольном $\delta\zeta$. Поэтому необходимо, чтобы стоящее под интегралом в скобках выражение тождественно обращалось в нуль, т. е.

$$p_1 - p_2 = \alpha\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big). \tag{61.3}$$

Это и есть формула (*формула Лапласа*), определяющая поверхностное давление [1]. Мы видим, что если R_1 и R_2 положительны, то $p_1 > p_2$. Это значит, что из двух тел давление больше в том, поверхность которого выпукла. Если $R_1 = R_2 = \infty$, т. е. поверхность раздела плоская, то давления в обоих телах, как и должно было быть, одинаковы.

Применим формулу (61.3) для исследования механического равновесия соприкасающихся тел. Предположим, что ни на поверхность раздела, ни на сами тела не действуют никакие внешние силы. Тогда вдоль каждого из тел давление постоянно. Имея в виду формулу (61.3), мы можем поэтому написать условие равновесия в виде

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const}. \tag{61.4}$$

[1] Изложенный вывод отличается от данного в V, § 156, по существу, лишь тем, что здесь рассматривается поверхность раздела произвольной формы, а не только сферической.

Таким образом, сумма обратных радиусов кривизны должна быть постоянной вдоль всей свободной поверхности раздела. Если вся поверхность свободна, то условие (60.4) означает, что поверхность должна иметь шарообразную форму (например, поверхность маленькой капли, влиянием силы тяжести на которую можно пренебречь). Если же поверхность закреплена вдоль какой-нибудь линии (например, у жидкой пленки на твердой рамке), то ее форма является более сложной.

В применении к равновесию тонких пленок жидкости, закрепленных на твердой рамке, в условии (61.4) справа должен стоять нуль. Действительно, сумма $1/R_1 + 1/R_2$ должна быть одинаковой вдоль всей свободной поверхности пленки и в то же время на двух своих сторонах она должна иметь противоположный знак, поскольку если одна сторона выпукла, то другая вогнута с теми же радиусами кривизны, которые, однако, должны считаться теперь отрицательными. Отсюда следует, что условие равновесия тонкой пленки есть

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \tag{61.5}$$

Рассмотрим теперь условие равновесия на поверхности тела, находящегося в поле тяжести. Предположим для простоты, что второй средой является просто атмосфера, давление которой на протяжении размеров тела можно считать постоянным. В качестве самого тела рассмотрим несжимаемую жидкость. Тогда имеем $p_2 = \text{const}$, а давление p_1 в жидкости равно согласно (3.2) $p_1 = \text{const} - \rho g z$ (координата z отсчитывается вертикально вверх). Таким образом, условие равновесия приобретает вид

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{g\rho}{\alpha} z = \text{const}. \tag{61.6}$$

Надо, впрочем, отметить, что для определения равновесной формы поверхности жидкости в конкретных случаях обычно бывает удобным пользоваться условием равновесия не в виде (61.6), а непосредственно решая вариационную задачу о минимуме полной свободной энергии. Внутренняя свободная энергия жидкости зависит только от объема, но не от формы поверхности. От формы зависит, во-первых, поверхностная свободная энергия

$$\int \alpha\, df$$

и, во-вторых, энергия во внешнем поле (поле тяжести), равная

$$g\rho \int z\, dV.$$

Таким образом, условие равновесия можно написать в виде

$$\alpha \int df + g\rho \int z\, dV = \min. \tag{61.7}$$

Определение минимума должно производиться при дополнительном условии

$$\int dV = \text{const}, \tag{61.8}$$

выражающем неизменность полного объема жидкости.

Постоянные α, ρ, g входят в условия равновесия (61.6), (61.7) только в виде отношения $\dfrac{\alpha}{g\rho}$. Это отношение имеет размерность квадрата длины. Длину

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha}{g\rho}} \tag{61.9}$$

называют *капиллярной постоянной* [1]. Форма поверхности жидкости определяется только этой величиной. Если капиллярная постоянная велика (по сравнению с размерами тела), то при определении формы поверхности можно пренебречь полем тяжести.

Для того чтобы определить из условия (61.4) или (61.6) форму поверхности, надо иметь формулы, определяющие радиусы кривизны по форме поверхности. Эти формулы известны из дифференциальной геометрии, но имеют в общем случае довольно сложный вид. Они значительно упрощаются в том случае, когда форма поверхности лишь слабо отклоняется от плоской. Мы выведем здесь соответствующую приближенную формулу непосредственно, не пользуясь общей формулой дифференциальной геометрии.

Пусть $z = \zeta(x, y)$ — уравнение поверхности; мы предполагаем, что ζ везде мало, т. е. что поверхность слабо отклоняется от плоскости $z = 0$. Как известно, площадь f поверхности определяется интегралом

$$f = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

или приближенно при малых ζ

$$f = \int \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy. \tag{61.10}$$

Определим вариацию δf:

$$\delta f = \int \left\{ \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} \right\} dx\, dy.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\delta f = -\int \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) \delta\zeta\, dx\, dy.$$

---

[1]) Так, для воды $a = 0{,}39$ см (при 20 °C).

Сравнив это выражение с (61.2), получаем

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right). \tag{61.11}$$

Это и есть искомая формула, определяющая сумму обратных радиусов кривизны слабо изогнутой поверхности.

При равновесии трех соприкасающихся друг с другом фаз их поверхности раздела устанавливаются таким образом, чтобы была равна нулю равнодействующая трех сил поверхностного натяжения, действующих на общую линию соприкосновения трех сред. Это условие приводит к тому, что поверхности раздела должны пересекаться друг с другом под углами (так называемые краевые углы), определяющимися значениями поверхностного натяжения.

Наконец, остановимся на вопросе о граничных условиях, которые должны соблюдаться на границе двух движущихся жидкостей при учете сил поверхностного натяжения. Если поверхностное натяжение не учитывается, то на границе двух жидкостей имеем

$$n_k\left(\sigma_{ik}^{(2)}-\sigma_{ik}^{(1)}\right)=0,$$

что выражает равенство сил трения, действующих на поверхности обеих жидкостей. При учете поверхностного натяжения надо написать в правой части этого условия дополнительную силу, определяемую по величине формулой Лапласа и направленную по нормали к поверхности:

$$n_k\sigma_{ik}^{(2)}-n_k\sigma_{ik}^{(1)}=\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)n_i. \tag{61.12}$$

Иначе можно написать это уравнение в виде

$$\left(p_1-p_2\right)n_i=\left(\sigma_{ik}^{\prime(1)}-\sigma_{ik}^{\prime(2)}\right)n_k+\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)n_i. \tag{61.13}$$

Если обе жидкости можно считать идеальными, то вязкие напряжения σ'_{ik} исчезают, и мы получаем вновь простое уравнение (61.3).

Условие (61.13), однако, еще не является наиболее общим. Дело в том, что коэффициент поверхностного натяжения α может оказаться не постоянным вдоль поверхности (например, в результате непостоянства температуры). Тогда наряду с нормальной силой (исчезающей в случае плоской поверхности) появляется некоторая дополнительная сила, направленная тангенциально к поверхности. Аналогично тому как при неравномерном давлении появляется объемная сила, равная (на единицу объема) $-\nabla p$, здесь тангенциальная сила, действующая на единицу площади поверхности раздела, $\mathbf{f}_t=\operatorname{grad}\alpha$. Мы пишем здесь градиент со знаком плюс перед ним, а не со знаком минус, как в

силе $-\nabla p$, в связи с тем, что силы поверхностного натяжения стремятся уменьшить площадь поверхности, между тем как силы давления стремятся увеличить объем тела. Прибавляя эту силу к правой части равенства (61.13), получим граничное условие

$$\left[p_1 - p_2 - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] n_i = \left(\sigma_{ik}^{\prime(1)} - \sigma_{ik}^{\prime(2)}\right) n_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \qquad (61.14)$$

(единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ направлен внутрь первой жидкости). Отметим, что это условие может быть выполнено только у вязкой жидкости. Действительно, у идеальной жидкости $\sigma'_{ik} = 0$; тогда левая часть равенства (61.14) будет представлять собой вектор, направленный по нормали, а правая — вектор, направленный по касательной к поверхности. Но такое равенство невозможно (за исключением, разумеется, тривиального случая, когда эти величины равны нулю каждая в отдельности).

Задачи

1. Определить форму жидкой пленки, края которой закреплены на двух рамках, имеющих форму окружностей, центры которых лежат на общей прямой, перпендикулярной к их плоскостям (разрез пленки изображен на рис. 41).

Решение. Задача сводится к отысканию поверхности минимальной площади, образованной вращением вокруг прямой $r = 0$ кривой $z = z(r)$, имеющей концы в двух заданных точках A и B. Площадь поверхности вращения есть

$$f = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} F(r, r')\, dz, \qquad F = r\left(1 + r'^2\right)^{1/2},$$

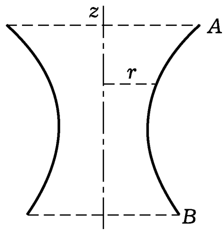


Рис. 41

где $r' \equiv dr/dz$. Первый интеграл уравнения Эйлера задачи о минимуме такого интеграла (с выражением F, не содержащим z) есть

$$F - r' \frac{\partial F}{\partial r'} = \text{const}.$$

В данном случае это дает

$$r = c_1 (1 + r'^2)^{1/2},$$

откуда находим после интегрирования

$$r = c_1 \operatorname{ch} \frac{z - c_2}{c_1};$$

таким образом, искомая поверхность является поверхностью, образованной вращением цепной линии (так называемый катеноид). Постоянные c_1 и c_2 должны быть определены так, чтобы кривая $r(z)$ проходила через заданные точки A и B. При этом c_2 зависит просто от выбора начала координат на оси z. Для постоянной же c_1 получаются два значения, из которых должно быть выбрано большее (меньшее не соответствует минимуму интеграла).

При увеличении расстояния h между рамками при некотором определенном его значении наступает момент, когда уравнение, определяющее по-

стоянную c_1, перестает иметь вещественные корни. При бо́льших расстояниях устойчивой является только форма, соответствующая двум пленкам, натянутым на каждую из двух рамок. Так, для двух рамок одинакового радиуса R катеноидная форма становится невозможной при расстоянии h между рамками, равном $h = 1{,}33\,R$.

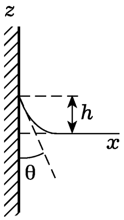


Рис. 42

2. Определить форму поверхности жидкости, находящейся в поле тяжести и соприкасающейся с одной стороны с вертикальной плоской стенкой. Краевой угол, образуемый жидкостью при соприкосновении с веществом стенки, равен θ (рис. 42).

Р е ш е н и е. Выбираем оси координат указанным на рис. 42 образом. Плоскость $x = 0$ есть плоскость стенки, а $z = 0$ есть плоскость поверхности жидкости вдали от стенки. Радиусы кривизны поверхности $z = z(x)$:

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = -\frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z'},$$

так что уравнение (61.6) приобретает вид

$$\frac{2z}{a^2} - \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} = \text{const} \tag{1}$$

(a — капиллярная постоянная). При $x = \infty$ должно быть $z = 0$, $1/R_2 = 0$; поэтому $\text{const} = 0$. Первый интеграл получающегося уравнения есть

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = A - \frac{z^2}{a^2}. \tag{2}$$

Из условия на бесконечности ($z = 0$, $z' = 0$ при $x = \infty$) имеем $A = 1$. Второе интегрирование дает

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{Arch}\frac{a\sqrt{2}}{z} + a\sqrt{2 - \frac{z^2}{a^2}} + x_0.$$

Постоянная x_0 должна быть определена так, чтобы на поверхности стенки ($x = 0$) было $z' = -\operatorname{ctg}\theta$ или согласно (2) $z = h$, где $h = a\sqrt{1-\sin\theta}$ есть высота поднятия жидкости у самой стенки.

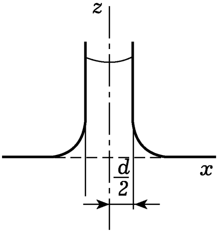


Рис. 43

3. Определить форму поверхности жидкости, поднявшейся между двумя вертикальными параллельными плоскими пластинками (рис. 43).

Р е ш е н и е. Выбираем плоскость yz посередине между обеими пластинками, а плоскость xy — совпадающей с поверхностью жидкости вне пространства между пластинками, вдали от них. В уравнении (1) задачи 2, выражающем условие равновесия и потому справедливом вдоль всей поверхноси жидкости (как между, так и вне пластинок), условия при $x = \infty$ дают опять $\text{const} = 0$. В интеграле же (2) уравнения (1) постоянная A различна для $|x| > d/2$ и $|x| < d/2$ (при $|x| = d/2$ функция $z(x)$ имеет разрыв). Для пространства между пластинками имеем следующие условия: при $x = 0$ должно быть $z' = 0$, а при $x = d/2$ $z' = \operatorname{ctg}\theta$, где θ — краевой угол. Согласно (2) имеем для высот $z_0 = z(0)$ и $z_1 = z(d/2)$:

$$z_0 = a\sqrt{A-1}\,, \quad z_1 = a\sqrt{A-\sin\theta}.$$

Интегрируя (2), получаем

$$x = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\left(A - z^2/a^2\right)dz}{\sqrt{1-\left(A - z^2/a^2\right)^2}} = \frac{a}{2} \int\limits_{0}^{a\sqrt{A-\cos\xi}} \frac{\cos\theta\, d\xi}{\sqrt{A-\cos\xi}},$$

где ξ новая переменная, связанная с z соотношением $z = a\sqrt{A-\cos\xi}$. Этот интеграл — эллиптический и не может быть выражен в элементарных функциях. Постоянная A определяется из условия $z = z_1$ при $x = d/2$, откуда

$$d = a \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-\theta} \frac{\cos\theta\, d\xi}{\sqrt{A-\cos\xi}}.$$

Полученные формулы определяют форму поверхности жидкости в пространстве между пластинками. При $d \to 0$ A стремится к бесконечности. Поэтому при $d \ll a$ имеем

$$d \approx \frac{a}{\sqrt{A}} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-\theta} \cos\theta\, d\xi = \frac{a}{\sqrt{A}} \cos\theta,$$

откуда $A = (a/d)^2 \cos^2\theta$. Высота поднятия жидкости

$$z_0 \approx z_1 \approx \frac{a^2}{d}\cos\theta;$$

эта формула может быть получена, разумеется, и элементарным путем.

4. На плоскости горизонтальной твердой поверхности находится (в поле тяжести) тонкий неравномерно нагретый слой жидкости; ее температура является заданной функцией координаты x вдоль слоя, причем (благодаря тонкости пленки) ее можно считать не зависящей от координаты z вдоль толщины слоя. Неравномерная нагретость приводит к возникновению стационарного движения жидкости в пленке, в результате чего ее толщина ζ будет меняться вдоль слоя; требуется определить функцию $\zeta = \zeta(x)$.

Решение. Вместе с температурой заданными функциями x являются также плотность ρ жидкости и поверхностное натяжение α. Давление в жидкости $p = p_0 + \rho g(\zeta - z)$, где p_0 — атмосферное давление (давление на свободной поверхности слоя); изменением давления благодаря искривлению поверхности можно пренебречь. Скорость жидкости в тонком слое можно считать направленной везде вдоль оси x. Уравнение движения гласит:

$$\eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = g\left[\frac{d(\rho\zeta)}{dx} - z\frac{d\rho}{dx}\right]. \qquad (1)$$

На твердой поверхности ($z = 0$) имеем $v = 0$, а на свободной поверхности ($z = \zeta$) должно выполняться граничное условие (61.14), которое в данном случае дает

$$\eta\frac{dv}{dz}\Big|_{z=\zeta} = \frac{d\alpha}{dx}.$$

Интегрируя уравнение (1) с этими условиями, получим

$$\eta v = gz\left(\zeta - \frac{z}{2}\right)\frac{d(\rho\zeta)}{dx} - \frac{gz}{6}(3\zeta^2 - z^2)\frac{d\rho}{dx} - z\frac{d\alpha}{dx}. \qquad (2)$$

Ввиду стационарности движения полный поток жидкости через поперечное сечение слоя должен быть равен нулю: $\int\limits_0^\zeta v\,dz = 0$. Подставляя сюда (2), получим следующее уравнение:

$$\frac{\rho}{3}\frac{d\zeta^2}{dx} + \frac{1}{4}\frac{d\rho}{dx}\zeta^2 = \frac{1}{g}\frac{d\alpha}{dx},$$

определяющее функцию $\zeta(x)$. Интегрируя его, получим

$$g\zeta^2 = 3\rho^{-3/4}\left(\int \rho^{-1/4}\,d\alpha + \text{const}\right). \tag{3}$$

Если температура (а с ней и ρ и α) лишь мало меняется вдоль слоя жидкости, то можно написать (3) в виде

$$\zeta^2 = \zeta_0^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{3/4} + \frac{3}{\rho g}(\alpha - \alpha_0),$$

где ζ_0 — значение ζ в точке, где $\rho = \rho_0$, а $\alpha = \alpha_0$.

§ 62. Капиллярные волны

Поверхность жидкости стремится принять свою равновесную форму как под влиянием действующего на жидкость поля тяжести, так и под влиянием сил поверхностного натяжения. Между тем при изучении в § 12 волн на поверхности жидкости мы не учитывали этого последнего фактора. Мы увидим ниже, что влияние капиллярности на гравитационные волны существенно при малых длинах волн.

Как и в § 12, будем предполагать амплитуду колебаний малой по сравнению с длиной волны. Для потенциала скорости имеем по-прежнему уравнение

$$\Delta\varphi = 0.$$

Условие же на поверхности жидкости будет теперь иным: разность давлений с обеих сторон этой поверхности должна быть равной не нулю, как это предполагалось в § 12, а должна определяться формулой Лапласа (61.3).

Обозначим z-координату точек поверхности жидкости через ζ. Поскольку ζ мало, то можно воспользоваться выражением (61.11) и написать формулу Лапласа в виде

$$p - p_0 = -\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

Здесь p есть давление в жидкости вблизи поверхности, p_0 — постоянное внешнее давление. Для p подставляем согласно (12.2)

$$p = -\rho g\zeta - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

и находим

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0$$

(по тем же причинам, как и в § 12, можно, определяя соответствующим образом φ, опустить постоянную p_0). Продифференцировав это соотношение по t и заменив в нем $\partial\zeta/\partial t$ на $\partial\varphi/\partial z$, получим граничное условие для потенциала φ в виде

$$\left[\rho g\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right]_{z=0}=0. \qquad (62.1)$$

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x. Как и в § 12, получаем решение в виде

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx-\omega t).$$

Связь между k и ω определяется теперь из предельного условия (62.1) и имеет вид

$$\omega^2 = gk+\frac{\alpha}{\rho}k^3 \qquad (62.2)$$

(*W. Thomson*, 1871).

Мы видим, что при больших длинах волн, удовлетворяющих условию $k \ll (g\rho/\alpha)^{1/2}$ или

$$k \ll 1/a$$

(a — капиллярная постоянная), влиянием капиллярности можно пренебречь, и волна является чисто гравитационной. В обратном случае коротких волн можно пренебречь влиянием поля тяжести. Тогда

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho}k^3. \qquad (62.3)$$

Такие волны называются *капиллярными*, в промежуточном случае говорят о *капиллярно-гравитационных волнах*.

Определим еще собственные колебания сферической капли несжимаемой жидкости, совершаемые ею под влиянием капиллярных сил. При колебаниях происходит отклонение формы поверхности капли от сферической. Амплитуду колебаний будем, как обычно, предполагать малой.

Начнем с определения суммы $1/R_1+1/R_2$ для поверхности, слабо отклоняющейся от сферической. Поступим для этого аналогично тому, что мы делали при выводе формулы (61.11) Площадь поверхности, описываемой в сферических координатах [1]) r, θ, φ функцией $r=r(\theta,\varphi)$, равна, как известно, интегралу

$$f=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2}\,r\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \qquad (62.4)$$

[1]) Ниже в этом параграфе φ обозначает азимут сферических координат, а потенциал скорости мы будем обозначать буквой ψ.

Шаровая поверхность описывается уравнением $r = \text{const} \equiv R$ (R — радиус шара), а близкая к ней поверхность — уравнением $r = R+\zeta$ с малым ζ. Подставляя это в (62.4), имеем приближенно

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{ (R+\zeta)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right)^2 \right] \right\} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Определим изменение δf поверхности при варьировании ζ:

$$\delta f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{ 2(R+\zeta)\delta\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\varphi} \right\} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Интегрируя второй член по частям по углу θ, а третий член — по φ, получаем

$$\delta f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{ 2(R+\zeta) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2} \right\} \delta\zeta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Если разделить выражение в фигурных скобках на $R(R+2\zeta)$, то выражение, которое будет стоять под знаком интеграла в качестве множителя при

$$\delta\zeta\, df \approx \delta\zeta\, R(R+2\zeta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

будет согласно формуле (61.2) представлять собой как раз искомую сумму обратных радиусов кривизны, вычисленную с точностью до членов первого порядка по ζ. Таким образом, получим

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2}\left\{ \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) \right\}. \quad (62.5)$$

Первый член соответствует чисто сферической поверхности, для которой $R_1 = R_2 = R$.

Потенциал скорости ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$ с граничным условием при $r = R$, имеющим вид (аналогично тому, что мы имели для плоской поверхности)

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\left\{ \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2} \right] \right\} + p_0 = 0.$$

Постоянную $2\alpha/R + p_0$ в этом условии снова можно опустить; дифференцируя по времени и подставляя

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = v_r = \frac{\partial\psi}{\partial r},$$

находим окончательно граничное условие для ψ в виде

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\bigg|_{r=R} - \frac{\alpha}{R^2}\left\{2\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right]\right\}_{r=R} = 0. \tag{62.6}$$

Будем искать решение в виде стоячей волны

$$\psi = e^{-i\omega t}f(r,\,\theta,\,\varphi),$$

где функция f удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f = 0$. Как известно, всякое решение уравнения Лапласа может быть представлено в виде линейной комбинации так называемых объемных шаровых функций вида

$$r^l Y_{lm}(\theta,\,\varphi),$$

где $Y_{lm}(\theta,\,\varphi)$ — шаровые функции Лапласа, равные

$$Y_{lm}(\theta,\,\varphi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}.$$

Здесь

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta\frac{d^m P_l(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$$

— присоединенная функция Лежандра ($P_l(\cos\theta)$ — полином Лежандра l-го порядка). Как известно, l пробегает все целые положительные значения, включая нуль, а m пробегает при заданном l значения $m = 0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots,\,\pm l$.

Соответственно этому ищем частное решение поставленной задачи в виде

$$\psi = Ae^{-i\omega t}r^l P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}. \tag{62.7}$$

Частота ω определяется так, чтобы удовлетворить предельному условию (62.6). Подставляя в это уравнение выражение (62.7) и воспользовавшись тем, что шаровые функции Y_{lm} удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0,$$

находим (сокращая общий множитель ψ):

$$\rho\omega^2 + \frac{l\alpha}{R^3}\{2 - l(l+1)\} = 0,$$

откуда

$$\omega^2\frac{\alpha}{\rho R^3}l(l-1)(l+2) \tag{62.8}$$

(*Rayleigh*, 1879).

Эта формула определяет частоты собственных капиллярных колебаний сферической капли. Мы видим, что они зависят только от числа l, но не от m. Между тем данному l соответствует

$2l+1$ различных функций (62.7). Таким образом, каждая из частот (62.8) соответствует $2l+1$ различным собственным колебаниям. О независимых собственных колебаниях, имеющих одинаковые частоты, говорят как о вырожденных; в данном случае имеет место $2l+1$-кратное вырождение.

Выражение (62.8)обращается в нуль при $l=0$ и при $l=1$. Значение $l=0$ соответствовало бы радиальным колебаниям, т. е. сферически симметричным пульсациям капли; в несжимаемой жидкости такие колебания, очевидно, невозможны. При $l=1$ движение представляло бы собой поступательное перемещение капли как целого. Наименьшая возможная частота колебаний капли соответствует $l=2$ и равна

$$\omega_{\min}^2 = \frac{8\alpha}{\rho R^3}. \tag{62.9}$$

З а д а ч и

1. Определить зависимость частоты от волнового вектора для капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости, глубина которой равна h.

Р е ш е н и е. Подставляя в условие (62.1)

$$\varphi = A\cos(kx-\omega t)\operatorname{ch}k(z+h)$$

(см. задачу 1 § 12), получаем

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha k^3}{\rho}\right)\operatorname{th}kh.$$

При $kh \gg 1$ мы возвращаемся к формуле (62.2), а для длинных волн ($kh \ll 1$) имеем

$$\omega^2 = ghk + \frac{\alpha h k^4}{\rho}.$$

2. Определить коэффициент затухания капиллярных волн.

Р е ш е н и е. Подставляя (62.3) в (25.5), получим

$$\gamma = \frac{2\eta k^2}{\rho} = \frac{2\eta\omega^{4/3}}{\rho^{1/3}\alpha^{2/3}}.$$

3. Найти условие устойчивости тангенциального разрыва в поле тяжести с учетом поверхностного натяжения; жидкости по обе стороны поверхности разрыва предполагаются различными (*Kelvin*, 1871).

Р е ш е н и е. Пусть U — скорость верхнего слоя жидкости относительно нижнего. Накладываем на основное движение периодическое вдоль горизонтальной оси возмущение и ищем потенциал скорости в виде:

в нижней жидкости

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx-\omega t)$$

и в верхней

$$\varphi' = A'e^{-kz}\cos(kx-\omega t) + Ux.$$

Для нижней жидкости имеем на поверхности разрыва

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

(ζ — вертикальная координата поверхности раздела), а в верхней

$$v'_z = \frac{\partial\varphi'}{\partial z} = U\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

Условие равенства давлений в обеих жидкостях на поверхности разрыва имеет вид

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho g\zeta - \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = \rho'\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \rho' g\zeta + \frac{\rho'}{2}\left(v'^2 - U^2\right)$$

(при раскрытии выражения $v'^2 - U^2$ должны быть сохранены только члены первого порядка по A'). Смещение ζ ищем в виде $\zeta = a\sin(kx - \omega t)$. Подставляя φ, φ', ζ в написанные три условия при $z = 0$, получаем три уравнения, исключая из которых a, A, A', находим

$$\omega = k\frac{\rho' U}{\rho+\rho'} \pm \left[\frac{kg(\rho-\rho')}{\rho+\rho'} - \frac{k^2\rho\rho' U^2}{(\rho+\rho')^2} + \frac{\alpha k^3}{\rho+\rho'}\right]^{1/2}.$$

Для того чтобы это выражение было вещественным при всех k, необходимо выполнение условия

$$U^4 \leqslant \frac{4\alpha g(\rho-\rho')(\rho+\rho')^2}{\rho^2\rho'^2}.$$

В противном случае существуют комплексные ω с положительной мнимой частью и движение неустойчиво.

§ 63. Влияние адсорбированных пленок на движение жидкости

Наличие на поверхности жидкости пленки адсорбированного ею вещества может существенно изменить гидродинамические свойства свободной поверхности жидкости. Дело в том, что при изменении формы поверхности, сопровождающем движение жидкости, происходит растяжение или сжатие пленки, т. е. изменение поверхностной концентрации адсорбированного вещества. Эти изменения приводят к появлению дополнительных сил, которые и должны быть учтены в граничных условиях, имеющих место на свободной поверхности жидкости.

Мы ограничимся здесь рассмотрением адсорбированных пленок веществ, которые можно считать нерастворимыми в самой жидкости. Это значит, что вещество находится только у поверхности и не проникает в глубь жидкости. Если же поверхностно-активное вещество обладает также и некоторой заметной растворимостью, то необходимо было бы принять во внимание процессы диффузии этого вещества между поверхностной пленкой и объемом жидкости, возникающие при изменении концентрации пленки.

При наличии адсорбированного вещества коэффициент поверхностного натяжения α является функцией поверхностной концентрации этого вещества (количество вещества на единице площади поверхности), которую мы обозначим буквой γ. Если γ

меняется вдоль поверхности, то вместе с ней функцией координат точки поверхности является также и коэффициент α. В связи с этим в граничном условии на поверхности жидкости добавляется тангенциальная сила, о которой уже шла речь в конце § 61 (условие (61.14)). В данном случае градиент α выражается через градиент поверхностной концентрации, так что действующая на поверхность тангенциальная сила равна

$$\mathbf{f}_t = \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}\nabla\gamma. \tag{63.1}$$

В § 61 уже было указано, что граничное условие (61.14) с учетом этой силы может быть выполнено только у вязкой жидкости. Отсюда следует, что в тех случаях, когда вязкость жидкости мала и несущественна для рассматриваемого явления, нет необходимости также и в учете наличия пленки.

Для определения движения жидкости, покрытой пленкой, надо добавить к уравнениям движения жидкости с граничным условием (61.14) еще одно уравнение соответственно тому, что мы имеем теперь на одну неизвестную величину (поверхностная концентрация γ) больше. Этим дополнительным уравнением является уравнение непрерывности, выражающее собой неизменность общего количества адсорбированного вещества в пленке. Конкретный вид этого уравнения зависит от формы поверхности. Если поверхность плоская, то уравнение имеет, очевидно, вид

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y\gamma) = 0, \tag{63.2}$$

где все величины берутся на поверхности жидкости (плоскость xy выбрана в плоскости этой поверхности).

Решение задач о движении жидкости, покрытой адсорбционной пленкой, существенно упрощается в тех случаях, когда пленку можно считать несжимаемой, т. е. можно считать, что площадь каждого элемента поверхности пленки остается при движении постоянной.

Примером того, насколько существенным в гидродинамическом отношении может оказаться наличие адсорбционной пленки, является движение пузырька газа в вязкой жидкости. Если на поверхности пузырька никакой пленки нет, то наполняющий его газ тоже приходит в движение, и сила сопротивления, испытываемая пузырьком со стороны жидкости, оказывается отличной от той, которую испытывал бы твердый шарик того же радиуса (см. задачу 2 § 20). Если же пузырек покрыт пленкой адсорбированного вещества, то прежде всего непосредственно из соображений симметрии ясно, что пленка остается при движении пузырька неподвижной. Действительно, движение в ней могло бы совершаться только по поверхности пузырька вдоль

меридианов; в результате происходило бы непрерывное накапливание вещества пленки у одного из полюсов пузырька (внутрь газа или жидкости адсорбированное вещество не проникает), что невозможно. Вместе со скоростью пленки должна быть равной нулю и скорость газа на поверхности пузырька, а при таких граничных условиях останется неподвижным вообще весь газ внутри пузырька. Таким образом, покрытый пленкой пузырек будет двигаться как твердый шарик и, в частности, испытываемая им сила сопротивления (при малых числах Рейнольдса) будет определяться формулой Стокса.

Задачи

1. Два сосуда соединены глубоким длинным каналом с плоско-параллельными стенками (ширина канала a, длина l). Поверхность жидкости в сосудах и в канале покрыта адсорбированной пленкой, причем поверхностные концентрации γ_1 и γ_2 пленки в обоих сосудах различны, в результате чего вблизи поверхности жидкости в канале возникает движение. Определить количество переносимого при этом движении вещества пленки.

Решение. Выбираем плоскость одной из стенок канала в качестве плоскости xz, а поверхность жидкости — в качестве плоскости xy, так, что ось x направлена вдоль длины канала; области жидкости соответствуют $z < 0$. Градиент давления отсутствует, так что уравнение стационарного движения жидкости (ср. § 17) есть

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

где v есть скорость жидкости, направленная, очевидно, по оси x. Вдоль длины канала имеется градиент концентрации $\dfrac{d\gamma}{dx}$. На поверхности жидкости в канале имеет место граничное условие

$$\eta\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{d\alpha}{dx} \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{2}$$

На стенках канала жидкость должна быть неподвижна, т. е.

$$v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\, a. \tag{3}$$

Глубину канала считаем бесконечной, и потому

$$v = 0 \quad \text{при} \quad z \to -\infty. \tag{4}$$

Частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими условиям (3) и (4), являются

$$\text{const} \cdot \sin{(2n+1)}\frac{\pi y}{a} \cdot \exp\frac{(2n+1)\pi z}{a}$$

с целыми n. Условию (2) удовлетворяет сумма

$$v = \frac{4a}{\eta\pi^2}\frac{d\alpha}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin{(2n+1)}\dfrac{\pi y}{a}\exp\dfrac{(2n+1)\pi z}{a}}{(2n+1)^2}.$$

Количество переносимого (в единицу времени) вещества пленки равно

$$Q = \int_0^a \gamma v|_{z=0}\,dy = \frac{8a^2}{\eta\pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\right)\frac{d\alpha}{dx}\gamma$$

(движение происходит в направлении увеличения α). Величина Q должна быть, очевидно, постоянной вдоль канала. Поэтому можно написать

$$\gamma \frac{d\alpha}{dx} = \text{const} \equiv \frac{1}{l}\int\limits_0^l \frac{d\alpha}{dx}\gamma\,dx = \frac{1}{l}\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma\,d\alpha,$$

где $\alpha_1 = \alpha(\gamma_1)$, $\alpha_2 = \alpha(\gamma_2)$, и предполагается, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Таким образом, имеем окончательно

$$Q = \frac{8a^2}{\eta l \pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\right)\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma\,d\alpha = 0{,}27\frac{a^2}{\eta l}\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma\,d\alpha.$$

2. Определять коэффициент затухания капиллярных волн на поверхности жидкости, покрытой адсорбированной пленкой.

Решение. Если вязкость жидкости не слишком велика, то растягивающие (тангенциальные) силы, действующие на пленку со стороны жидкости, малы, и поэтому пленку можно рассматривать как несжимаемую.

Соответственно этому можно вычислять диссипацию энергии как диссипацию вблизи твердой стенки, т. е. по формуле (24.14). Написав потенциал скорости в виде

$$\varphi = \varphi_0 e^{ikx-\omega t}e^{-kz},$$

получим для диссипации, отнесенной к единице площади поверхности:

$$\overline{\dot{E}}_{\text{кин}} = -\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{8}}|k\varphi_0|^2.$$

Полная же энергия (тоже отнесенная к единице площади) есть

$$\overline{E} = \rho\int \overline{v^2}\,dz = \frac{\rho}{2k}|k\varphi_0|^2.$$

Коэффициент затухания равен (используем соотношение (62.3)):

$$\gamma = \frac{\omega^{7/6}\eta^{1/2}}{2\sqrt{2}\alpha^{1/3}\rho^{1/6}} = \frac{k^{7/4}\eta^{1/2}\alpha^{1/4}}{2\sqrt{2}\rho^{3/4}}.$$

Отношение этой величины к коэффициенту затухания капиллярных волн на чистой поверхности жидкости (задача 2 § 62) равно

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha\rho}{k\eta^2}\right)^{1/4}$$

и велико по сравнению с единицей, если только длина волны не чрезмерно мала. Таким образом, наличие адсорбированной пленки на поверхности жидкости приводит к значительному увеличению коэффициента затухания волн.

Г Л А В А VIII

ЗВУК

§ 64. Звуковые волны

Переходя к изучению движения сжимаемой жидкости (или газа), мы начнем с исследования малых колебаний в ней; колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости называют *звуковыми волнами*. В каждом месте жидкости в звуковой волне происходят попеременные сжатия и разрежения.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость $\mathbf{v}$ в ней мала, так что в уравнении Эйлера можно пренебречь членом $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. По этой же причине относительные изменения плотности и давления в жидкости тоже малы. Мы будем писать переменные p и ρ в виде

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \tag{64.1}$$

где ρ_0, p_0 — постоянные равновесные плотность и давление жидкости, а ρ', p' — их изменения в звуковой волне ($\rho' \ll \rho_0$, $p' \ll p_0$).

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0$$

при подстановке в него (64.1) и пренебрежении малыми величинами второго порядка (ρ', p', $\mathbf{v}$ надо при этом считать малыми величинами первого порядка) принимает вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{64.2}$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

в том же приближении сводится к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \tag{64.3}$$

Условие применимости линеаризованных уравнений движения (64.2) и (64.3) для распространения звуковых волн заключается в малости скорости движения частиц жидкости в волне по сравнению со скоростью звука: $v \ll c$. Это условие можно получить, например, из требования $\rho' \ll \rho_0$ (см. ниже формулу (64.12)).

Уравнения (64.2) и (64.3) содержат неизвестные функции $\mathbf{v}$, p', ρ'. Для исключения одной из них замечаем, что звуковая волна в идеальной жидкости является, как и всякое другое движение в такой жидкости, адиабатическим. Поэтому малое изменение p' давления связано с малым изменением ρ' плотности уравнением

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \rho'. \tag{64.4}$$

Заменив с его помощью ρ' на p' в уравнении (64.2), получим

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{64.5}$$

Два уравнения (64.3) и (64.5) с неизвестными $\mathbf{v}$ и p' полностью описывают звуковую волну.

Для того чтобы выразить все неизвестные величины через одну из них, удобно ввести потенциал скорости согласно $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Из уравнения (64.3) получим равенство

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{64.6}$$

связывающее p' с φ (индекс у p_0 и ρ_0 здесь и ниже мы будем для краткости опускать). После этого найдем из (64.5) уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \tag{64.7}$$

которому должен удовлетворять потенциал φ; здесь введено обозначение

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \tag{64.8}$$

Уравнение вида (64.7) называется *волновым*. Применив к (64.7) операцию grad, найдем, что такому же уравнению удовлетворяет каждая из трех компонент скорости $\mathbf{v}$, а взяв производную по времени от (64.7), найдем, что волновому уравнению удовлетворяет и давление p' (а потому и ρ').

Рассмотрим звуковую волну, в которой все величины зависят только от одной из координат, скажем, от x. Другими словами, все движение однородно в плоскости yz; такая волна называется плоской. Волновое уравнение (64.7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{64.9}$$

Для решения этого уравнения вводим вместо x, t новые переменные

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Легко убедиться в том, что в этих переменных уравнение (64.9) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial\xi} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по ξ находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = F(\eta),$$

где $F(\eta)$ — произвольная функция. Интегрируя еще раз, получим $\varphi_1 = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$\varphi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \tag{64.10}$$

Функциями такого же вида описывается распределение также и остальных величин (p', ρ', $\mathbf{v}$) в плоской волне.

Будем говорить для определенности о плотности. Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $\rho' = f_1(x - ct)$. Выясним наглядный смысл этого решения. В каждой плоскости $x = \text{const}$ плотность меняется со временем; в каждый данный момент плотность различна для разных x. Очевидно, что плотность одинакова для координат x и моментов времени t, удовлетворяющих соотношениям $x - ct = \text{const}$, или

$$x = \text{const} + ct.$$

Это значит, что если в некоторый момент $t = 0$ в некоторой точке жидкости ее плотность имеет определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение плотность имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места (и то же самое относится ко всем остальным величинам в волне). Мы можем сказать, что картина движения распространяется в среде вдоль оси x со скоростью c, называемой скоростью звука.

Таким образом, $f_1(x - ct)$ представляет собой, как говорят, *бегущую плоскую волну*, распространяющуюся в положительном направлении оси x. Очевидно, что $f_2(x + ct)$ представляет собой волну, распространяющуюся в противоположном, отрицательном, направлении оси x.

Из трех компонент скорости $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$ в плоской волне отлична от нуля только компонента $v_x = \partial\varphi/\partial x$. Таким образом, скорость жидкости в звуковой волне направлена вдоль распространения волны. В связи с этим говорят, что звуковые волны в жидкости являются продольными.

В бегущей плоской волне скорость $v_x = v$ связана с давлением p' и плотностью ρ' простыми соотношениями. Написав $\varphi = f(x - ct)$, имеем

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = f'(x - ct), \;\; p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho c f'(x - ct).$$

Сравнив эти выражения, находим

$$v = \frac{p'}{\rho c}. \tag{64.11}$$

Подставляя сюда согласно (64.4) $p' = c^2\rho'$, находим связь между скоростью и изменением плотности:

$$v = \frac{c\rho'}{\rho}. \tag{64.12}$$

Укажем также связь между скоростью и колебаниями температуры в звуковой волне. Имеем $T' = (\partial T/\partial p)_s p'$ и, воспользовавшись известной термодинамической формулой

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

и формулой (64.11), получим

$$T' = \frac{c\beta T}{c_p} v, \tag{64.13}$$

где $\beta = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — температурный коэффициент расширения.

Формула (64.8) определяет скорость звука по адиабатической сжимаемости вещества. Последняя связана с изотермической сжимаемостью известной термодинамической формулой

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \tag{64.14}$$

Вычислим скорость звука в идеальном (в термодинамическом смысле слова) газе. Уравнение состояния идеального газа гласит

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu},$$

где R — газовая постоянная, а μ — молекулярный вес. Для скорости звука получим выражение

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \tag{64.15}$$

где $\gamma = c_p/c_v$. Поскольку γ обычно слабо зависит от температуры, то скорость звука в газе можно считать пропорциональной квадратному корню из температуры [1]. При заданной температуре она не зависит от давления газа [2].

[1] Полезно обратить внимание на то, что скорость звука в газе порядка величины средней тепловой скорости молекул.

[2] Выражение для скорости звука в газе в виде $c^2 = p/\rho$ было впервые получено *Ньютоном* (1687). Необходимость введения в это выражение множителя γ была показана *Лапласом*.

Весьма важным случаем волн являются *монохроматические* волны, в которых все величины являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени. Такие функции обычно бывает удобным писать в виде вещественной части комплексного выражения (см. начало § 24). Так, для потенциала скорости напишем

$$\varphi = \operatorname{Re}\{\varphi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}\}, \tag{64.16}$$

где ω — частота волны. Функция φ_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0, \tag{64.17}$$

получающемуся при подстановке (64.16) в (64.7).

Рассмотрим бегущую плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x. В такой волне все величины являются функциями только от $x - ct$, и потому, скажем, потенциал имеет вид

$$\varphi = \operatorname{Re}\left\{A\exp\left[-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\right\}, \tag{64.18}$$

где A — постоянная, называемая *комплексной амплитудой*. Написав ее в виде $A = ae^{i\alpha}$ с вещественными постоянными a и α, будем иметь

$$\varphi = a\cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \alpha\right). \tag{64.19}$$

Постоянную a называют амплитудой, а аргумент под знаком cos — фазой волны. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор в направлении распространения волны. Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} \tag{64.20}$$

называют *волновым вектором* (а его абсолютную величину часто называют *волновым числом*). С этим обозначением выражение (64.18) записывается в виде

$$\varphi = \operatorname{Re}\{Ae^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\}. \tag{64.21}$$

Монохроматические волны играют весьма существенную роль в связи с тем, что всякую вообще волну можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами. Такое разложение волны на монохроматические волны является не чем иным, как разложением в ряд или интеграл Фурье (о нем говорят также как о *спектральном разложении*). Об отдельных компонентах этого разложения говорят как о монохроматических компонентах волны или как о ее компонентах Фурье.

Задачи

1. Определить скорость звука в мелкодисперсной двухфазной системе: пар с взвешенными в нем мелкими капельками жидкости («влажный пар») или жидкость с распределенными в ней мелкими пузырьками пара. Длина волны звука предполагается большой по сравнению с размерами неоднородностей системы.

Решение. В двухфазной системе p и T не являются независимыми переменными, а связаны друг с другом уравнением равновесия фаз. Сжатие или разрежение системы сопровождается переходом вещества из одной фазы в другую. Пусть x — доля (по массе) фазы 2 в системе, тогда

$$s = (1-x)s_1 + xs_2,$$
$$V = (1-x)V_1 + xV_2, \tag{1}$$

где индексы 1 и 2 отличают величины, относящиеся к чистым фазам *1* и *2*. Для вычисления производной $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$ преобразуем ее от переменных p, s к переменным p, x и получаем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_x}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_p},$$

после чего подстановка (1) дает

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = x\left[\frac{dV_2}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1}\frac{ds_2}{dp}\right] + (1-x)\left[\frac{dV_1}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1}\frac{ds_1}{dp}\right]. \tag{2}$$

Скорость звука определяется с помощью (1) и (2) по формуле (64.8).

Раскрывая полные производные по давлению, вводя скрытую теплоту перехода из фазы *1* в фазу *2*: $q = T(s_2 - s_1)$ и воспользовавшись формулой Клапейрона-Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_2 - V_1)}$$

для производной вдоль кривой равновесия фаз (см. V, § 82), получим выражение, стоящее в первой квадратной скобке в (2) в виде

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T + \frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p (V_2 - V_1) - \frac{Tc_{p2}}{q^2}(V_2 - V_1)^2.$$

Аналогично преобразуется и выражение во второй скобке.

Пусть фаза *1* — жидкость, а фаза *2* — пар; последний рассматриваем как идеальный газ, а удельным объемом V_1 можно пренебречь по сравнению с V_2. Если $x \ll 1$ (жидкость с небольшим количеством пара в виде пузырьков), то для скорости звука получается

$$c = \frac{q\mu p V_1}{RT\sqrt{c_{p1}T}} \tag{3}$$

(R — газовая постоянная, μ — молекулярный вес). Эта скорость, вообще говоря, очень мала; таким образом, при образовании в жидкости пузырьков пара (кавитация) скорость звука в ней скачкообразно резко падает.

Если же $1 - x \ll 1$ (пар с незначительным количеством жидкости в виде капелек), то получается

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{RT} - \frac{2}{q} + \frac{c_{p2}T}{q^2}. \tag{4}$$

Сравнивая со скоростью звука в чистом газе (64.15), найдем, что и здесь добавление второй фазы уменьшает скорость звука, хотя и далеко не в такой сильной степени.

В промежутке при возрастании x от нуля до единицы скорость звука монотонно возрастает от значения (3) до значения (4).

Отметим, что при $x = 0$ и $x = 1$ скорость звука испытывает скачок при переходе от однофазной системы к двухфазной. Это обстоятельство приводит к тому, что при очень близких к нулю или единице значениях x обычная линейная теория звука вообще становится неприменимой уже при малых амплитудах звуковой волны: производимые волной сжатия и разрежения в данных условиях сопровождаются переходом двухфазной системы в однофазную (и обратно), в результате чего совершенно нарушается существенное для теории предположение о постоянстве скорости звука.

2. Определить скорость звука в газе, нагретом до настолько высокой температуры, что давление равновесного черного излучения в нем сравнимо с давлением самого газа.

Р е ш е н и е. Давление вещества равно

$$p = nT + \frac{a}{4}T^4,$$

а энтропия

$$s = \frac{1}{m}\ln\frac{T^{3/2}}{n} + \frac{aT^3}{n}.$$

В этих выражениях первые члены относятся к частицам, а вторые — к излучению; n — плотность числа частиц, m — их масса, $a = 4\pi^2/(45\hbar^3c^3)$ (см. V, § 63) [1]). В плотности же вещества черное излучение не играет роли, так что $\rho = mn$. Скорость звука обозначим здесь в отличие от скорости света буквой u. Записывая производные в виде якобианов, имеем

$$u^2 = \frac{\partial(p,\, s)}{\partial(\rho,\, s)} = \frac{\partial(p,\, s)}{\partial(n,\, t)} \Big/ \frac{\partial(\rho,\, s)}{\partial(n,\, t)}.$$

Вычислив эти якобианы, получим

$$u^2 = \frac{5T}{3m}\left[1 + \frac{2a^2T^6}{5n(n+2aT^3)}\right].$$

§ 65. Энергия и импульс звуковых волн

Выведем выражение для энергии звуковой волны. Согласно общей формуле энергия единицы объема жидкости равна $\rho\varepsilon + \rho v^2/2$. Подставим сюда $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$, где буквы со штрихом обозначают отклонения соответствующих величин от их значений в неподвижной жидкости. Член $\rho' v^2/2$ является величиной третьего порядка малости. Поэтому, если ограничиться точностью до членов второго порядка включительно, получим

$$\rho_0\varepsilon_0 + \rho'\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2}\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$

[1]) Как везде в этой книге, температура измеряется в единицах энергии.

Производные берутся при постоянной энтропии, поскольку звуковая волна адиабатична. В силу термодинамического соотношения

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho$$

имеем

$$\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right)_s = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w,$$

вторая производная:

$$\left(\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s = \frac{c^2}{\rho}.$$

Таким образом, энергия единицы объема жидкости равна

$$\rho_0\varepsilon_0 + w\rho' + \frac{c^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \rho_0\frac{v^2}{2}.$$

Первый член в этом выражении ($\varepsilon_0\rho_0$) представляет собой энергию единицы объема неподвижной жидкости и не имеет отношения к звуковой волне. Что касается второго члена ($w_0\rho'$), то это есть изменение энергии, связанное просто с изменением количества вещества (массы жидкости) в каждой данной единице объема. В полной энергии, получающейся интегрированием энергии единицы объема по всему объему жидкости, этот член выпадает: поскольку общее количество жидкости остается неизменным, то $\int \rho'\,dV = 0$. Таким образом, полное изменение энергии жидкости, связанное с наличием звуковой волны, равно интегралу

$$\int\left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}\right)dV.$$

Подынтегральное выражение можно рассматривать как плотность E звуковой энергии:

$$E = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_0}. \tag{65.1}$$

Это выражение упрощается в случае бегущей плоской волны. В такой волне $\rho' = \rho_0 v/c$, и оба члена в (65.1) оказываются одинаковыми, так что

$$E = \rho_0 v^2. \tag{65.2}$$

В общем случае произвольной волны такое соотношение не имеет места. Аналогичную формулу можно написать в общем случае лишь для среднего (по времени) значения полной звуковой энергии. Она следует непосредственно из известной общей теоремы механики о том, что во всякой системе, совершающей малые колебания, среднее значение полной потенциальной энергии равно

среднему значению полной кинетической энергии. Поскольку последняя равна в данном случае $\frac{1}{2}\int \rho_0\overline{v^2}\,dV$, то мы находим, что полная средняя звуковая энергия есть

$$\int \overline{E}\,dV = \int \rho_0\overline{v^2}\,dV. \tag{65.3}$$

Далее, рассмотрим некоторый объем жидкости, в которой распространяется звук, и определим поток энергии через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем. Плотность потока энергии в жидкости равна согласно (6.3) $\rho\mathbf{v}(w + v^2/2)$. В рассматриваемом случае можно пренебречь членом с v^2 как малым третьего порядка. Поэтому плотность потока энергии в звуковой волне есть $\rho\mathbf{v}w$. Подставив сюда $w = w_0 + w'$, имеем

$$\rho w\mathbf{v} = w_0\rho\mathbf{v} + \rho w'\mathbf{v}.$$

Для малого изменения тепловой функции имеем

$$w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s p' = \frac{p'}{\rho}$$

и далее $\rho w\mathbf{v} = w_0\rho\mathbf{v} + p'\mathbf{v}$. Полный поток энергии через рассматриваемую поверхность равен интегралу

$$\oint (w_0\rho\mathbf{v} + p'\mathbf{v})\,d\mathbf{f}.$$

Первый член в этой формуле есть поток энергии, связанный просто с изменением массы жидкости в данном объеме. Но мы уже опустили соответствующий (равный нулю при интегрировании по бесконечному объему) член $w_0\rho'$ в плотности энергии. Поэтому, чтобы получить поток энергии, плотность которой определена согласно (65.1), надо опустить этот член, и поток энергии будет просто

$$\oint p'\mathbf{v}\,d\mathbf{f}.$$

Мы видим, что роль плотности потока звуковой энергии играет вектор

$$\mathbf{q} = p'\mathbf{v}. \tag{65.4}$$

Легко проверить, что, как и должно было быть, имеет место соотношение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} p'\mathbf{v} = 0, \tag{65.5}$$

выражающее закон сохранения энергии, причем роль плотности потока энергии играет именно вектор (65.4).

В бегущей (слева направо) плоской волне изменение давления связано со скоростью посредством $p' = c\rho_0 v$, где скорость $v \equiv v_x$

понимается вместе со своим знаком. Введя единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении распространения волны, получим

$$\mathbf{q} = c\rho_0 v^2 \mathbf{n} = cE\mathbf{n}. \tag{65.6}$$

Таким образом, в плоской звуковой волне плотность потока энергии равна плотности энергии, умноженной на скорость звука, — результат, который естественно было ожидать.

Рассмотрим теперь звуковую волну, занимающую в каждый данный момент времени некоторую конечную область пространства (нигде не ограниченную твердыми стенками) — *волновой пакет*; определим полный импульс жидкости в такой волне. Импульс единицы объема жидкости совпадает с плотностью потока массы $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Подставив $\rho = \rho_0 + \rho'$, имеем $\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \rho'\mathbf{v}$. Изменение плотности связано с изменением давления посредством $\rho' = p'/c^2$. С помощью (65.4) получаем поэтому

$$\mathbf{j} = \rho_0\mathbf{v} + \mathbf{q}/c^2. \tag{65.7}$$

Если в рассматриваемых явлениях вязкость жидкости несущественна, то движение в звуковой волне можно считать потенциальным и написать $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ (подчеркнем, что это утверждение не связано с теми пренебрежениями, которые были сделаны в § 64 при выводе линейных уравнений движения, — решение с $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ является точным решением уравнений Эйлера). Поэтому имеем

$$\mathbf{j} = \rho_0\nabla\varphi + \mathbf{q}/c^2.$$

Полный импульс волны равен интегралу $\int \mathbf{j}\,dV$ по всему занимаемому ею объему. Но интеграл от $\nabla\varphi$ может быть преобразован в интеграл по поверхности:

$$\int \nabla\varphi\,dV = \oint \varphi\,d\mathbf{f}$$

и обращается в нуль, так как вне занимаемого волновым пакетом объема $\varphi = 0$. Таким образом, полный импульс пакета равен

$$\int \mathbf{j}\,dV = \frac{1}{c^2}\int \mathbf{q}\,dV. \tag{65.8}$$

Эта величина, вообще говоря, отнюдь не обращается в нуль. Но отличный от нуля полный импульс означает, что имеет место перенос вещества. Мы приходим к результату, что распространение звукового пакета сопровождается переносом вещества жидкости. Это — эффект второго порядка, поскольку $\mathbf{q}$ есть величина второго порядка.

Наконец, рассмотрим звуковое поле в области пространства, неограниченной по своей длине и ограниченной по поперечному сечению (*волновой цуг* конечной апертуры); вычислим среднее

значение переменной части давления p' в нем. В первом приближении, соответствующем обычным линейным уравнениям движения, p' является периодической знакопеременной функцией и среднее значение p' обращается в нуль. Этот результат, однако, может не иметь места, если обратиться к более высоким приближениям. Если ограничиться величинами второго порядка малости, то оказывается возможным выразить $\overline{p}'$ через величины, вычисляемые с помощью линейных уравнений звука, так что не приходится прибегать к непосредственному решению нелинейных уравнений движения, получающихся при учете величин высших порядков.

Характерным свойством рассматриваемого звукового поля является то, что разности значений потенциала скорости φ в различных его точках остаются конечными при неограниченном увеличении расстояния между ними (и то же самое относится к разности значений φ в заданной точке пространства в различные моменты времени). Действительно, это изменение дается интегралом

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int\limits_1^2 \mathbf{v}\, d\mathbf{l},$$

который может быть взят по любому пути между точками *1* и *2*; указанное свойство потенциала становится очевидным, если заметить, что в данном случае можно выбрать путь, проходящий вдоль длины цуга вне его [1]).

Имея в виду это свойство, будем исходить из уравнения Бернулли

$$w + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mathrm{const}.$$

Усредним это равенство по времени. Среднее значение производной $\partial\varphi/\partial t$ обращается в нуль [2]). Написав также $w = w_0 + w'$ и включив постоянную w_0 в const, находим $\overline{w'} + \overline{v^2}/2 = \mathrm{const}$. Поскольку const одинакова во всем пространстве, а вне волнового цуга вдали от него w' и v обращаются в нуль, то ясно, что эта

[1]) Подобные соображения, по существу, использованы и при выводе (65.8), основанном на утверждении, что $\varphi = 0$ везде вокруг волнового пакета вдали от него.

[2]) По общему определению средних, для среднего значения производной от некоторой функции $f(t)$ имеем

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{df}{dt}\,dt = \frac{1}{T}\left[f\left(\frac{T}{2}\right) - f\left(-\frac{T}{2}\right)\right].$$

Если функция $f(t)$ остается конечной при всех t, то при увеличении интервала усреднения T эта величина стремится к нулю.

постоянная должна быть нулем, так что

$$\overline{w'} + \frac{\overline{v^2}}{2} = 0. \tag{65.9}$$

Разложим, далее, w' по степеням p'; с точностью до члена второго порядка имеем

$$w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s p' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_s p'^2,$$

и поскольку $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, то

$$w' = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2\rho_0^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2c^2\rho_0^2}.$$

Подставив это в (65.9), получим

$$\overline{p'} = -\frac{\rho_0\overline{v^2}}{2} + \frac{\overline{p'^2}}{2\rho_0 c^2} = -\frac{\rho_0\overline{v^2}}{2} + \frac{c^2\overline{\rho'^2}}{2\rho_0}, \tag{65.10}$$

чем и определяется среднее давление. Стоящее справа выражение является величиной второго порядка малости и для его вычисления надо пользоваться p' и v, получающимися путем решения линейных уравнений движения. Для средней плотности имеем

$$\overline{\rho'} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \overline{p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s \overline{p'^2}. \tag{65.11}$$

Ввиду конечности площади поперечного сечения волнового цуга, он не может представлять собой строго плоскую волну. Но если линейные размеры сечения достаточно велики по сравнению с длиной волны звука, волновое поле может быть близко к плоскому с высокой точностью. В бегущей плоской волне $v = c\rho'/\rho_0$, так что $\overline{v^2} = c^2\overline{\rho'^2}/\rho_0^2$ и выражение (65.10) обращается в нуль, т. е. среднее изменение давления является эффектом более высокого порядка, чем второй. Изменение же плотности

$$\overline{\rho'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s \overline{p'^2}$$

в нуль не обращается [1]. В этом же приближении имеем для среднего значения тензора плотности импульса в бегущей плоской (в указанном выше смысле) волне:

$$\overline{p'} + \overline{\rho v_i v_k} = \overline{p'} + \rho_0\overline{v_i v_k}.$$

Первый член равен нулю, а во втором вводим единичный вектор **n** в направлении распространения волны (совпадающем с

[1]) Отметим, что производная $(\partial^2\rho/\partial p^2)_s$ фактически всегда отрицательна и поэтому в бегущей волне $\overline{\rho'} < 0$.

точностью до знака с направлением $\mathbf{v}$). Воспользовавшись соотношением (65.2), будем иметь для плотности потока импульса:

$$\overline{\Pi}_{ik} = \overline{E} n_i n_k. \qquad (65.12)$$

Если волна распространяется вдоль оси x, то отлична от нуля только компонента $\overline{\Pi}_{xx} = \overline{E}$. Таким образом, в рассматриваемом приближении имеется средний поток только x-компоненты импульса, причем он переносится в направлении оси x.

По поводу всего сказанного в последнем абзаце лишний раз подчеркнем, что речь идет о волновом цуге, ограниченном по своему сечению. Для волны, плоской в строгом смысле этого слова, эти результаты были бы несправедливы (в частности $\overline{p'}$ могло бы быть отличным от нуля уже в квадратичном приближении — см. задачу 4 в § 101). Формально это связано с тем, что для строго плоской волны (которую нельзя обойти «сбоку») несправедливо, вообще говоря, утверждение о конечности потенциала φ во всем пространстве (или в течение всего времени). Физическое различие связано с возможностью (в случае ограниченного по сечению волнового цуга) возникновения поперечного движения, приводящего к выравниванию среднего давления.

§ 66. Отражение и преломление звуковых волн

Когда звуковая волна падает на границу раздела между двумя различными средами, она отражается и преломляется. Движение в первой среде является тогда наложением двух волн (падающей и отраженной), а во второй среде имеется одна (преломленная) волна. Связь между всеми тремя волнами определяется граничными условиями на поверхности раздела.

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической продольной волны в случае плоской границы раздела. Плоскость yz выберем в качестве граничной. Легко видеть, что все три волны — падающая, отраженная и преломленная — будут иметь одинаковые частоты ω и одинаковые компоненты k_y, k_z волнового вектора (но не компоненту k_x по направлению, перпендикулярному к плоскости раздела). Действительно, в неограниченной однородной среде монохроматическая волна с постоянными $\mathbf{k}$ и ω является решением уравнений движения. При наличии границы раздела добавляются лишь граничные условия, которые в нашем случае относятся к $x = 0$, т. е. не зависят ни от времени, ни от координат y и z. Поэтому зависимость решения от t и от y, z остается неизменной во всем пространстве и времени, т. е. ω, k_y, k_z остаются теми же, какими они были в падающей волне.

Из этого результата могут быть непосредственно выведены соотношения, определяющие направления распространения от-

раженной и преломленной волн. Пусть xy — плоскость падения волны. Тогда в падающей волне $k_z = 0$; то же самое должно иметь место и для отраженной и преломленной волн. Таким образом, направления распространения падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости.

Пусть θ — угол между направлением волны и осью x. Тогда из равенства величин $k_y = (\omega/c)\sin\theta$ для падающей и отраженной волн следует, что

$$\theta_1 = \theta_1', \tag{66.1}$$

т. е. угол падения θ_1 равен углу отражения θ_1'. Из аналогичного же равенства для падающей и преломленной волн следует соотношение

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{66.2}$$

между углом падения θ_1 и углом преломления θ_2 (c_1 и c_2 — скорости звука в обеих средах).

Для того чтобы получить количественное соотношение между интенсивностями падающей, отраженной и преломленной волн, пишем потенциалы скорости в этих волнах соответственно в виде

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= A_1 \exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c_1}\cos\theta_1 + \frac{y}{c_1}\sin\theta_1 - t\right)\right],\\
\varphi_1' &= A_1' \exp\left[i\omega\left(-\frac{x}{c_1}\cos\theta_1 + \frac{y}{c_1}\sin\theta_1 - t\right)\right],\\
\varphi_2 &= A_2 \exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c_2}\cos\theta_2 + \frac{y}{c_2}\sin\theta_2 - t\right)\right].
\end{aligned}$$

На поверхности раздела ($x = 0$) должны быть равными давления ($p = -\rho\dot{\varphi}$) и нормальные скорости ($v_x = \partial\varphi/\partial x$) в обеих средах; эти условия приводят к равенствам

$$\rho_1(A_1 + A_1') = \rho_2 A_2, \qquad \frac{\cos\theta_1}{c_1}(A_1 - A_1') = \frac{\cos\theta_2}{c_2}A_2.$$

Коэффициент отражения R определяется как отношение средних (по времени) плотностей потока энергии в отраженной и падающей волнах. Поскольку плотность потока энергии в плоской волне равна $c\rho v^2$, то имеем

$$R = \frac{c_1\rho_1\overline{v_1'^2}}{c_1\rho_1\overline{v_1^2}} = \frac{|A_1'|^2}{|A_1|^2}.$$

Простое вычисление приводит к результату

$$R = \left(\frac{\rho_2\operatorname{tg}\theta_2 - \rho_1\operatorname{tg}\theta_1}{\rho_2\operatorname{tg}\theta_2 + \rho_1\operatorname{tg}\theta_1}\right)^2. \tag{66.3}$$

Углы θ_1 и θ_2 связаны друг с другом соотношением (66.2); выразив θ_2 через θ_1, можно представить коэффициент отражения в виде

$$R = \left[\frac{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 - \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2\sin^2\theta_1}}{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 + \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2\sin^2\theta_1}}\right]^2. \qquad (66.4)$$

Для нормального падения ($\theta_1 = 0$) эта формула имеет вид

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}\right)^2. \qquad (66.5)$$

При угле падения, определяющемся из

$$\operatorname{tg}^2\theta_1 = \frac{\rho_2^2 c_2^2 - \rho_1^2 c_1^2}{\rho_2^2(c_1^2 - c_2^2)}, \qquad (66.6)$$

коэффициент отражения обращается в нуль, т. е. звуковая волна целиком преломляется, не отражаясь вовсе; такой случай возможен, если $c_1 > c_2$, но $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ (или наоборот).

Задача

Определить давление, оказываемое звуковой волной на границу раздела между двумя жидкостями.

Решение. Сумма полных потоков энергии в отраженной и преломленной волнах должна быть равна падающему потоку энергии. Относя поток энергии к единице площади поверхности раздела, напишем это условие в виде

$$c_1 E_1 \cos\theta_1 = c_1 E_1' \cos\theta_1 + c_2 E_2 \cos\theta_2,$$

где E_1, E_1', E_2 — плотности энергии в падающей, отраженной и преломленной волнах. Вводя коэффициент отражения $R = \overline{E}_1'/\overline{E}_1$, имеем отсюда

$$\overline{E}_2 = \frac{c_1\cos\theta_1}{c_2\cos\theta_2}(1-R)\overline{E}_1.$$

Искомое давление p определяется как x-компонента импульса, теряемого в единицу времени звуковой волной (отнесенная к единице площади границы раздела). С помощью выражения (65.12) для тензора плотности потока импульса в звуковой волне найдем

$$p = \overline{E}_1\cos^2\theta_1 + \overline{E}_1'\cos^2\theta_1 - \overline{E}_2\cos^2\theta_2.$$

Подставляя выражение для $\overline{E}_2$, вводя R и используя (66.2), получим

$$p = \overline{E}_1\sin\theta_1\cos\theta_1[(1+R)\operatorname{ctg}\theta_1 - (1-R)\operatorname{ctg}\theta_2].$$

Для нормального падения ($\theta_1 = 0$) найдем с помощью (66.5)

$$p = 2\overline{E}_1\left[\frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1\rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}\right].$$

§ 67. Геометрическая акустика

Плоская волна отличается тем свойством, что направление ее распространения и ее амплитуда одинаковы во всем пространстве. Произвольные звуковые волны этим свойством, конечно, не

обладают. Однако возможны случаи, когда звуковую волну, не являющуюся плоской, в каждом небольшом участке пространства можно рассматривать как плоскую. Для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

Если выполнено это условие, то можно ввести понятие о *лучах* как о линиях, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением распространения волны, и можно говорить о распространении звука вдоль лучей, отвлекаясь при этом от его волновой природы. Изучение законов распространения звука в таких случаях составляет предмет геометрической акустики. Можно сказать, что геометрическая акустика соответствует предельному случаю малых длин воли, $\lambda \to 0$.

Выведем основное уравнение геометрической акустики — уравнение, определяющее направление лучей. Напишем потенциал скорости волны в виде

$$\varphi = ae^{i\psi}. \tag{67.1}$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая акустика применима, амплитуда a является медленно меняющейся функцией координат и времени, а фаза волны ψ есть «почти линейная» функция (напомним, что в плоской волне $\psi = \mathbf{kr} - \omega t + \alpha$ с постоянными $\mathbf{k}$ и ω). В малых участках пространства и малых интервалах времени фазу ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\,\mathrm{grad}\,\psi + \frac{\partial\psi}{\partial t}t.$$

Соответственно тому, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую, определяем волновой вектор и частоту волны в каждой точке как

$$\mathbf{k} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \equiv \mathrm{grad}\,\psi, \quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{67.2}$$

Величина ψ называется *эйконалом.*

В звуковой волне имеем $\omega^2/c^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Подставляя сюда (67.2), получим следующее основное уравнение геометрической акустики:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{67.3}$$

Если жидкость неоднородна, то коэффициент c^2 является функцией координат.

Как известно из механики, движение материальных частиц может быть определено с помощью уравнения Гамильтона–Якоби,

являющегося, как и уравнение (67.3), уравнением в частных производных первого порядка. Аналогичной ψ величиной является при этом действие S частицы, а производные от действия определяют импульс $\mathbf{p}$ и функцию Гамильтона H (энергию) частицы согласно формулам $\mathbf{p} = \partial S/\partial \mathbf{r}$, $H = -\partial S/\partial t$, аналогично формулам (67.2). Известно, далее, что уравнение Гамильтона–Якоби эквивалентно уравнениям Гамильтона, имеющим вид $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{r}$, $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \partial H/\partial \mathbf{p}$. Вследствие указанной аналогии между механикой материальной частицы и геометрической акустикой мы можем непосредственно написать аналогичные уравнения для лучей:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{67.4}$$

В однородной изотропной среде $\omega = ck$ с постоянным c, так что $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$), т. е. как и должно было быть, лучи распространяются по прямым линиям, сохраняя при этом постоянную частоту ω.

Частота остается, разумеется, постоянной вдоль лучей вообще всегда, когда распространение звука происходит в стационарных условиях, т. е. свойства среды в каждой точке пространства не меняются со временем. Действительно, полная производная от частоты по времени, определяющая ее изменение вдоль распространяющегося луча, равна

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}}.$$

При подстановке (67.4) два последних члена взаимно сокращаются; в стационарном же случае $\partial\omega/\partial t = 0$, а потому и $d\omega/dt = 0$.

При стационарном распространении звука в неподвижной неоднородной среде $\omega = ck$, где c есть заданная функция координат. Уравнения (67.4) дают

$$\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{k}} = -k\nabla c. \tag{67.5}$$

Абсолютная величина вектора $\mathbf{k}$ меняется вдоль луча просто по закону $k = \omega/c$ (с $\omega = \mathrm{const}$). Для определения же изменения направления $\mathbf{n}$ полагаем во втором из уравнений (67.5) $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ и пишем:

$$\frac{\omega}{c}\dot{\mathbf{n}} - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{n}(\nabla c\dot{\mathbf{r}}) = -k\nabla c,$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\nabla c + \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla c).$$

Вводя элемент проходимой лучом длины $dl = c\,dt$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d\mathbf{n}}{dl} = -\frac{\nabla c}{c} + \frac{\mathbf{n}}{c}(\mathbf{n}\nabla c). \tag{67.6}$$

Этим уравнением определяется форма лучей; $\mathbf{n}$ есть единичный вектор касательной к лучу [1]).

Если уравнение (67.3) решено и эйконал ψ как функция координат и времени известен, то можно найти также и распределение интенсивности звука в пространстве. В стационарных условиях оно определяется уравнением $\operatorname{div}\mathbf{q} = 0$ ($\mathbf{q}$ — плотность потока звуковой энергии), которое должно выполняться во всем пространстве вне источника звука. Написав $\mathbf{q} = cE\mathbf{n}$, где E — плотность звуковой энергии (см. (65.6)), и имея в виду, что $\mathbf{n}$ есть единичный вектор в направлении $\mathbf{k} = \nabla\psi$, получим следующее уравнение:

$$\operatorname{div}\left(cE\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}\right) = 0, \tag{67.7}$$

которое и определяет распределение E в пространстве.

Вторая из формул (67.4) определяет скорость распространения волн по известной зависимости частоты от компонент волнового вектора. Это — важная формула, относящаяся не только к звуковым, но и ко всяким волнам вообще (мы уже пользовались, например, этой формулой в § 12 в применении к гравитационным волнам). Приведем здесь еще один вывод этой формулы, полезный для уяснения смысла определяемой ею скорости. Рассмотрим волну (или, как говорят, *волновой пакет*), занимающую некоторую конечную область пространства. Предположим, что волна такова, что в ее спектральное разложение входят монохроматические компоненты с частотами, лежащими в некотором малом интервале; то же самое относится и к компонентам их волновых векторов. Пусть ω есть некоторая средняя частота волны и $\mathbf{k}$ — средний волновой вектор. Тогда в некоторый начальный момент времени волна описывается функцией вида

$$\varphi = e^{i\mathbf{kr}}f(\mathbf{r}). \tag{67.8}$$

Функция $f(\mathbf{r})$ заметно отлична от нуля только в некоторой малой (но большой по сравнению с длиной волны $1/k$) области пространства. Ее разложение в интеграл Фурье содержит согласно сделанным предположениям компоненты вида $e^{i\mathbf{r}\,\Delta\mathbf{k}}$, где $\Delta\mathbf{k}$ — малые величины.

[1]) Как известно из дифференциальной геометрии, производная $d\mathbf{n}/dl$ вдоль луча равна $\mathbf{N}/R$, где $\mathbf{N}$ — единичный вектор главной нормали, а R — радиус кривизны луча. Выражение же в правой части уравнения (67.6) есть, с точностью до множителя $1/c$, производная от скорости звука по направлению главной нормали; поэтому можно написать это уравнение в виде

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{c}(\mathbf{N}\nabla c).$$

Луч изгибается в сторону уменьшения скорости звука.

Таким образом, каждая из монохроматических компонент волны пропорциональна в начальный момент времени множителю вида

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \text{const} \cdot e^{i(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})\mathbf{r}}. \tag{67.9}$$

Соответствующая ей частота есть $\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})$ (напоминаем, что частота является функцией волнового вектора). Поэтому в момент времени t та же компонента будет иметь вид

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \text{const} \cdot \exp\left[i(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})t\right].$$

Воспользовавшись малостью $\Delta\mathbf{k}$, напишем

$$\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}) \approx \omega(\mathbf{k}) + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\Delta\mathbf{k}.$$

Тогда $\varphi_{\mathbf{k}}$ принимает вид

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \text{const} \cdot e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \exp\left[i\Delta\mathbf{k}\left(\mathbf{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}t\right)\right]. \tag{67.10}$$

Если теперь произвести обратное суммирование всех монохроматических компонент волны со всеми имеющимися в ней $\Delta\mathbf{k}$, то, как видно из сравнения (67.9) и (67.10), мы получим

$$\varphi = e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} f\left(\mathbf{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}t\right), \tag{67.11}$$

где f — та же функция, что и в (67.8). Сравнение с (67.8) показывает, что за время t вся картина распределения амплитуды в волне передвинулась в пространстве на расстояние $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}t$ (экспоненциальный множитель перед f в (67.11) влияет только на фазу волны). Следовательно, скорость ее равна

$$\mathbf{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}. \tag{67.12}$$

Эта формула и определяет скорость распространения волны с произвольной зависимостью ω от $\mathbf{k}$. В случае $\omega = ck$ с постоянным c она приводит, конечно, к обычному результату $U = \omega/k = c$. В общем же случае произвольной зависимости $\omega(\mathbf{k})$ скорость распространения волны является функцией ее частоты и ее направление может не совпадать с направлением волнового вектора.

Скорость (67.12) называют также *групповой скоростью* волны, а отношение ω/k — *фазовой скоростью*. Подчеркнем, однако, что фазовая скорость не соответствует реальному физическому распространению чего бы то ни было.

По поводу изложенного вывода отметим, что выражаемое формулой (67.11) передвижение волнового пакета без изменения

его формы является приближенным и связано с предположенной малостью интервала $\Delta\mathbf{k}$. Вообще же говоря, при зависящей от ω скорости U волновой пакет по мере своего распространения «размазывается» — занимаемая им в пространстве область расширяется. Можно показать, что это размазывание пропорционально квадрату величины интервала $\Delta\mathbf{k}$ волновых векторов, входящих в разложение волнового пакета.

Задача

Определить изменение с высотой амплитуды звука, распространяющегося в поле тяжести в изотермической атмосфере.

Решение. Вдоль изотермической атмосферы (рассматриваемой как идеальный газ) скорость звука постоянна. Плотность потока энергии, очевидно, падает вдоль луча обратно пропорционально квадрату расстояния r от источника:

$$c\rho\overline{v^2} \propto \frac{1}{r^2}.$$

Отсюда следует, что амплитуда колебаний скорости в звуковой волне меняется вдоль луча обратно пропорционально $r\sqrt{\rho}$. При этом плотность ρ меняется, согласно барометрической формуле, как

$$\rho \propto \exp\left(-\mu g z/(RT)\right)$$

(z — высота, μ — молекулярная масса газа, R — газовая постоянная).

§ 68. Распространение звука в движущейся среде

Соотношение $\omega = ck$ между частотой и волновым вектором имеет место только для монохроматической звуковой волны, распространяющейся в неподвижной среде. Нетрудно получить аналогичное соотношение для волны, распространяющейся в движущейся среде (и наблюдаемой в неподвижной системе координат).

Рассмотрим однородный поток жидкости со скоростью $\mathbf{u}$. Назовем неподвижную систему координат x, y, z системой K и введем также систему K' координат x', y', z', движущуюся относительно системы K со скоростью $\mathbf{u}$. В системе K' жидкость неподвижна, и монохроматическая волна в ней имеет обычный вид

$$\varphi = \mathrm{const}\cdot e^{i(\mathbf{kr}'-kct)}.$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}'$ в системе K' связан с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в системе K равенством $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$. Поэтому в неподвижной системе координат волна имеет вид

$$\varphi = \mathrm{const}\cdot e^{i(\mathbf{kr}-(kc+\mathbf{kn})t)}.$$

Коэффициент при t в показателе есть частота ω волны. Таким образом, в движущейся среде частота связана с волновым вектором $\mathbf{k}$ соотношением

$$\omega = ck - \mathbf{uk}. \qquad (68.1)$$

Скорость распространения волн равна

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = c\frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}; \tag{68.2}$$

это есть геометрическая сумма скорости c в направлении $\mathbf{k}$ и скорости $\mathbf{u}$ «сноса» звука вместе с движущейся жидкостью.

Определим плотность энергии звуковой волны в движущейся среде. Полная мгновенная плотность энергии дается выражением

$$\frac{1}{2}(\rho+\rho')(\mathbf{u}+\mathbf{v})^2 + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho} = \\ = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho' u^2}{2} + \rho\mathbf{v}\mathbf{u} + \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho'\mathbf{u}\mathbf{v} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho}\right)$$

(ср. (65.1); индекс 0 у невозмущенных значений величин опускаем). Первый член здесь — энергия невозмущенного течения. Следующие два члена — первого порядка малости, но при усреднении по времени они дадут величины второго порядка, связанные с энергией возбуждаемого волной среднего течения. Все эти члены следует опустить и, таким образом, интересующая нас плотность энергии звуковой волны как таковой дается заключенными в скобки тремя последними членами. Скорость и изменение давления в плоской волне в движущейся среде связаны соотношением

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{k}c^2\rho'/\rho,$$

которое следует из линеаризованного уравнения Эйлера

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Учитывая также (68.1), найдем окончательно, что плотность звуковой энергии в движущейся среде:

$$E = E_0\frac{\omega}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}, \tag{68.3}$$

где $E_0 = c^2\rho'^2/\rho = p'^2/\rho c^2$ — плотность энергии в системе отсчета, движущейся вместе со средой [1]).

С помощью формулы (68.1) можно рассмотреть *эффект Доплера*, заключающийся в том, что частота звука, воспринимаемого наблюдателем, движущимся относительно источника, не совпадает с частотой колебаний последнего.

Пусть звук, испускаемый неподвижным (относительно среды) источником, воспринимается наблюдателем, движущимся со скоростью $\mathbf{u}$. В покоящейся относительно среды системе K' имеем

---

[1]) Эта формула наглядно истолковывается с квантовой точки зрения: число звуковых квантов (фононов) $N = E/(\hbar\omega) = E_0/[\hbar(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})]$ не зависит от выбора системы отсчета.

$k = \omega_0/c$, где ω_0 — частота колебаний источника. В системе же K, движущейся вместе с наблюдателем, среда движется со скоростью $-\mathbf{u}$, и частота звука будет согласно (68.1) $\omega = ck - \mathbf{uk}$. Вводя угол θ между направлением скорости $\mathbf{u}$ и волнового вектора $\mathbf{k}$ и полагая $k = \omega_0/c$, найдем, что воспринимаемая движущимся наблюдателем частота звука равна

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right). \tag{68.4}$$

В некотором смысле обратным случаем является распространение в неподвижной среде звуковой волны, испускаемой движущимся источником. Пусть $\mathbf{u}$ обозначает теперь скорость движения источника. Перейдем от неподвижной системы координат к системе K', движущейся вместе с источником; в системе K' жидкость движется со скоростью $-\mathbf{u}$. В системе K', где источник покоится, частота излучаемой им звуковой волны должна быть равна частоте ω_0 колебаний, совершаемых источником. Изменив в (68.1) знак перед $\mathbf{u}$ и вводя угол θ между направлениями $\mathbf{u}$ и $\mathbf{k}$, будем иметь

$$\omega_0 = ck\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right).$$

С другой стороны, в исходной неподвижной системе K частота связана с волновым вектором равенством $\omega = ck$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \dfrac{u}{c}\cos\theta}. \tag{68.5}$$

Этой формулой определяется связь между частотой ω_0 колебаний движущегося источника звука и частотой ω звука, слышимого неподвижным наблюдателем.

Если источник удаляется от наблюдателя, то угол θ между его скоростью и направлением приходящей в точку наблюдения волной заключен в пределах $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, так что $\cos\theta < 0$. Из (68.5) следует, таким образом, что если источник движется, удаляясь от наблюдателя, то частота слышимого наблюдателем звука уменьшается (по сравнению с ω_0).

Напротив, для приближающегося к наблюдателю источника $0 \leqslant \theta < \pi/2$, так что $\cos\theta > 0$, и частота $\omega > \omega_0$ растет при увеличении скорости u. При $u\cos\theta > c$ согласно формуле (68.5) ω делается отрицательной, что соответствует тому, что слышимый наблюдателем звук будет в действительности доходить до него в обратном порядке, т. е. звук, излученный источником в более поздние моменты времени, дойдет до наблюдателя раньше, чем звук, излученный в более ранние моменты.

Как было указано в начале § 67, приближение геометрической акустики соответствует случаю достаточно малых длин волн,

т. е. больших значений волнового вектора. Для этого, вообще говоря, частота звука должна быть достаточно велика. Однако в акустике движущихся сред последнее условие становится не обязательным, если скорость движения среды превосходит скорость звука. Действительно, в этом случае k может быть большим даже при равной нулю частоте: из (68.1) получаем при $\omega = 0$ уравнение

$$ck = -\mathbf{uk}, \tag{68.6}$$

которое имеет решения, если $u > c$. Таким образом, в среде, движущейся со сверхзвуковыми скоростями, могут существовать стационарные малые возмущения, описывающиеся (при достаточно больших k) геометрической акустикой. Это значит, что такие возмущения будут располагаться вдоль определенных линий — лучей.

Рассмотрим, например, однородный сверхзвуковой поток, движущийся с постоянной скоростью $\mathbf{u}$, направление которой выберем в качестве оси x. Компоненты вектора $\mathbf{k}$, лежащего в плоскости xy, связаны соотношением

$$\left(u^2 - c^2\right)k_x^2 = c^2 k_y^2, \tag{68.7}$$

получающимся путем возведения в квадрат обеих частей равенства (68.6). Для определения формы лучей воспользуемся уравнениями геометрической акустики (67.4), согласно которым

$$\dot{x} = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial\omega}{\partial k_y}.$$

Разделив одно из этих уравнений на другое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\omega/\partial k_y}{\partial\omega/\partial k_x}.$$

Но это отношение есть согласно правилу дифференцирования неявных функций не что иное, как производная $-\partial k_x/\partial k_y$ (взятая при постоянной, в данном случае равной нулю, частоте). Таким образом, уравнение, определяющее форму лучей по заданной зависимости между k_x и k_y, гласит:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial k_x}{\partial k_y}. \tag{68.8}$$

Подставив сюда (68.7), получим

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}}.$$

При постоянном u это уравнение определяет два прямолинейных луча, пересекающих ось x под углами $\pm\alpha$, где $\sin\alpha = c/u$.

К подробному изучению этих лучей мы возвратимся в газодинамике, в которой они играют большую роль.

Задачи

1. Определить форму звуковых лучей, распространяющихся в стационарно движущейся среде с распределением скоростей $\mathbf{u}(x, y, z)$, причем везде $u \ll c$. Предполагается, что скорость $\mathbf{u}$ заметно меняется лишь на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны звука.

Решение. Подставляя (68.1) в (67.4), получим уравнения распространения лучей в виде

$$\dot{\mathbf{k}} = -(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{u} - [\mathbf{k}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}],$$

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = c\frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}.$$

С помощью этих уравнений вычисляем с точностью до членов первого порядка по $\mathbf{u}$ производную $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{kv})$; при вычислении используем равенство

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} \approx \frac{c}{k}(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{u}.$$

Получаем

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = -kv[\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}],$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{v}$. С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = \mathbf{n}\frac{d}{dt}(kv) + kv\frac{d\mathbf{n}}{dt}.$$

Поскольку $\mathbf{n}$ и $d\mathbf{n}/dt$ взаимно перпендикулярны (из $\mathbf{n}^2 = 1$ следует, что $\mathbf{n}\dot{\mathbf{n}} = 0$), то из сравнения обоих выражений находим $\dot{\mathbf{n}} = [\mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{n}]$. Вводя элемент проходимой лучом длины $dl = c\,dt$, пишем окончательно

$$\frac{d\mathbf{n}}{dl} = \frac{1}{c}[\mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{n}]. \qquad (1)$$

Этим уравнением определяется форма лучей; $\mathbf{n}$ есть единичный вектор касательной к лучу (отнюдь не совпадающий теперь с направлением $\mathbf{k}$!).

2. Определить форму звуковых лучей в движущейся среде с распределением скоростей $u_x = u(z)$, $u_y = u_z = 0$.

Решение. Раскрывая уравнение (1), находим

$$\frac{dn_x}{dl} = \frac{n_z}{c}\frac{du}{dz}, \qquad \frac{dn_y}{dl} = 0$$

(уравнение для n_z можно не писать, так как $\mathbf{n}^2 = 1$). Второе уравнение дает

$$n_y = \mathrm{const} \equiv n_{y0}.$$

В первом же пишем $n_z = dz/dl$, после чего интегрирование дает

$$n_x = n_{x0} + \frac{u(z)}{c}.$$

Эти формулы решают поставленную задачу.

Предположим, что скорость u равна нулю при $z = 0$ и возрастает по направлению вверх ($du/dz > 0$). Если звук распространяется «против ветра» ($n_x < 0$), то его траектория искривляется, загибаясь вверх. При распространении же «по ветру» ($n_x > 0$) луч искривляется, загибаясь вниз; в этом

случае луч, вышедший из точки $z = 0$ под малым углом наклона к оси x (n_{x0} близко к единице), поднимается лишь на конечную высоту $z = z_{\max}$, которую можно вычислить следующим образом. На высоте $z_{\max}$ луч горизонтален, т. е. $n_z = 0$. Поэтому имеем здесь:

$$n_x^2 + n_y^2 \approx n_{x0}^2 + n_{y0}^2 + 2n_{x0}\frac{u}{c} = 1,$$

так что

$$2n_{x0}\frac{u(z_{\max})}{c} = n_{z0}^2,$$

откуда по заданной функции $u(z)$ и начальному направлению луча $\mathbf{n}_0$ можно определить $z_{\max}$.

3. Получить выражение принципа Ферма для звуковых лучей в стационарно движущейся среде.

Р е ш е н и е. Принцип Ферма требует минимальности интеграла $\int \mathbf{k}\,d\mathbf{l}$, взятого вдоль луча между двумя заданными точками, причем $\mathbf{k}$ предполагается выраженным как функция от частоты ω и направления луча $\mathbf{n}$ (см. II, § 53). Эту функцию можно найти, исключая v и k из соотношений $\omega = ck + \mathbf{uk}$ и $v\mathbf{n} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{u}$. В результате принцип Ферма приобретает вид

$$\delta \int \frac{1}{c^2 - u^2}\left[\sqrt{(c^2 - u^2)\,dl^2 + (\mathbf{u}\,d\mathbf{l})^2} - \mathbf{u}\,d\mathbf{l}\right] = 0.$$

В неподвижной среде этот интеграл сводится к обычному $\displaystyle\int \frac{dl}{c}$.

§ 69. Собственные колебания

До сих пор мы рассматривали колебательное движение в неограниченных средах. Мы видели, в частности, что в таких средах могут распространяться волны с произвольными частотами.

Положение существенно меняется для жидкости, находящейся в сосуде конечных размеров. Сами уравнения движения (волновые уравнения) остаются при этом, конечно, теми же, но к ним необходимо добавить теперь граничные условия, которые должны выполняться на поверхности твердых стенок (или на свободной поверхности жидкости). Мы будем рассматривать здесь только свободные колебания, происходящие при отсутствии переменных внешних сил (колебания, совершаемые под действием внешних сил, называют *вынужденными*).

Уравнения движения для ограниченной жидкости отнюдь не при всякой частоте имеют решение, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям. Такие решения существуют лишь для ряда вполне определенных значении ω. Другими словами, в среде конечного объема могут происходить свободные колебания лишь с вполне определенными частотами. Их называют частотами *собственных колебаний*, или *собственными частотами* жидкости в данном сосуде.

Конкретные значения собственных частот зависят от формы и размеров сосуда. В каждом данном случае существует беско-

нечный ряд возрастающих собственных частот. Нахождение их требует конкретного исследования уравнения движения с соответствующими граничными условиями.

Что касается первой, т. е. наименьшей, из собственных частот, то ее порядок величины очевиден непосредственно из соображений размерности. Единственным, входящим в задачу параметром с размерностью длины являются линейные размеры l тела. Ясно поэтому, что соответствующая первой собственной частоте длина волны λ_1 должна быть порядка величины l; порядок величины самой частоты ω_1 определяется делением скорости звука на λ_1. Таким образом,

$$\lambda_1 \sim l, \quad \omega_1 \sim c/l. \tag{69.1}$$

Выясним характер движения при собственных колебаниях. Если искать периодическое по времени решение волнового уравнения, скажем, для потенциала скорости, в виде $\varphi = \varphi_0(x, y, z) \times \times e^{-i\omega t}$, то для φ_0 будем иметь уравнение

$$\Delta\varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0. \tag{69.2}$$

В неограниченной среде, когда не надо учитывать никаких граничных условий, это уравнение обладает как вещественными, так и комплексными решениями. В частности, оно имеет решение, пропорциональное $e^{i\mathbf{kr}}$, приводящее к потенциалу вида $\varphi = \text{const}\cdot e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$. Такое решение представляет собой волну, распространяющуюся с определенной скоростью, или, как говорят, бегущую волну.

Но для среды конечного объема комплексные решения, вообще говоря, не могут существовать. В этом можно убедиться путем следующего рассуждения. Уравнение, которому удовлетворяет φ_0, вещественно, и то же самое относится к граничным условиям. Поэтому, если $\varphi_0(x, y, z)$ есть решение уравнений движения, то и комплексно сопряженное φ_0^* тоже есть решение. Поскольку, с другой стороны, решение уравнений при заданных граничных условиях, вообще говоря, однозначно [1]) (с точностью до постоянного множителя), то должно быть $\varphi_0^* = \text{const}\cdot\varphi_0$, где const — некоторая комплексная постоянная, модуль которой равен единице. Таким образом, φ_0 должно иметь вид

$$\varphi_0 = f(x, y, z)e^{-i\alpha}$$

с вещественной функцией f и вещественной постоянной α. Потенциал φ имеет, следовательно, вид (берем вещественную часть от $\varphi_0 e^{-i\omega t}$):

$$\varphi = f(x, y, z)\cos(\omega t + \alpha), \tag{69.3}$$

[1]) Это может не иметь места в случае формы сосуда, обладающей высокой симметрией, например, в случае шара.

т. е. является произведением некоторой функции координат на периодическую функцию времени.

Такое решение имеет характер, совершенно отличный от бегущей волны. В бегущей волне фазы $\mathbf{kr} - \omega t + \alpha$ колебаний в различных точках пространства в один и тот же момент времени различны, будучи равными только в точках, удаленных друг от друга на расстояние, равное длине волны. В волне же (69.3) в каждый момент времени все точки тела колеблются в одной и той же фазе $(\omega t + \alpha)$. Ни о каком распространении такой волны, очевидно, нельзя говорить. Такие волны называют *стоячими*. Таким образом, собственные колебания представляют собой стоячие волны.

Рассмотрим плоскую стоячую звуковую волну, в которой все величины являются функцией только от одной координаты, скажем, x (и от времени). Написав общее решение уравнения

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0$$

в виде $\varphi_0 = a\cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right)$, будем иметь

$$\varphi = a\cos(\omega t + \alpha)\cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right).$$

Надлежащим выбором начала координат и начала отсчета времени можно обратить α и β в нуль, так что будет

$$\varphi = a\cos(\omega t)\cos\frac{\omega}{c}x. \tag{69.4}$$

Для скорости и давления в волне имеем

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -a\frac{\omega}{c}\cos\omega t\sin\frac{\omega}{c}x,$$

$$p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho\omega\sin\omega t\cos\frac{\omega}{c}x.$$

В точках $x = 0,\ \pi c/\omega,\ 2\pi c/\omega,\ \ldots$, удаленных друг от друга на расстояние $\pi c/\omega = \lambda/2$, скорость v всегда равна нулю: эти точки называют *узлами* скорости. Посередине между ними (при $x = \pi c/(2\omega),\ 3\pi c/(2\omega),\ \ldots$) расположены точки, в которых амплитуда колебаний скорости со временем максимальна; эти точки называют *пучностями* волны. Что же касается давления p', то для него первые точки являются пучностями, а вторые — узлами. Таким образом, в стоячей плоской звуковой волне пучности давления совпадают с узлами скорости, и обратно.

Интересным случаем собственных колебаний являются колебания газа, находящегося в сосуде, в котором имеется маленькое отверстие (такой сосуд называют резонатором). В замкнутом сосуде наименьшая из собственных частот, как мы знаем, — порядка величины c/l, где l — линейные размеры сосуда. При наличии

же маленького отверстия появляется новый вид собственных колебаний со значительно меньшей частотой. Эти колебания связаны с тем, что если между газом внутри и вне сосуда появляется разность давлений, то эта разность может выравниваться посредством входа и выхода газа из сосуда наружу. Таким образом, появляются колебания, сопровождающиеся обменом газа между резонатором и внешней средой. Поскольку отверстие мало, то этот обмен происходит медленно; поэтому период колебаний велик, а частота соответственно мала (см. задачу 2). Что касается обычных колебаний, имеющихся в замкнутом сосуде, то их частоты под влиянием наличия малого отверстия практически не меняются.

Задачи

1. Определить собственные частоты звуковых колебаний жидкости в сосуде, имеющем форму параллелепипеда.

Решение. Ищем решение уравнения (69.2) в виде

$$\varphi_0 = \text{const} \cdot \cos qx \cos ry \cos sz,$$

причем $q^2 + r^2 + s^2 = \omega^2/c^2$. На стенках сосуда имеем условия:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0,\ a,$$

н аналогично при $y = 0$, b и $z = 0$, c, где a, b, c — длины сторон параллелепипеда. Отсюда находим $q = m\pi/a$, $r = n\pi/b$, $s = p\pi/c$, где m, n, p — произвольные целые числа. Таким образом, собственные частоты равны

$$\omega^2 = c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right).$$

2. К отверстию резонатора присоединена тонкая трубочка (сечения S, длины l); определить собственную частоту колебаний.

Решение. Поскольку трубочка является тонкой, то при колебаниях, сопровождающихся входом и выходом газа из резонатора, можно считать, что заметной скоростью обладает только газ в трубочке, а скорость газа внутри сосуда практически равна нулю. Масса газа в трубочке есть $S\rho l$, а сила, действующая на него, есть $S(p_0 - p)$ (p, p_0 — давления газа соответственно внутри резонатора и во внешней среде); поэтому должно быть $S\rho l\dot{v} = S(p - p_0)$ (v — скорость газа в трубочке). С другой стороны, для производной от давления по времени имеем $\dot{p} = c^2\dot{\rho}$, а уменьшение $-\dot{\rho}$ плотности газа в резонаторе в единицу времени можно считать равным вытекающему в единицу времени количеству газа $S\rho v$, деленному на объем V резонатора. Таким образом, имеем $\dot{p} = -\dfrac{c^2S\rho}{V}v$, откуда

$$\ddot{p} = -\frac{c^2S\rho}{V}\dot{v} = -\frac{c^2S}{lV}(p - p_0).$$

Это уравнение дает $p - p_0 = \text{const} \cdot \cos\omega_0 t$, где собственная частота ω_0 равна

$$\omega_0 = c\sqrt{\frac{S}{lV}}.$$

Эта частота мала по сравнению с c/L (L — линейные размеры сосуда), а длина волны соответственно велика по сравнению с L.

При решении мы подразумевали, что линейная амплитуда колебаний газа в трубочке мала по сравнению с ее длиной l. В противном случае колебания сопровождаются выходом из трубочки наружу заметной доли находящегося в ней газа, и становится неприменимым использованное выше линейное уравнение движения газа в трубочке.

§ 70. Сферические волны

Рассмотрим звуковую волну, в которой распределение плотности, скорости и т. д. зависит только от расстояния до некоторого центра, т. е. обладает сферической симметрией. Такая волна называется сферической.

Определим общее решение волнового уравнения, описывающее сферическую волну. Будем писать волновое уравнение, например, для потенциала скорости:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Поскольку φ есть функция только от расстояния r до центра (и от времени t), то, воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в сферических координатах, имеем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right). \tag{70.1}$$

Положив $\varphi = f(r, t)/r$, получим для функции $f(r, t)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},$$

т. е. обычное волновое уравнение в одном измерении, в котором роль координаты играет радиус r. Решение этого уравнения есть, как мы знаем,

$$f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r),$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Таким образом, общее решение уравнения (70.1) имеет вид

$$\varphi = \frac{f_1(ct - r)}{r} + \frac{f_2(ct + r)}{r}. \tag{70.2}$$

Первый член представляет собой расходящуюся волну, распространяющуюся во все стороны из начала координат. Второй же член есть волна, сходящаяся к центру. В отличие от плоской волны, амплитуда которой остается постоянной, в сферической волне амплитуда падает обратно пропорционально расстоянию до центра. Интенсивность же волны, определяющаяся квадратом амплитуды, обратно пропорциональна квадрату расстояния, как

и должно было быть, поскольку полный поток энергии в волне распределяется по поверхности, площадь которой растет пропорционально r^2.

Переменные части давления и плотности связаны с потенциалом через

$$p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \rho' = -\frac{\rho}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

и их распределение определяется формулами того же вида, что и (70.2). Распределение же скорости (радиальной), определяющейся градиентом потенциала, имеет вид

$$v = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{f_1(ct-r)+f_2(ct+r)}{r}\right\}. \tag{70.3}$$

Если в начале координат нет источника звука, то потенциал (70.2) должен оставаться при $r = 0$ конечным. Для этого необходимо, чтобы было $f_1(ct) = -f_2(ct)$, т. е.

$$\varphi = \frac{f(ct-r) - f(ct+r)}{r} \tag{70.4}$$

(стоячая сферическая волна). Если же в начале координат находится источник, то потенциал излучаемой им расходящейся волны есть $\varphi = f(ct-r)/r$ и не должен оставаться конечным при $r = 0$, поскольку это решение вообще относится только к области вне тела.

Монохроматическая стоячая сферическая волна имеет вид

$$\varphi = Ae^{-i\omega t}\frac{\sin kr}{r}, \tag{70.5}$$

где $k = \omega/c$. Расходящаяся же монохроматическая сферическая волна дается выражением

$$\varphi = A\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}. \tag{70.6}$$

Полезно заметить, что это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi Ae^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r}), \tag{70.7}$$

в правой части которого стоит δ-функция координат: $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Действительно, везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{r}) = 0$, и мы возвращаемся к однородному уравнению (70.1). Интегрируя же по объему малой сферы вокруг начала координат $\left(\text{в этой области выражение (70.6) сводится к } \frac{A}{r}e^{-i\omega t}\right)$, получим с обеих сторон $-4\pi Ae^{-i\omega t}$.

Рассмотрим сферическую расходящуюся волну, занимающую в пространстве область в виде шарового слоя, позади которого

движение либо отсутствует вовсе, либо быстро затухает; такая волна может возникнуть от источника, действовавшего в течение конечного интервала времени, или от некоторой начальной области звукового возмущения (ср. конец § 72 и задачу 4 § 74). Перед приходом волны в некоторую заданную точку пространства потенциал в ней $\varphi \equiv 0$. После же ее прохождения движение снова должно затухнуть; это значит, что во всяком случае должно стать $\varphi = \text{const}$. Но в сферической расходящейся волне потенциал есть функция вида $\varphi = f(ct - r)/r$; такая функция может обратиться в постоянную, только если функция f обращается в нуль. Таким образом, потенциал должен обращаться в нуль как до, так и после прохождения волны [1]. Из этого обстоятельства можно вывести важное следствие, касающееся распределения сгущений и разрежений в сферической волне.

Изменение давления в волне связано с потенциалом соотношением $p' = -\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$. Ввиду сказанного выше ясно, что если проинтегрировать p' по всему времени при заданном r, то мы получим в результате нуль:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p'\,dt = 0. \tag{70.8}$$

Это значит, что по мере прохождения сферической волны через заданную точку пространства в этой точке будут наблюдаться как сгущения ($p' > 0$), так и разрежения ($p' < 0$). В этом отношении сферическая волна существенным образом отличается от плоской, которая может состоять и из одних только сгущений или разрежений.

Такая же картина будет наблюдаться также и при рассмотрении хода изменения p' с расстоянием в заданный момент времени; при этом вместо интеграла (70.8) равен нулю будет интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} rp'\,dr = 0. \tag{70.9}$$

Задачи

1. В начальный момент времени газ внутри сферического объема (радиуса a) сжат так, что $\rho' = \text{const} \equiv \Delta$; вне этого объема $\rho' = 0$. Начальная скорость равна нулю во всем пространстве. Определить последующее движение газа.

Р е ш е н и е. Начальные условия для потенциала $\varphi(r, t)$ гласят:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \dot\varphi(r, 0) = F(r),$$

[1]) В противоположность плоской волне, после прохождения которой может быть $\varphi = \text{const} \neq 0$.

где

$$F(r) = 0 \quad \text{при} \quad r > a, \quad F(r) = -\Delta c^2/\rho \quad \text{при} \quad r < a.$$

Ищем φ в виде (70.4) и из начальных условий находим

$$f(-r) - f(r) = 0, \quad f'(-r) - f'(r) = \frac{r}{c}F(r).$$

Отсюда

$$f'(r) = -f'(-r) = -\frac{r}{2c}F(r).$$

Наконец, подставив значение $F(r)$, получаем для производной $f'(\xi)$ и для самой функции $f(\xi)$ следующий результат:

$$\text{при } |\xi| > a: \quad f'(\xi) = 0, \qquad f(\xi) = 0;$$

$$\text{при } |\xi| < a: \quad f'(\xi) = \frac{c\Delta}{2\rho}\xi, \quad f(\xi) = \frac{c\Delta}{4\rho}(\xi^2 - a^2),$$

чем и определяется решение задачи. Рассмотрим точку с $r > a$, т. е. вне области начального сжатия; для плотности ρ' имеем здесь:

$$\text{при } t < (r-a)/c \qquad \rho' = 0;$$

$$\text{при } (r-a)/c < t < (r+a)/c \quad \rho' = \frac{\Delta}{2}\frac{r-ct}{r};$$

$$\text{при } t > (r+a)/c \qquad \rho' = 0.$$

Волна проходит через данную точку в течение промежутка времени, равного $2a/c$; другими словами, волна имеет форму шарового слоя толщины $2a$, заключенного в момент t между сферами радиусов $ct - a$ и $ct + a$. Внутри этого слоя плотность меняется по линейному закону, причем в наружной его части ($r > ct$) газ сжат ($\rho' > 0$), а во внутренней ($r < ct$) — разрежен ($\rho' < 0$).

2. Определить собственные частоты центрально-симметрических звуковых колебаний в сферическом сосуде.

Р е ш е н и е. Из граничного условия $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ при $r = a$ (a — радиус сосуда, φ — из (70.5)) получим уравнение

$$\operatorname{tg} ka = ka,$$

определяющее собственные частоты. Первая (наименьшая) частота равна $\omega_1 = 4{,}49c/a$.

§ 71. Цилиндрические волны

Рассмотрим теперь волну, в которой распределение всех величин однородно вдоль некоторого одного направления (которое мы выберем в качестве оси z) и обладает полной аксиальной симметрией вокруг этой оси. В такой, как говорят, цилиндрической волне имеем $\varphi = \varphi(r, t)$, где буквой R обозначается расстояние до оси z. Определим общий вид такого осесимметрического решения волнового уравнения. Это можно сделать, исходя из общего вида сферически симметричного решения (70.2). Расстояние R

связано с r соотношением $r^2 = R^2 + z^2$, так что φ, определяемое формулой (70.2), зависит при заданных t и R также и от z. Функцию, зависящую только от R и t и в то же время удовлетворяющую волновому уравнению, можно получить интегрированием выражения (70.2) по всем значениям z от $-\infty$ до $+\infty$, или, что то же, от 0 до ∞. Перейдем от интегрирования по z к интегрированию по r:

$$z = \sqrt{r^2 - R^2}, \quad dz = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - R^2}};$$

при изменении z от 0 до ∞ r меняется в пределах между R и ∞. Поэтому находим окончательно общий вид осесимметричного решения:

$$\varphi = \int_R^\infty \frac{f_1(ct - r)}{\sqrt{r^2 - R^2}}\,dr + \int_R^\infty \frac{f_2(ct + r)}{\sqrt{r^2 - R^2}}\,dr, \tag{71.1}$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Первый член представляет собой расходящуюся, а второй — сходящуюся цилиндрическую волну.

Производя в этих интегралах замену переменных $ct \pm r = \xi$, перепишем формулу (71.1) в виде

$$\varphi = \int_{-\infty}^{ct-R} \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(ct - \xi)^2 - R^2}} + \int_{ct+R}^{\infty} \frac{f_2(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\xi - ct)^2 - R^2}}. \tag{71.2}$$

Мы видим, что значение потенциала в момент времени t (в точке R) в расходящейся цилиндрической волне определяется значениями функции $f_1(t)$ в течение всего времени от $-\infty$ до $t - R/c$; аналогично в сходящейся волне существенны значения функции $f_2(t)$ в течение всего времени от $t + R/c$ до ∞.

Как и в сферическом случае, стоячие цилиндрические волны получаются при $f_1(\xi) = -f_2(\xi)$. Можно показать, что стоячая цилиндрическая волна может быть представлена также и в следующем виде:

$$\varphi = \int_{ct-R}^{ct+R} \frac{F(\xi)\,d\xi}{\sqrt{R^2 - (\xi - ct)^2}}, \tag{71.3}$$

где $F(\xi)$ — снова произвольная функция.

Выведем выражение для потенциала монохроматической цилиндрической волны. Волновое уравнение для потенциала $\varphi(R, t)$ в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

В монохроматической волне $\varphi = e^{-i\omega t} f(R)$ и для функции $f(R)$ получаем уравнение

$$f'' + \frac{1}{R} f' + k^2 f = 0.$$

Это — уравнение функций Бесселя нулевого порядка. В стоячей цилиндрической волне φ должно оставаться конечным при $R = 0$; соответствующим решением является $J_0(kR)$, где J_0 — функция Бесселя первого рода. Таким образом, в стоячей цилиндрической волне

$$\varphi = A e^{-i\omega t} J_0(kR). \tag{71.4}$$

При $R = 0$ функция J_0 обращается в единицу, так что амплитуда волны стремится к конечной величине A. На больших же расстояниях R функцию J_0 можно заменить ее известным асимптотическим выражением, в результате чего волна приобретет вид

$$\varphi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(kR - \pi/4)}{\sqrt{kR}} e^{-i\omega t}. \tag{71.5}$$

Решение же, соответствующее монохроматической бегущей расходящейся волне, есть

$$\varphi = A e^{-i\omega t} H_0^{(1)}(kR), \tag{71.6}$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля. При $R \to 0$ это выражение имеет логарифмическую особенность:

$$\varphi \approx A \frac{2i}{\pi} \ln kR \cdot e^{-i\omega t}. \tag{71.7}$$

На больших же расстояниях имеет место асимптотическая формула

$$\varphi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp\left[i(kR - \omega t - \pi/4)\right]}{\sqrt{kR}}. \tag{71.8}$$

Мы видим, что амплитуда цилиндрической волны падает (на больших расстояниях) обратно пропорционально корню из расстояния до оси, а интенсивность соответственно, как $1/R$. Этот результат естествен, поскольку по мере распространения волны полный поток энергии в ней распределяется по цилиндрической поверхности, площадь которой растет пропорционально R.

Цилиндрическая расходящаяся волна существенно отличается от сферической или плоской в том отношении, что она может иметь передний фронт, но не может иметь заднего фронта: после того как звуковое возмущение дойдет до заданной точки пространства, оно уже не прекращается в ней, лишь сравнительно

медленно затухая асимптотически при $t \to \infty$. Пусть функция $f_1(\xi)$ в первом члене в (71.2) отлична от нуля лишь в некотором конечном интервале значений $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$. Тогда в моменты времени $ct > R + \xi_2$ будем иметь

$$\varphi = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(ct-\xi)^2 - R^2}}.$$

При $t \to \infty$ это выражение стремится к пулю по закону

$$\varphi = \frac{1}{ct} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} f_1(\xi)\,d\xi,$$

т. е. обратно пропорционально времени.

Таким образом, потенциал расходящейся цилиндрической волны, возникшей от действовавшего в течение конечного времени источника, хотя и медленно, но обращается в нуль при $t \to \infty$. Это обстоятельство приводит, как и в сферическом случае, к равенству нулю интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p'\,dt = 0. \tag{71.9}$$

Поэтому цилиндрическая волна, как и сферическая, непременно должна содержать в себе как сгущения, так и разрежения.

§ 72. Общее решение волнового уравнения

Выведем теперь общую формулу, определяющую решение волнового уравнения в неограниченной жидкости по заданным начальным условиям, т. е. определяющую распределение скоростей и давления в жидкости в произвольный момент времени по их распределению в начальный момент.

Предварительно получим некоторые вспомогательные формулы. Пусть будут $\varphi(x,\,y,\,z,\,t)$ и $\psi(x,\,y,\,z,\,t)$ — два каких-либо решения волнового уравнения, обращающиеся на бесконечности в нуль. Рассмотрим интеграл

$$I = \int (\varphi\dot{\psi} - \psi\dot{\varphi})\,dV,$$

взятый по всему пространству, и вычислим его производную по времени. Помня, что φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi - c^{-2}\ddot{\varphi} = 0,\ \ \Delta\psi - c^{-2}\ddot{\psi} = 0,$$

имеем

$$\frac{dI}{dt} = \int (\varphi\ddot{\psi} - \psi\ddot{\varphi})\, dV =$$
$$= c^2 \int (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dV = c^2 \int \operatorname{div}(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\, dV.$$

Последний интеграл может быть преобразован в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и потому обращается в нуль. Таким образом, мы приходим к результату, что $dI/dt = 0$, т. е. I есть не зависящая от времени постоянная:

$$I \equiv \int (\varphi\dot{\psi} - \psi\dot{\varphi})\, dV = \text{const}. \tag{72.1}$$

Рассмотрим, далее, частное решение волнового уравнения:

$$\psi = \frac{\delta[r - c(t_0 - t)]}{r}, \tag{72.2}$$

где r — расстояние от некоторой заданной точки O пространства, t_0 — некоторый определенный момент времени, а δ обозначает δ-функцию. Вычислим интеграл от ψ по пространству:

$$\int \psi\, dV = \int_0^\infty 4\pi\psi r^2\, dr = 4\pi \int_0^\infty r\delta[r - c(t_0 - t)]\, dr.$$

Аргумент у δ-функции обращается в нуль при $r = c(t_0 - t)$ (предполагается, что $t_0 > t$). Поэтому в силу свойств δ-функции имеем

$$\int \psi\, dV = 4\pi c(t_0 - t). \tag{72.3}$$

Дифференцируя это равенство по t, получаем

$$\int \dot{\psi}\, dV = -4\pi c. \tag{72.4}$$

Подставим теперь в интеграл (72.1) в качестве ψ функцию (72.2), а под φ будем понимать искомое общее решение волнового уравнения. Согласно (72.1) I есть величина постоянная; на этом основании напишем выражения для I в моменты времени $t = 0$ и $t = t_0$ и приравняем их друг другу. При $t = t_0$ обе функции ψ и $\dot{\psi}$ отличны от нуля только при $r = 0$. Поэтому при интегрировании можно положить r в φ и $\dot{\varphi}$ равным нулю (т. е. взять значения в точке O) и вынести φ и $\dot{\varphi}$ из-под знака интеграла:

$$I = \varphi(x,\, y,\, z,\, t_0) \int \dot{\psi}\, dV - \dot{\varphi}(x,\, y,\, z,\, t_0) \int \psi\, dV$$

(x, y, z — координаты точки O). Согласно (72.3) и (72.4) второй член здесь обращается при $t = t_0$ в нуль, а первый дает

$$I = -4\pi c\varphi(x,\, y,\, z,\, t_0).$$

Вычислим теперь I при $t = 0$. Написав $\dot{\psi} = \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial t_0}$ и обозначая через φ_0 значение функции φ при $t = 0$, имеем

$$I = -\int\Big(\varphi_0\frac{\partial\psi}{\partial t_0} + \dot{\varphi}_0\psi\Big)\,dV = -\frac{\partial}{\partial t_0}\int\varphi_0\psi\Big|_{t=0}dV - \int\dot{\varphi}_0\psi\Big|_{t=0}dV.$$

Элемент объема запишем в виде $dV = r^2\,dr\,do$ (do — элемент телесного угла), тогда в силу свойств δ-функции получаем

$$\int\dot{\varphi}_0\psi\Big|_{t=0}dV = \int\varphi_0 r\delta(r - ct_0)\,dr\,do = ct_0\int\varphi_0\Big|_{r=ct_0}do$$

(и аналогично для интеграла от $\dot{\varphi}_0\psi$). Таким образом,

$$I = -\frac{\partial}{\partial t_0}\Big(ct_0\int\varphi_0\Big|_{r=ct_0}do\Big) - ct_0\int\dot{\varphi}_0\Big|_{r=ct_0}do.$$

Наконец, приравнивая оба выражения для I и опуская индекс нуль у t_0, получаем окончательно:

$$\varphi(x,\,y,\,z,\,t) = \frac{1}{4\pi}\Big\{\frac{\partial}{\partial t_0}\Big(t\int\varphi_0\Big|_{r=ct}do\Big) + t\int\dot{\varphi}_0\Big|_{r=ct}do\Big\}. \qquad (72.5)$$

Эта *формула Пуассона* определяет распределение потенциала в пространстве в любой момент времени, если задано распределение потенциала и его производной по времени (что эквивалентно заданию распределения скорости и давления) в некоторый начальный момент времени. Мы видим, что значение потенциала в момент времени t определяется значениями φ и $\dot{\varphi}$, которые они имели в момент времени $t = 0$ на поверхности сферы с радиусом $r = ct$ и центром в точке O.

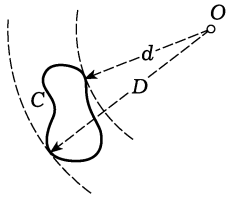


Рис. 44

Предположим, что в начальный момент времени φ и $\dot{\varphi}$ были отличны от нуля только в некоторой конечной области пространства, ограниченной замкнутой поверхностью C (рис. 44). Рассмотрим значения, которые будет принимать φ в последующие моменты в некоторой точке O. Эти значения определяются значениями φ, $\dot{\varphi}$ на расстоянии $r = ct$ от точки O. Но сферы радиусов ct проходят через область внутри поверхности только при $d/c \leqslant t \leqslant D/c$, где d и D — наименьшее и наибольшее расстояния от точки O до поверхности C. В другие моменты времени подынтегральные выражения в (72.5) обратятся в нуль. Таким образом, движение в точке O начнется в момент $t = d/c$ и закончится в момент $t = D/c$. Распространяющаяся из области C волна имеет два фронта: передний и задний. Движение в жидкости начинается, когда к данной ее точке подходит поверхность переднего фронта, на заднем же фронте колебавшиеся ранее точки приходят в состояние покоя.

З а д а ч а

Вывести формулу, определяющую потенциал по начальным условиям для волны, зависящей только от двух координат: x и y.

Р е ш е н и е. Элемент поверхности сферы радиуса $r = ct$ можно, с одной стороны, написать в виде $df = c^2t^2do$, где do — элемент телесного угла. С другой стороны, проекция df на плоскость xy равна

$$dx\,dy = df\frac{\sqrt{(ct)^2-\rho^2}}{ct},$$

где ρ есть расстояние от центра шара до точки x, y. Сравнив оба выражения, можно написать

$$do = \frac{dx\,dy}{ct\sqrt{(ct)^2-\rho^2}}.$$

Обозначая координаты точки наблюдения через x, y, а координаты переменной точки в области интегрирования через ξ, η, мы можем, следовательно, в рассматриваемом случае заменить do в общей формуле (72.5) на

$$\frac{d\xi\,d\eta}{ct\sqrt{(ct)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}},$$

удвоив при этом получающееся выражение, поскольку $dx\,dy$ представляет собой проекцию двух элементов поверхности сферы, находящихся по разные стороны от плоскости xy. Таким образом, окончательно получаем

$$\varphi(x,\,y,\,z,\,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint\frac{\varphi_0(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(ct)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi c}\iint\frac{\dot\varphi_0(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(ct)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}},$$

где интегрирование производится по поверхности круга с центром в точке O и радиусом $r = ct$. Если в начальный момент φ_0, $\dot\varphi_0$ отличны от нуля только в конечной области C плоскости xy (точнее — в некоторой цилиндрической области пространства с образующими, параллельными оси z), то колебания в точке O (рис. 44) начнутся в момент времени $t = d/c$, где d — ближайшее расстояние от O до этой области. Но в дальнейшем круги радиуса $ct > d$ с центром в точке O всегда будут заключать в себе часть или всю площадь области C, и φ будет стремиться к нулю только асимптотически. Таким образом, в отличие от «трехмерных» волн рассмотренные здесь двумерные волны имеют передний, но не имеют заднего фронта (ср. § 71).

§ 73. Боковая волна

Отражение сферической волны от границы раздела между двумя средами представляет особый интерес ввиду того, что оно может сопровождаться своеобразным явлением возникновения *боковой волны.*

Пусть Q (рис. 45) — источник сферической звуковой волны, находящийся (в первой среде) на расстоянии l от плоской неограниченной поверхности раздела между двумя средами *1* и *2*. Расстояние l произвольно и отнюдь не должно быть большим по

сравнению с длиной волны λ. Плотности двух сред и скорости звука в них пусть будут ρ_1, ρ_2 и c_1, c_2.

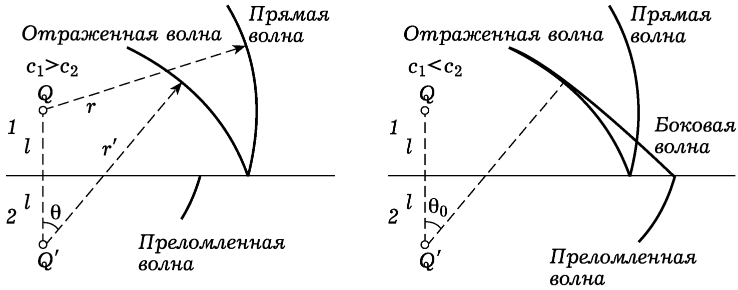


Рис. 45

Предположим сначала, что $c_1 > c_2$. Тогда на больших (по сравнению с λ) расстояниях от источника движение в первой среде будет представлять собой совокупность двух расходящихся волн. Одна из них есть сферическая волна, непосредственно испускаемая источником (*прямая волна*); ее потенциал

$$\varphi_1^{(0)} = \frac{e^{ikr}}{r}, \tag{73.1}$$

где r — расстояние от источника, а амплитуду мы условно полагаем равной единице; множители $e^{-i\omega t}$ во всех выражениях мы будем в этом параграфе для краткости опускать.

Вторая же — отраженная — волна имеет волновые поверхности, представляющие собой сферы с центром в точке Q' (зеркальное отображение источника Q в плоскости раздела); это есть геометрическое место точек P, до которых в один и тот же промежуток времени доходят лучи, одновременно вышедшие из точки Q и отразившиеся по законам геометрической акустики от поверхности раздела (на рис. 46 луч QAP с углами падения и отражения θ). Амплитуда отраженной волны убывает обратно пропорционально расстоянию r' от точки Q' (последнюю называют иногда мнимым источником), но зависит, кроме того, и от угла θ — так, как если бы каждый луч отражался с коэффициентом, соответствующим отражению плоской волны с данным углом падения θ. Другими словами, на больших расстояниях отраженная волна описывается формулой

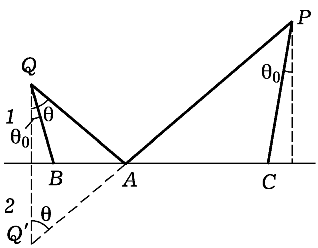


Рис. 46

$$\varphi_1' = \frac{e^{ikr'}}{r'}\left[\frac{c_2\rho_2\cos\theta - \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2\sin^2\theta}}{c_2\rho_2\cos\theta + \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2\sin^2\theta}}\right] \tag{73.2}$$

(ср. формулу (66.4) для коэффициента отражения плоской волны). Эта формула, справедливость которой (для больших r') сама по себе естественна, может быть строго выведена указанным ниже способом.

Более интересен случай, когда

$$c_1 < c_2.$$

Здесь наряду с обычной отраженной волной (73.2) в первой среде появляется еще одна волна, основные свойства которой можно усмотреть уже из следующих простых соображений.

Обычный отраженный луч QAP (рис. 46) удовлетворяет принципу Ферма в том смысле, что это есть путь наиболее быстрого пробега из точки Q в P из всех путей, лежащих целиком в среде *1* и испытывающих однократное отражение. Но принципу Ферма удовлетворяет (при $c_1 < c_2$) и другой путь: луч падает на границу под углом полного внутреннего отражения θ_0 ($\sin\theta_0 = c_1/c_2$), затем распространяется по среде *2* вдоль границы раздела и, наконец, снова переходит в среду *1* под углом θ_0 ($QBCP$ на рис. 46); очевидно, что должно быть $\theta > \theta_0$. Легко видеть, что такой путь тоже обладает экстремальным свойством: время пробега по нему меньше, чем по любому другому пути из Q в P, частично проходящему во второй среде.

Геометрическое место точек P, до которых в один и тот же момент времени доходят лучи, одновременно вышедшие из Q вдоль пути QB и затем перешедшие снова в среду *1* в различных точках C, есть, очевидно, коническая поверхность, образующие которой перпендикулярны к прямым, проведенным из «мнимого источника» Q' под углом θ_0.

Таким образом, если $c_1 < c_2$, то наряду с обычной отраженной волной со сферическим фронтом в первой среде будет распространяться еще одна волна с коническим фронтом, простирающимся от плоскости раздела (на котором он смыкается с фронтом преломленной волны во второй среде) до касания фронта сферической отраженной волны (последнее происходит по линии пересечения с конусом, с углом раствора θ_0 и осью вдоль линии QQ' см. рис. 45). Эту коническую волну называют *боковой*.

Путем простого подсчета легко убедиться в том, что время пробега вдоль пути $QBCP$ (рис. 46) меньше, чем время пробега по пути QAP, ведущему в ту же точку наблюдения P. Это значит, что звуковой сигнал из источника Q доходит до точки наблюдения P сначала в виде боковой волны, и лишь затем в эту точку приходит обычная отраженная волна.

Следует иметь в виду, что боковая волна представляет собой эффект волновой акустики, несмотря на то, что она допускает изложенное наглядное истолкование с помощью представлений геометрической акустики. Мы увидим ниже, что амплитуда боковой волны обращается в нуль в пределе $\lambda \to 0$.

Переходим теперь к количественному расчету. Распространение монохроматической звуковой волны, создаваемой точечным источником, описывается уравнением (70.7):

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{l}), \tag{73.3}$$

где $k = \omega/c$, а $\mathbf{l}$ — радиус-вектор источника. Коэффициент при δ-функции выбран таким, чтобы прямая волна имела вид (73.1). Ниже мы выбираем систему координат с плоскостью xy в плоскости раздела и осью z вдоль QQ': первой среде соответствуют $z > 0$. На границе раздела должны быть непрерывными давление и z-компонента скорости, или, что то же, величины $\rho\varphi$ и $\partial\varphi/\partial z$.

Следуя общему методу Фурье, имеем решение в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varkappa(z) e^{i(\varkappa_x x + \varkappa_y y)}\, d\varkappa_x\, d\varkappa_y, \tag{73.4}$$

$$\varphi_\varkappa(z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi e^{-i(\varkappa_x x + \varkappa_y y)}\, dx\, dy. \tag{73.5}$$

Из симметрии в плоскости xy заранее очевидно, что $\varphi_\varkappa$ может зависеть только от абсолютной величины $\varkappa^2 = \varkappa_x^2 + \varkappa_y^2$. Воспользовавшись известной формулой

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(u \sin\varphi)\, d\varphi,$$

можно поэтому представить (73.4) в виде

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \varphi_\varkappa(z) J_0(\varkappa R) \varkappa\, d\varkappa, \tag{73.6}$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ — цилиндрическая координата (расстояние от оси z). Для дальнейших вычислений будет удобно преобразовать эту формулу к виду, в котором интеграл берется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, выразив подынтегральное выражение через функцию Ганкеля $H_0^{(1)}(u)$. Последняя имеет, как известно, логарифмическую особенность в точке $u = 0$; если условиться переходить от положительных к отрицательным вещественным значениям u, обходя (в плоскости комплексного переменного u) точку $u = 0$ сверху, то будет справедливо соотношение

$$H_0^{(1)}(-u) = H_0^{(1)}\left(ue^{i\pi}\right) = H_0^{(1)}(u) - 2J_0(u).$$

С его помощью можно переписать (73.6) в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\varkappa(z)H_0^{(1)}(\varkappa R)\varkappa\,d\varkappa. \tag{73.7}$$

Из уравнения (73.3) находим для функции $\varphi_\varkappa$ уравнение

$$\frac{d^2\varphi_\varkappa}{dz^2} - \left(\varkappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi_\varkappa = -4\pi\delta(z-l). \tag{73.8}$$

δ-функцию в правой части уравнения можно исключить, наложив на функцию $\varphi_\varkappa(z)$ (удовлетворяющую однородному уравнению) граничные условия при $z = l$:

$$\varphi_\varkappa(z)\Big|_{l-0}^{l+0} = 0,\quad \frac{d\varphi_\varkappa}{dz}\Big|_{l-0}^{l+0} = -4\pi. \tag{73.9}$$

Граничные же условия при $z = 0$ гласят:

$$\rho\varphi_\varkappa\Big|_{-0}^{+0} = 0,\quad \frac{d\varphi_\varkappa}{dz}\Big|_{-0}^{+0} = 0. \tag{73.10}$$

Ищем решение в виде

$$\begin{aligned}
&\varphi_\varkappa = Ae^{-\mu_1 z} &&\text{при}\quad z > l,\\
&\varphi_\varkappa = Be^{-\mu_1 z} + Ce^{\mu_1 z} &&\text{при}\ \ l > z > 0,\\
&\varphi_\varkappa = De^{\mu_2 z} &&\text{при}\ \ 0 > z.
\end{aligned} \tag{73.11}$$

Здесь

$$\mu_1^2 = \varkappa^2 - k_1^2,\ \ \mu_2^2 = \varkappa^2 - k_2^2$$

($k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$), причем надо полагать:

$$\begin{aligned}
&\mu = +\sqrt{\varkappa^2 - k^2} \quad \text{при}\ \ \varkappa > k,\\
&\mu = -i\sqrt{k^2 - \varkappa^2} \quad \text{при}\ \ \varkappa < k;
\end{aligned} \tag{73.12}$$

первое необходимо для того, чтобы искомое φ не возрастало на бесконечности, а второе — чтобы φ представляло собой расходящуюся волну. Условия (73.9) и (73.10) дают четыре уравнения, определяющие коэффициенты A, B, C, D. Простое вычисление приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
&B = C\frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1}, \quad C = \frac{2\pi}{\mu_1}e^{-\mu_1 l},\\
&D = C\frac{2\rho_1\mu_1}{\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1}, \quad A = B + Ce^{2\mu_1 l}.
\end{aligned} \tag{73.13}$$

При $\rho_2 = \rho_1$, $c_2 = c_1$ (т. е. если бы все пространство было заполнено одной средой) B обращается в нуль и $A = Ce^{2\mu_1 l}$; соответствующий член в φ представляет собой, очевидно, прямую волну (73.1); поэтому интересующая нас отраженная волна есть

$$\varphi_1' = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(\varkappa) e^{-\mu_1 z} H_0^{(1)}(\varkappa R) \varkappa \, d\varkappa. \qquad (73.14)$$

В этом выражении надо еще уточнить путь интегрирования. Особая точка $\varkappa = 0$ обходится (в плоскости комплексного $\varkappa$), как уже указывалось, сверху. Кроме того, подынтегральное выражение имеет особые точки (точки разветвления) $\varkappa = \pm k_1, \pm k_2$, в которых μ_1 или μ_2 обращаются в нуль. В соответствии с условиями (73.10) точки $+k_1$, $+k_2$ должны обходиться снизу, а точки $-k_1$, $-k_2$ сверху.

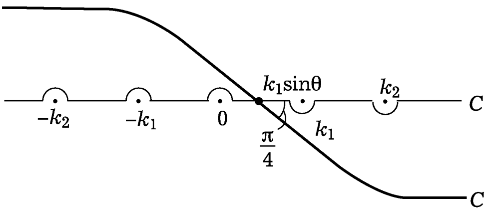


Рис. 47

Произведем исследование полученного выражении на больших расстояниях от источника. Заменяя функцию Ганкеля ее известным асимптотическим выражением, получим

$$\varphi_1' = \int\limits_C \frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\mu_1(\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1)} \left(\frac{\varkappa}{2i\pi R}\right)^{1/2} e^{-\mu_1(z+l) + i\varkappa R} \, d\varkappa. \qquad (73.15)$$

На рис. 47 изображен путь интегрирования C для случая $c_1 > c_2$. Интеграл может быть вычислен с помощью известного метода перевала. Показатель

$$i\left[(z+l)\sqrt{k_1^2 - \varkappa^2} + \varkappa R\right]$$

имеет экстремум в точке, в которой

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{k_1^2 - \varkappa^2}} = \frac{R}{z+l} = \frac{r' \sin\theta}{r' \cos\theta} = \operatorname{tg}\theta,$$

т. е. $\varkappa = k_1 \sin\theta$, где θ — угол падения (см. рис. 45). Переходя к пути интегрирования C', пересекающему эту точку под углом $\pi/4$ к оси абсцисс, получим формулу (73.2).

В случае же $c_1 < c_2$ (т. е. $k_1 > k_2$) точка $\varkappa = k_1 \sin\theta$ лежит между точками k_2 и k_1, если $\sin\theta > k_2/k_1 = c_1/c_2 = \sin\theta_0$, т. е. если $\theta > \theta_0$ (см. рис. 45). В этом случае контур C' должен содержать еще петлю вокруг точки k_2, и к обычной отраженной волне (73.2) добавляется волна φ_1'', определяемая интегралом (73.15),

взятым по этой петле (назовем ее C'', рис. 48); это и есть боковая волна. Этот интеграл легко вычислить, если точка $k_1 \sin\theta$ не слишком близка к k_2, т. е. если угол θ не слишком близок к углу полного внутреннего отражения θ_0 [1]).

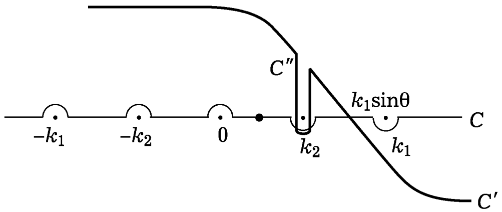


Рис. 48

Вблизи точки $\varkappa = k_2$ μ_2 мало; разлагаем предэкспоненциальный множитель в подынтегральном выражении в (73.15) по степеням μ_2. Нулевой член разложения вообще не обладает особенностью при $\varkappa = k_2$ и его интеграл по C'' обращается в нуль. Поэтому имеем

$$\varphi_1'' = -\int\limits_{C''} \frac{2\mu_2\rho_1}{\mu_1^2\rho_2}\left(\frac{\varkappa}{2\pi i r}\right)^{1/2} \exp\left[-\mu_1(z+l) + i\varkappa R\right] d\varkappa. \qquad (73.16)$$

Разлагая показатель по степеням $\varkappa - k_2$ и интегрируя по вертикальной петле C'', получим после простого вычисления следующее выражение для потенциала боковой волны

$$\varphi_1'' = \frac{2i\rho_1 k_2 \exp\left[ik_1 r' \cos(\theta_0 - \theta)\right]}{r'^2 \rho_2 k_1^2 [\cos\theta_0 \sin\theta \sin^3(\theta_0 - \theta)]^{1/2}}. \qquad (73.17)$$

В согласии со сказанным выше волновые поверхности представляют собой конусы

$$r'\cos(\theta - \theta_0) = R\sin\theta_0 + (z+l)\cos\theta_0 = \text{const}.$$

Вдоль заданного направления амплитуда волны убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r'. Мы видим также, что эта волна исчезает в предельном случае $\lambda \to 0$. При $\theta \to \theta_0$ выражение (73.17) становится неприменимым; в действительности в этой области амплитуда боковой волны убывает с расстоянием как $r'^{-5/4}$.

§ 74. Излучение звука

Колеблющееся в жидкости тело производит вокруг себя периодическое сжатие и разрежение жидкости и таким образом приводит к возникновению звуковых волн. Источником энергии, уносимой этими волнами, является кинетическая энергия дви-

---

[1]) Исследование боковой волны во всей области углов θ см. в кн.: *Бреховских Л.* // ЖТФ. 1948. Т. 18. С. 455. Там же дан следующий член разложения обычной отраженной волны по степеням λ/R; отметим здесь, что для углов θ, близких к θ_0 (в случае $c_1 < c_2$), отношение поправочного члена к основному убывает с расстояниями как $(\lambda/R)^{1/4}$, а не как λ/R.

жущегося тела. Таким образом, можно говорить об излучении звука колеблющимися телами.

Ниже будет везде предполагаться, что скорость u колеблющегося тела мала по сравнению со скоростью звука. Поскольку $u \sim a\omega$ (где a — линейная амплитуда колебаний тела), то это значит, что $a \ll \lambda$ [1]).

В общем случае произвольно колеблющегося тела произвольной формы задача об излучении звуковых волн должна решаться следующим образом. Выберем в качестве основной величины потенциал скорости φ. Он удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{74.1}$$

На поверхности тела нормальная составляющая скорости жидкости должна быть равна соответствующей компоненте скорости $\mathbf{u}$ тела:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_n. \tag{74.2}$$

На больших же расстояниях от тела волна должна переходить в расходящуюся сферическую волну. Решение уравнения (74.1), удовлетворяющее этим граничным условиям и условию на бесконечности, определяет излучаемую телом звуковую волну.

Рассмотрим более подробно два предельных случая. Предположим сначала, что частота колебаний тела настолько велика, что длина излучаемой волны очень мала по сравнению с размерами l тела:

$$\lambda \ll l. \tag{74.3}$$

В таком случае можно разделить поверхность тела на участки, размеры которых, с одной стороны, настолько малы, что их можно приближенно считать плоскими, но, с другой стороны, все же велики по сравнению с длиной волны. Тогда можно считать, что каждый такой участок излучает при своем движении плоскую волну, скорость жидкости в которой равна просто нормальной компоненте u_n скорости данного участка поверхности. Но средний поток энергии в плоской волне равен (см. § 65) $c\rho\overline{v^2}$, где v — скорость жидкости в волне. Подставляя $v = u_n$ и интегрируя по всей поверхности тела, приходим к результату, что средняя излучаемая телом в единицу времени в виде звуковых волн энергия, т. е. полная интенсивность излучаемого

[1]) Амплитуда колебаний предполагается, вообще говоря, малой также и по сравнению с размерами тела, в противном случае движение вблизи тела не будет потенциальным (ср. § 9). Это условие не обязательно лишь для чисто пульсационных колебаний, для которых используемое ниже решение (74.7) является по существу следствием уже непосредственно уравнения непрерывности.

звука, есть

$$I = c\rho \int \overline{u_n^2}\, df. \tag{74.4}$$

Она не зависит от частоты колебаний (при заданной амплитуде скорости).

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай, когда длина излучаемой волны велика по сравнению с размерами тела:

$$\lambda \gg l. \tag{74.5}$$

Тогда вблизи тела (на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны) в общем уравнении (74.1) можно пренебречь членом $c^{-2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$. Действительно, этот член — порядка величины $\omega^2\varphi/c^2 \sim \sim \varphi/\lambda^2$, между тем как вторые производные по координатам в рассматриваемой области $\sim\varphi/l^2$.

Таким образом, вблизи тела движение определяется уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$. Но это — уравнение, определяющее потенциальное движение несжимаемой жидкости. Следовательно, вблизи тела жидкость движется в рассматриваемом случае как несжимаемая. Собственно звуковые волны, т. е. волны сжатия и разрежения, возникают лишь на больших расстояниях от тела.

На расстояниях, порядка размеров тела и меньших, искомое решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ не может быть написано в общем виде и зависит от конкретной формы колеблющегося тела. Для расстояний же, больших по сравнению с l, но малых по сравнению с λ (так что уравнение $\Delta\varphi = 0$ еще применимо), можно найти общий вид решения, воспользовавшись тем, что φ должно убывать с увеличением расстояния. С такими решениями уравнения Лапласа нам уже приходилось иметь дело в § 11. Как и там, пишем общий вид решения в форме

$$\varphi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} \tag{74.6}$$

(r — расстояние до начала координат, выбранного где-нибудь внутри тела). При этом, конечно, существенно, что расстояния, о которых идет речь, все же велики по сравнению с размерами тела. Только по этой причине можно ограничиться в φ членами, наименее быстро убывающими с ростом r. Мы оставляем в (74.6) оба написанных члена, имея в виду, что первый член не во всех случаях присутствует (см. ниже).

Выясним, в каких случаях этот член $-a/r$ отличен от нуля. В § 11 было выяснено, что потенциал $-a/r$ приводит к наличию отличного от нуля потока жидкости через поверхность, окружающую тело; этот поток равен $4\pi\rho a$. Но в несжимаемой жидкости такой поток может иметь место только за счет изменения общего

объема жидкости, заключенной внутри замкнутой поверхности. Другими словами, должно происходить изменение объема тела, что и будет приводить к вытеснению жидкости из рассматриваемого объема пространства или, наоборот, к «засасыванию» жидкости в него. Таким образом, первый член в (74.6) присутствует в тех случаях, когда излучающее тело производит пульсации, сопровождающиеся изменением его объема.

Предположим, что это имеет место, и определим полную интенсивность излучаемого звука. Объем $4\pi a$ жидкости, протекающей через замкнутую поверхность, должен быть равен изменению объема V тела в единицу времени, т. е. производной dV/dt (объем V является заданной функцией времени):

$$4\pi a = \dot{V}.$$

Таким образом, на расстояниях r, удовлетворяющих условию $l \ll r \ll \lambda$, движение жидкости описывается функцией

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t)}{4\pi r}.$$

С другой стороны, на расстояниях $r \gg \lambda$ (в *волновой зоне*) φ должно представлять расходящуюся сферическую волну, т. е. иметь вид

$$\varphi = -\frac{f(t - r/c)}{r}. \tag{74.7}$$

Поэтому мы приходим к результату, что излучаемая волна имеет на всех расстояниях (больших по сравнению с l) вид

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t - r/c)}{4\pi r}, \tag{74.8}$$

получающийся заменой в $\dot{V}(t)$ аргумента t на $t - r/c$.

Скорость $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$ направлена в каждой точке по радиусу-вектору и по величине равна $v = \partial\varphi/\partial r$. При дифференцировании (74.8) надо (для расстояний $r \gg \lambda$) брать производную только от числителя; дифференцирование знаменателя привело бы к члену высшего порядка по $1/r$, которым следует пренебречь. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial r}\dot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{1}{c}\ddot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

то получаем ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$):

$$\mathbf{v} = \frac{\ddot{V}(t - r/c)}{4\pi c r}\mathbf{n}. \tag{74.9}$$

Интенсивность излучения, определяющаяся квадратом скорости, оказывается здесь не зависящей от направления излучения, т. е. излучение симметрично по всем направлениям. Среднее

значение полной излучаемой в единицу времени энергии есть

$$I = \rho c \oint \overline{v^2}\, df = \frac{\rho}{16c\pi^2} \oint \frac{\overline{\ddot{V}^2}}{r^2}\, df,$$

где интегрирование производится по замкнутой поверхности вокруг начала координат. Выбирая в качестве этой поверхности сферу радиуса r и замечая, что подынтегральное выражение зависит только от расстояния до центра, получаем окончательно:

$$I = \frac{\rho\overline{\ddot{V}^2}}{4\pi c}. \tag{74.10}$$

Это — полная интенсивность излучаемого звука. Мы видим, что она определяется квадратом второй производной по времени от объема тела.

Если тело совершает пульсационные колебания по гармоническому закону с частотой ω, то вторая производная от объема по времени пропорциональна частоте и амплитуде скорости колебаний; средний же ее квадрат пропорционален квадрату частоты. Таким образом, интенсивность излучения будет пропорциональна квадрату частоты при заданном значении амплитуды скорости точек поверхности тела. При заданной же амплитуде самих колебаний амплитуда скорости в свою очередь пропорциональна частоте, так что интенсивность излучения будет пропорциональна ω^4.

Рассмотрим теперь излучение звука телом, колеблющимся без изменения объема. Тогда в (74.6) остается только второй член, который мы напишем в виде

$$\varphi = \operatorname{div}\Big(\mathbf{A}(t)\frac{1}{r}\Big).$$

Как и в предыдущем случае, заключаем, что общий вид решения на всех расстояниях $r \gg l$ есть

$$\varphi = \operatorname{div}\frac{\mathbf{A}(t - r/c)}{r}.$$

То, что это выражение действительно является решением волнового уравнения, видно из того, что функция $\mathbf{A}(t-r/c)/r$ удовлетворяет этому уравнению, а потому удовлетворяют ему и производные указанной функции по координатам. Дифференцируя опять только числитель, получаем (для расстояний $r \gg \lambda$):

$$\varphi = -\frac{\dot{\mathbf{A}}(t - r/c)\mathbf{n}}{cr}. \tag{74.11}$$

При вычислении скорости $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ снова надо дифференцировать только $\mathbf{A}$. Поэтому имеем согласно известным из векторного

анализа правилам дифференцирования функций от скалярного аргумента:

$$\mathbf{v} = -\frac{\ddot{\mathbf{A}}(t - r/c)\mathbf{n}}{c^2 r} \nabla \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

и, подставляя $\nabla(t - r/c) = -\nabla r/c = -\mathbf{n}/c$, получаем окончательно:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{c^2 r}\mathbf{n}\big(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{A}}\big). \qquad (74.12)$$

Интенсивность излучения будет теперь пропорциональна квадрату косинуса угла между направлением излучения (направление $\mathbf{n}$) и вектором $\ddot{\mathbf{A}}$ (такое излучение называют *дипольным*). Полное же излучение равно интегралу

$$I = \frac{\rho}{c^3} \int \frac{\overline{(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{A}})^2}}{r^2}\, df.$$

Опять выбираем в качестве поверхности интегрирования сферу радиуса r, причем введем сферические координаты с полярной осью вдоль вектора $\ddot{\mathbf{A}}$. Простое интегрирование приводит к окончательной формуле для полного излучения в единицу времени:

$$I = \frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}. \qquad (74.13)$$

Компоненты вектора $\mathbf{A}$ являются линейными функциями компонент скорости $\mathbf{u}$ тела (см. § 11). Таким образом, интенсивность излучения является здесь квадратичной функцией вторых производных от компонент скорости тела по времени.

Если тело совершает гармоническое колебательное движение с частотой ω, то, подобно предыдущему случаю, заключаем, что интенсивность излучения пропорциональна ω^4 при заданном значении амплитуды скорости. При заданной же линейной амплитуде колебаний тела амплитуда скорости сама пропорциональна частоте, и потому излучение пропорционально ω^6.

Аналогичным образом решается вопрос об излучении цилиндрических звуковых волн пульсирующим или колеблющимся перпендикулярно к своей оси цилиндром произвольного сечения. Выпишем здесь соответствующие формулы, имея в виду их дальнейшие применения.

Рассмотрим сначала пульсационные малые колебания цилиндра, и пусть $S = S(t)$ есть переменная площадь его сечения. На расстояниях r от оси цилиндра, таких, что $l \ll r \ll \lambda$ (l — поперечные размеры цилиндра), получим аналогично (74.8)

$$\varphi = \frac{\dot{S}(t)}{2\pi} \ln fr, \qquad (74.14)$$

где $f(t)$ — функция времени (коэффициент при $\ln fr$ выбран так, чтобы получить правильное значение потока жидкости через ко-

аксиальную цилиндрическую поверхность). В соответствии с формулой для потенциала расходящейся цилиндрической волны (первый член формулы (71.2)) имеем теперь, что на всех расстояниях $r \gg l$ потенциал определяется выражением

$$\varphi = -\frac{c}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t')\,dt'}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - r^2}}. \tag{74.15}$$

При $r \to 0$ главный член этого выражения совпадает с (74.14), причем автоматически определится также и функция $f(t)$ в последнем (предполагаем, что при $t \to -\infty$ производная $\dot{S}(t)$ достаточно быстро обращается в нуль). При очень же больших значениях r (в волновой зоне), основную роль в интеграле (74.15) играет область значений $t - t' \sim r/c$, поэтому в знаменателе подынтегрального выражения можно положить:

$$(t-t')^2 - \frac{r^2}{c^2} \approx 2\frac{r}{c}\left(t - t' - \frac{r}{c}\right),$$

и мы получим

$$\varphi = -\frac{c}{2\pi\sqrt{2r}} \int\limits_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t')\,dt'}{\sqrt{c(t-t') - r}}. \tag{74.16}$$

Наконец, скорость $v = \partial\varphi/\partial r$; для осуществления дифференцирования удобно сделать в интеграле подстановку $t - t' - r/c = \xi$:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{2r}} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\dot{S}(t - r/c - \xi)}{\sqrt{\xi}}\,d\xi,$$

после чего пределы интегрирования не будут содержать r. Множитель $r^{-1/2}$ перед интегралом не дифференцируется, так как это дало бы член более высокого порядка по $1/r$. Производя дифференцирование под знаком интеграла и перейдя затем обратно к переменной t', получим

$$v = \frac{1}{2\pi\sqrt{2r}} \int\limits_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\ddot{S}(t')\,dt'}{\sqrt{c(t-t') - r}}. \tag{74.17}$$

Интенсивность излучения определится произведением $2\pi r\rho c\overline{v^2}$. Обратим внимание на то, что в отличие от сферического случая здесь интенсивность излучения в каждый момент времени определяется всем ходом изменения функции $S(t)$ за время от $-\infty$ до $t - r/c$.

Наконец, для поступательных колебаний бесконечного цилиндра в направлении, перпендикулярном к его оси, на расстояниях $l \ll r \ll \lambda$ потенциал имеет вид

$$\varphi = \operatorname{div}(\mathbf{A} \ln fr), \tag{74.18}$$

где $\mathbf{A}(t)$ определяется путем решения уравнения Лапласа для обтекания цилиндра несжимаемой жидкостью. Отсюда снова заключаем, что на всех расстояниях $r \gg l$

$$\varphi = -\operatorname{div} \int\limits_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\mathbf{A}(t')\,dt'}{[(t-t')^2 - r^2/c^2]^{1/2}}. \tag{74.19}$$

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Мы полностью пренебрегали здесь влиянием вязкости жидкости и соответственно этому считали движение в излучаемой волне потенциальным. В действительности, однако, в слое жидкости толщины $(\nu/\omega)^{1/2}$ вокруг колеблющегося тела движение не потенциально (см. § 24). Поэтому для применимости всех полученных формул необходимо, чтобы толщина этого слоя была мала по сравнению с размерами l тела:

$$(\nu/\omega)^{1/2} \ll l. \tag{74.20}$$

Это условие может не выполняться при слишком малых частотах или слишком малых размерах тела.

Задачи

1. Определить полную интенсивность излучения звука шаром, совершающим поступательные малые (гармонические) колебания с частотой ω, причем длина волны сравнима по величине с радиусом R шара.

Решение. Скорость шара пишем в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$; тогда φ зависит от времени тоже посредством множителя $e^{-i\omega t}$ и удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, где $k = \omega/c$. Ищем решение в виде $\varphi = \mathbf{u}\nabla f(r)$ (начало координат выбрано в точке нахождения центра шара в данный момент времени). Для f получаем уравнение $(\mathbf{u}\nabla)(\Delta f + k^2 f) = 0$, откуда $\Delta f + k^2 f = \text{const}$. С точностью до несущественной аддитивной постоянной имеем отсюда $f = Ae^{ikr}/r$. Постоянная A определяется из условия $\partial\varphi/\partial r = u_r$ при $r = R$, и в результате получаем

$$\varphi = \mathbf{ur}e^{ik(r-R)}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{ikr - 1}{2 - 2ikR - k^2R^2}.$$

Излучение имеет дипольный характер. На достаточно больших расстояниях от шара можно пренебречь единицей по сравнению с ikr, и φ приобретает вид (74.11) с вектором $\dot{\mathbf{A}}$, равным

$$\dot{\mathbf{A}} = -\mathbf{u}e^{ik(r-R)}R^3 \frac{i\omega}{2 - 2ikR - k^2R^2}.$$

Замечая, что $\overline{(\operatorname{Re}\ddot{\mathbf{A}})^2} = \overline{|\ddot{\mathbf{A}}|^2}/2$, получаем для полного излучения согласно (74.13):

$$I = \frac{2\pi\rho}{3c^3}|\mathbf{u}_0|^2 \frac{R^6\omega^4}{4 + \omega^4R^4/c^4}.$$

При $\omega R/c \ll 1$ это выражение переходит в

$$I = \frac{\rho\pi R^6}{6c^3}|\mathbf{u}_0|^2\omega^4$$

(это может быть получено и непосредственно подстановкой в (74.13) выражения $\mathbf{A} = \mathbf{u}R^3/2$ из задачи 1 § 11). При $\omega R/c \gg 1$ имеем

$$I = \frac{2\pi\rho c}{3}R^2|\mathbf{u}_0|^2,$$

что соответствует формуле (74.4).

Действующая на шар сила сопротивления жидкости получается интегрированием проекции сил давления ($p' = -\rho\dot{\varphi}'|_{r=R}$) на направление $\mathbf{u}$ по поверхности шара и равна

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3}\rho\omega R^3\mathbf{u}\frac{-k^3R^3 + i(2 + k^2R^2)}{4 + k^4R^4}$$

(о смысле комплексной силы сопротивления см. конец § 24).

2. То же, если радиус R шара сравним по величине с $\sqrt{\nu/\omega}$ (но в то же время $\lambda \gg R$).

Р е ш е н и е. Если размеры тела невелики по сравнению с $\sqrt{\nu/\omega}$, то для определения излучаемой волны надо исходить не из уравнения $\Delta\varphi = 0$, а из уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости. Соответствующее решение этого уравнения для шара определяется формулами (1), (2) в задаче 5 § 24. При переходе к большим расстояниям первый член в (1), экспоненциально затухающий с r, можно опустить. Второй же член приводит к скорости

$$\mathbf{v} = -b(\mathbf{u}\nabla)\nabla\frac{1}{r}.$$

Сравнение с (74.6) показывает, что

$$\mathbf{A} = -b\mathbf{u} = \frac{R^3}{2}\left[1 - \frac{3}{(i-1)\varkappa} - \frac{3}{2i\varkappa^2}\right]\mathbf{u},$$

где $\varkappa = R(\omega/2\nu)^{1/2}$, т. е. отличается от соответствующего выражения для идеальной жидкости множителем, стоящим в скобках. В результате получаем

$$I = \frac{\pi\rho R^6}{6c^3}\omega^4\left(1 + \frac{3}{\varkappa} + \frac{9}{2\varkappa^2} + \frac{9}{2\varkappa^3} + \frac{9}{4\varkappa^4}\right)|\mathbf{u}_0|^2.$$

При $\varkappa \gg 1$ это выражение переходит в приведенную в задаче 1 формулу, а при $\varkappa \ll 1$ получаем

$$I = \frac{3\pi\rho R^2\nu^2}{2c^3}\omega^2|\mathbf{u}_0|^2,$$

т. е. излучение пропорционально не четвертой, а второй степени частоты.

3. Определить интенсивность излучения звука сферой, совершающей малые (гармонические) пульсационные колебания с произвольной частотой.

Р е ш е н и е. Ищем звуковую волну в виде

$$\varphi = \frac{au}{r}e^{ik(r-R)}$$

(R — равновесный радиус шара) и определяем постоянную a из условия

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = u = u_0e^{-i\omega t},$$

где u — радиальная скорость точек поверхности сферы:

$$a = \frac{R^2}{ikR - 1}.$$

Интенсивность излучения

$$I = 2\pi\rho c|u_0|^2 \frac{k^2R^4}{1 + k^2R^2}.$$

При $kR \ll 1$

$$I = \frac{2\pi\rho}{c}\omega^2 R^4 |u_0|^2$$

в соответствии с (74.10), а при $kR \gg 1$

$$I = 2\pi\rho c R^2 |u_0|^2$$

в соответствии с (74.4).

4. Определить волну, излучаемую шаром (радиуса R), совершающим малые пульсационные колебания; радиальная скорость точек его поверхности есть произвольная функция времени $u(t)$.

Р е ш е н и е. Решение ищем в виде $\varphi = f(t')/r$, где $t' = t - (r - R)/c$, и определяем f из граничного условия $(\partial\varphi/\partial r)_{r=R} = u(t)$, которое приводит к уравнению

$$\frac{df}{dt} + \frac{cf(t)}{R} = -Rcu(t).$$

Решая это линейное уравнение и заменяя в решении аргумент t на t', получаем

$$\varphi(r, t) = -\frac{cR}{r} e^{-ct'/R} \int\limits_{-\infty}^{t'} u(\tau) e^{c\tau/R}\, d\tau. \qquad (1)$$

Если колебания шара прекращаются, например, в момент времени $t = 0$ (т. е. $u(\tau) = 0$ при $\tau > 0$), то на расстоянии r от центра, начиная с момента времени $t = (r - R)/c$, потенциал как функция времени будет иметь вид $\varphi = \mathrm{const} \cdot e^{-ct/R}$, т. е. движение будет затухать экспоненциально.

Пусть T — время, в течение которого происходит существенное изменение скорости $u(t)$. Если $T \gg R/c$ (т. е. длина излучаемых волн $\lambda \sim cT \gg R$), то в (1) можно вынести медленно меняющийся множитель $u(\tau)$ из-под знака интеграла, заменив его на $u(t')$. На расстояниях $r \gg R$ получим тогда

$$\varphi = -\frac{R^2}{r} u\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

что совпадает с формулой (74.8). Если же $T \ll R/c$, то аналогично получаем

$$\varphi = -\frac{cR}{r} \int\limits_{-\infty}^{t'} u(\tau)\, d\tau, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{R}{r} u(t'),$$

что соответствует формуле (74.4).

5. Определить движение, возникающее в идеальной сжимаемой жидкости при произвольном поступательном движении в ней шара радиуса R (скорость движения мала по сравнению со скоростью звука).

Р е ш е н и е. Ищем решение в виде

$$\varphi = \operatorname{div} \frac{\mathbf{f}(t')}{r} \qquad (1)$$

(r — расстояние от начала координат, выбранного в точке нахождения центра шара в момент времени $t' = t - (r-R)/c$); поскольку скорость шара $\mathbf{u}$ мала по сравнению со скоростью звука, то эффектом перемещения начала координат можно пренебречь). Скорость жидкости

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi = \frac{3(\mathbf{fn})\mathbf{n} - \mathbf{f}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{f}'\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{f}'}{cr^2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{nf}'')}{c^2 r} \tag{2}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль направления $\mathbf{r}$; штрих означает дифференцирование $\mathbf{f}$ по его аргументу). Граничное условие $v_r = \mathbf{un}$ при $r = R$, откуда

$$\mathbf{f}''(t) + \frac{2c}{R}\mathbf{f}'(t) + \frac{2c^2}{R^2}\mathbf{f}(t) = Rc^2\mathbf{u}(t).$$

Решая это уравнение методом вариации постоянных, получаем для функции $\mathbf{f}(t)$ общее выражение:

$$\mathbf{f}(t) = cR^2 e^{-ct/R}\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{u}(\tau)\sin\frac{c(t-\tau)}{R}e^{\tau c/R}\,d\tau. \tag{3}$$

При подстановке в (1) здесь надо писать t' вместо t. В качестве нижнего предела выбрано $-\infty$ так, чтобы было $\mathbf{f} = 0$ при $t = -\infty$.

6. Шар радиуса R в момент времени $t = 0$ начинает двигаться с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$. Определить возникающее в момент начала движения звуковое излучение.

Р е ш е н и е. Полагая в формуле (3) задачи 5 $\mathbf{u}(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ и $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_0$ при $\tau > 0$ и подставляя в формулу (2) (сохранив в последней только последний, наименее быстро убывающий с расстоянием член), найдем скорость движения жидкости вдали от шара:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{n}(\mathbf{nu}_0)\frac{R\sqrt{2}}{r}e^{-ct'/R}\sin\left(\frac{ct'}{R} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(где $t' > 0$). Полная интенсивность излучения будет убывать со временем по закону

$$I = \frac{8\pi}{3}c\rho R^2 u_0^2 e^{-2ct'/R}\sin^2\left(\frac{ct'}{R} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Всего за все время будет излучена энергия

$$\frac{\pi}{3}\rho R^3 u_0^2.$$

7. Определить интенсивность излучения звука бесконечным цилиндром (радиуса R), совершающим пульсационные гармонические колебания; длина волны $\lambda \gg R$.

Р е ш е н и е. Согласно формуле (74.14) находим сначала, что на расстояниях $r \ll \lambda$ (в задачах 7, 8 r — расстояние от оси цилиндра) потенциал

$$\varphi = Ru\ln kr,$$

где $u = u_0 e^{-i\omega t}$ — скорость точек поверхности цилиндра. Из сравнения с формулами (71.7) и (71.8) находим теперь, что на больших расстояниях потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -Ru\sqrt{\frac{i\pi}{2kr}}\,e^{ikr},$$

Отсюда скорость

$$\mathbf{v} = Ru\sqrt{\frac{\pi k}{2ir}}\,\mathbf{n}e^{ikr}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к оси цилиндра) и интенсивность излучения (на единицу длины цилиндра)

$$I = \frac{\pi^2}{2}\rho\omega R^2 |u_0|^2.$$

8. Определить излучение звука цилиндром, совершающим гармонические поступательные колебания в направлении, перпендикулярном к своей оси.

Р е ш е н и е. На расстояниях $r \ll \lambda$ имеем

$$\varphi = -\operatorname{div}(R^2 \mathbf{u} \ln kr)$$

(ср. формулу (74.18) и задачу 3 § 10). Отсюда приходим к выводу, что на больших расстояниях

$$\varphi = R^2 \sqrt{\frac{i\pi}{2k}} \operatorname{div} \frac{e^{ikr}\mathbf{u}}{\sqrt{r}} = -R^2(\mathbf{un})\sqrt{\frac{\pi k}{2ir}}\, e^{ikr},$$

откуда скорость

$$\mathbf{v} = -kR^2 \sqrt{\frac{i\pi k}{2r}}\, \mathbf{n}(\mathbf{un}) e^{ikr}.$$

Интенсивность излучения будет пропорциональна квадрату косинуса угла между направлениями колебаний и излучения. Полная интенсивность

$$I = \frac{\pi^2}{4c^2}\rho\omega^3 R^4 |\mathbf{u}_0|^2.$$

9. Определить интенсивность излучения звука от плоской поверхности с периодически колеблющейся температурой, частота колебаний $\omega \ll c^2/\chi$, где χ — температуропроводность жидкости.

Р е ш е н и е. Пусть переменная часть температуры поверхности есть $T_0' e^{-i\omega t}$. Эти колебания температуры создают в жидкости затухающую тепловую волну (52.15):

$$T' = T_0' e^{-i\omega t} \exp\left[-(1-i)\sqrt{\omega/(2\chi)}\, x\right],$$

в результате чего колебания будет испытывать и плотность жидкости:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p T' = -\rho\beta T',$$

где β — температурный коэффициент расширения. Это в свою очередь приводит к возникновению движения, определяющегося уравнением непрерывности:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -i\omega\rho\beta T'.$$

На твердой поверхности скорость $v_x = v = 0$, а при удалении от нее стремится к пределу

$$v = -i\omega\beta \int_0^\infty T'\, dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\beta\sqrt{\omega\chi}\, T_0' e^{-i\omega t}.$$

Это значение достигается на расстояниях $\sim\sqrt{\chi/\omega}$, малых по сравнению с c/ω, и служит граничным условием для возникающей звуковой волны. Отсюда находим интенсивность излучения звука с 1 см^2 поверхности:

$$I = \frac{1}{2}c\rho\beta^2\omega\chi|T_0'|^2.$$

10. Точечный источник, излучающий сферическую волну, находится на расстоянии l от твердой (полностью отражающей звук) стенки, ограничивающей заполненное жидкостью полупространство. Определить отношение полной интенсивности излучаемого источником звука к интенсивности излучения, которое имело бы место в неограниченной среде, а также зависимость интенсивности от направления на больших расстояниях от источника.

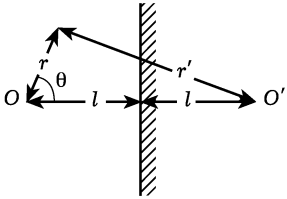


Рис. 49

Р е ш е н и е. Совокупность излучаемой и отраженной от стенки волн описывается решением волнового уравнения, удовлетворяющим условию равенства нулю нормальной скорости $v_n = \partial\varphi/\partial n$ на стенке. Таким решением является

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'}\right)e^{-i\omega t}$$

(постоянный множитель для краткости опускаем), где r — расстояние от источника звука O (рис. 49), а r' — расстояние от точки O', расположенной относительно поверхности стенки симметрично с O. На больших расстояниях от источника имеем: $r' \approx r - 2l\cos\theta$, так что

$$\varphi = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}(1 + e^{-2ilk\cos\theta}).$$

Зависимость интенсивности излучения от направления определяется здесь множителем $\cos^2(kl\cos\theta)$.

Для определения полной интенсивности излучения интегрируем поток энергии

$$\overline{\mathbf{q}} = \overline{p'\mathbf{v}} = -\overline{\rho\dot{\varphi}\nabla\varphi}$$

(см. (65.4)) по поверхности сферы сколь угодно малого радиуса с центром в точке O. Это дает

$$2\pi\rho k\omega\left(1 + \frac{\sin 2kl}{2kl}\right).$$

В неограниченной же среде мы имели бы чисто сферическую волну $\varphi = e^{i(kr-\omega t)}/r$ с полным потоком энергии $2\pi\rho k\omega$. Таким образом, искомое отношение интенсивностей равно

$$1 + \frac{\sin 2kl}{2kl}.$$

11. То же в жидкости, ограниченной свободной поверхностью.

Р е ш е н и е. На свободной поверхности должно выполняться условие $p' = -\rho\dot{\varphi} = 0$; в монохроматической волне это эквивалентно требованию $\varphi = 0$. Соответствующее решение волнового уравнения есть

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr'}}{r'}\right)e^{-i\omega t}.$$

На больших расстояниях от источника интенсивность излучения определяется множителем $\sin^2(kl\cos\theta)$.

Искомое соотношение интенсивностей равно

$$1 - \frac{\sin 2kl}{2kl}.$$

§ 75. Возбуждение звука турбулентностью

Турбулентные пульсации скорости тоже являются источником возбуждения звука в окружающем объеме жидкости. В этом параграфе будет изложена общая теория этого явления (*M.J. Lighthill*, 1952). Будет рассматриваться ситуация, когда турбулентность занимает конечную область V_0, окруженную неограниченным объемом неподвижной жидкости. При этом самая турбулентность рассматривается в рамках теории несжимаемой жидкости — вызываемым пульсациями изменением плотности пренебрегаем; это значит, что скорость турбулентного движения предполагается малой по сравнению со скоростью звука (как это предполагалось и во всей гл. III).

Начнем с вывода общего уравнения, учитывающего, наряду с движением в звуковых волнах, также и движение жидкости в турбулентной области. Отличие от произведенного в § 64 вывода состоит лишь в том, что должен быть сохранен нелинейный член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ — хотя скорость v мала по сравнению с c, но она велика по сравнению со скоростью жидкости в звуковой волне. Поэтому вместо (64.3) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0}\nabla p' = 0.$$

Применив к этому уравнению операцию div и используя уравнение (64.5)

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

получим

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right).$$

Правую часть этого уравнения можно преобразовать с помощью уравнения непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ (турбулентность рассматривается как несжимаемая!): можно вынести знак дифференцирования по x_k из-под скобок. Окончательно имеем

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho \frac{\partial^2 T_{ik}}{\partial x_i\,\partial x_k}, \quad T_{ik} = v_i v_k \tag{75.1}$$

(индекс у ρ_0 снова опускаем). Вне турбулентной области выражение в правой части этого уравнения представляет собой малую величину второго порядка и может быть опущено, так что мы возвращаемся к волновому уравнению распространения звука. Правая же часть, отличная от нуля в объеме V_0, играет роль источника звука. В этом объеме $\mathbf{v}$ — скорость турбулентного движения.

Уравнение (75.1) — типа уравнения запаздывающих потенциалов. Решение этого уравнения, описывающее исходящее от источника излучение, есть

$$p'(\mathbf{r},\, t) = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{\partial^2 T_{ik}(\mathbf{r}_1,\, t)}{\partial x_{1i}\, \partial x_{1k}} \bigg|_{t-R/c} \frac{dV_1}{R} \tag{75.2}$$

(см. II, § 62). Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{r}_1$ — бегущей точки в области интегрирования, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$; подынтегральное выражение берется в «запаздывающий» момент времени $t - R/c$. Интегрирование в (75.2) фактически производится лишь по объему V_0, в котором подынтегральное выражение отлично от нуля.

Основная часть энергии турбулентного движения заключена в частотах $\sim u/l$, отвечающих основному масштабу турбулентности l; u — характерная скорость движения (см. § 33). Таковы же будут, очевидно, и основные частоты в спектре излучаемых звуковых волн. Соответствующие же длины волн $\lambda \sim cl/u \gg l$.

Для определения интенсивности излучения достаточно рассмотреть звуковое поле на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны λ (в «волновой зоне»), эти расстояния велики и по сравнению с линейными размерами источника — турбулентной области [1]. Множитель $1/R$ в подынтегральном выражении в этой зоне можно заменить множителем $1/r$ и вынести его из-под знака интеграла (r — расстояние точки наблюдения до начала координат, выбранного где-либо внутри источника); тем самым мы пренебрегаем членами, убывающими быстрее, чем $1/r$, которые все равно не дают вклада в интенсивность уходящих на бесконечность волн. Таким образом,

$$p'(\mathbf{r},\, t) = \frac{\rho}{4\pi r} \int \frac{\partial^2 T_{ik}(\mathbf{r}_1,\, t)}{\partial x_{1i}\, \partial x_{1k}} \bigg|_{t-R/c} dV_1. \tag{75.3}$$

Производные в подынтегральном выражении берутся до взятия значения при $t - R/c$, т. е. только по первому аргументу функций $T_{ik}(\mathbf{r}_1,\, t)$. Эти производные можно заменить производными от функций $T_{ik}(\mathbf{r},\, t - R/c)$, взятыми по обоим аргументам, вычитая из них каждый раз производные по второму аргументу. Первые представляют собой полные дивергенции и интегралы от них, будучи преобразованы в интегралы по удаленным замкнутым поверхностям, обращаются в нуль, поскольку вне турбулентной области $T_{ik} = 0$. Производные же по «текущим» координатам $\mathbf{r}_1$, входящим в состав аргумента $t - R/c$, можно заменить производными по координатам точки наблюдения $\mathbf{r}$, поскольку $\mathbf{r}$

---

[1]) Говоря о порядках величин, мы не проводим различия между основным масштабом l и размерами турбулентной области, хотя последние и могут заметно превышать первый.

и $\mathbf{r}_1$ входят только в виде разности $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$. Таким образом, приходим к выражению

$$p'(\mathbf{r},\, t) = \frac{\rho}{4\pi r}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}\int T_{ik}\Big(\mathbf{r}_1,\, t - \frac{R}{c}\Big)\,dV_1. \tag{75.4}$$

Время $t - R/c$ отличается от времени $t - r/c$ на интервал $\sim l/c$. Но такой интервал времени мал по сравнению с периодами l/u основных турбулентных пульсаций. Это позволяет заменить аргумент $t - R/c$ в подынтегральном выражении на $t - r/c \equiv \equiv \tau$ [1]). Производя после этого дифференцирование под знаком интеграла, и заметив, что $\partial r/\partial x_i = n_i$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$), получим

$$p'(\mathbf{r},\, t) = \frac{\rho}{4\pi c^2 r} n_i n_k \int \ddot{T}_{ik}(\mathbf{r}_1,\, \tau)\,dV_1, \tag{75.5}$$

где точка означает дифференцирование по τ.

Тензор $\ddot{T}_{ik}$, как и всякий симметричный тензор с неравным нулю следом, может быть представлен в виде

$$\ddot{T}_{ik} = \Big(\ddot{T}_{ik} - \frac{1}{3}\ddot{T}_{ll}\delta_{ik}\Big) + \frac{1}{3}\ddot{T}_{ll}\delta_{ik} \equiv Q_{ik} + Q\delta_{ik}, \tag{75.6}$$

где Q_{ik} — «неприводимый» тензор с равным нулю следом, а Q — скаляр. Тогда сферическая волна (75.5) разобьется на сумму двух членов

$$p'(\mathbf{r},\, t) = \frac{\rho}{4\pi c^2 r}\Big\{\int Q(\mathbf{r}_1,\, \tau)\,dV_1 + n_i n_k \int Q_{ik}(\mathbf{r}_1,\, \tau)\,dV_1\Big\}, \tag{75.7}$$

из которых первый представляет собой излучение монопольного, а второй — квадрупольного источника.

Вычислим полную интенсивность излучения. Плотность потока звуковой энергии в волновой зоне направлена в каждой точке вдоль направления $\mathbf{n}$, а по величине равна $q = p'^2/(c\rho)$. Полная интенсивность получается умножением q на $r^2 do$ и интегрированием по всем направлениям $\mathbf{n}$ [2]). Фактически нас интересует, однако, не мгновенное пульсирующее значение интенсивности, а ее усредненное по времени значение (турбулентность предполагается при этом «стационарной»). Эту последнюю операцию

[1]) При этом мы отказываемся от рассмотрения спектрального состава излучения и ограничиваемся основными частотами, определяющими полную интенсивность. Отметим также, что указанную замену нельзя было бы произвести на более ранней стадии преобразований, в (75.3), поскольку интеграл обратился бы в нуль.

[2]) Интегрирование по направлениям $\mathbf{n}$ осуществляется следующими выражениями для средних значений произведений двух или четырех компонент вектора $\mathbf{n}$:

$$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}, \quad \overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}).$$

осуществляем, написав квадрат интегралов в виде двойных интегралов и производя усреднение (которое обозначаем угловыми скобками) под знаком интегралов. В результате получим следующий результат:

$$I = \frac{\rho_0}{60\pi c^5}\iint\langle Q(\mathbf{r}_1,\,\tau)Q(\mathbf{r}_2,\,\tau)\rangle\,dV_1\,dV_2 + \\ + \frac{\rho_0}{30\pi c^5}\iint\langle Q_{ik}(\mathbf{r}_1,\,\tau)Q_{ik}(\mathbf{r}_2,\,\tau)\rangle\,dV_1\,dV_2. \quad (75.8)$$

«Перекрестное» произведение двух членов в (75.7) при интегрировании по направлениям выпадает, так что полная интенсивность оказывается равной сумме монопольного и квадрупольного излучений. Обе эти части в данном случае — вообще говоря, одинакового порядка величины.

Оценим этот порядок величины (вернее — выясним зависимость I от параметров турбулентного движения). Компоненты тензора $T_{ik} \sim u^2$, где u — характерная скорость турбулентного движения. Каждое дифференцирование по времени умножает этот порядок величин на характерную частоту u/l. Поэтому $Q \sim u^4/l^2$. Корреляция между скоростями турбулентных пульсаций в различных точках простирается на расстояния $\sim l$. Поэтому количество энергии, испускаемой в виде звука единицей массы турбулентной среды в единицу времени

$$\varepsilon_{\text{зв}} \sim \frac{1}{c^5}\frac{u^8}{l^4}l^3 = \frac{u^8}{c^5 l}. \quad (75.9)$$

Интенсивность излучения пропорциональна, таким образом, восьмой степени скорости турбулентного движения.

Турбулентное движение поддерживается за счет мощности, подводимой от некоторого внешнего источника. В «стационарном» случае эта мощность совпадает с диссипируемой в единицу времени энергией. Отнесенная к единице массы, эта последняя $\varepsilon_{\text{дисс}} \sim u^3/l$ [1]. Акустический коэффициент полезного действия можно определить как отношение излучаемой мощности к диссипируемой:

$$\frac{\varepsilon_{\text{зв}}}{\varepsilon_{\text{дисс}}} \sim \left(\frac{u}{c}\right)^5. \quad (75.10)$$

Стоящая здесь высокая степень отношения u/c приводит к тому, что при $u/c \ll 1$ эффективность турбулентности как излучателя звука низка.

[1]) См. (33.1). Мы не делаем здесь различия между u и Δu; выбор системы отсчета, по отношению к которой рассматривается движение, устанавливается тем, что жидкость вне турбулентной области предполагается неподвижной.

§ 76. Принцип взаимности

При выводе уравнений звуковой волны в § 64 предполагалось, что волна распространяется в однородной среде. В частности, плотность среды ρ_0 и скорость звука в ней c рассматривались как постоянные величины. Имея в виду получить некоторые общие соотношения, применимые и в общем случае произвольной неоднородной среды, выведем предварительно уравнение распространения звука в такой среде.

Напишем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Но в силу адиабатичности звука имеем

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla p\right),$$

и уравнение непрерывности приводится к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla p + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Положим, как обычно, $\rho = \rho_0 + \rho'$, причем ρ_0 является теперь заданной функцией координат. Что же касается давления, то в $p = p_0 + p'$ должно по-прежнему быть $p_0 = \mathrm{const}$, поскольку в равновесии давление должно быть постоянно вдоль всей среды (если, конечно, отсутствует внешнее поле). Таким образом, с точностью до величин второго порядка малости имеем

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Это уравнение совпадает по форме с уравнением (64.5), но коэффициент ρc^2 в нем есть функция координат. Что касается уравнения Эйлера, то мы имеем, как и в § 64:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}.$$

Исключая $\mathbf{v}$ из обоих этих уравнений (и опуская индекс у ρ_0), получаем окончательно уравнение распространения звука в неоднородной среде:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} - \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \qquad (76.1)$$

Если речь идет о монохроматической волне с частотой ω, то $\ddot{p}' = -\omega^2 p'$, так что

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p' = 0. \qquad (76.2)$$

Рассмотрим звуковую волну, излучаемую источником небольших размеров, совершающим пульсационные колебания (такое

излучение, как мы видели в § 74, изотропно). Обозначим точку, в которой находится источник, через A, а давление p' в излучаемой им волне в точке B [1]) через $p_A(B)$. Если тот же самый источник помещен в точку B, то создаваемое им в точке A давление обозначим соответственно через $p_B(A)$. Выведем соотношение между $p_A(B)$ и $p_B(A)$.

Для этого воспользуемся уравнением (76.2), применив его один раз к излучению источника, находящегося в точке A, а другой раз — к излучению источника, находящегося в B:

$$\operatorname{div}\frac{\nabla p'_A}{\rho}+\frac{\omega^2}{\rho c^2}p'_A=0,\quad \operatorname{div}\frac{\nabla p'_B}{\rho}+\frac{\omega^2}{\rho c^2}p'_B=0.$$

Умножим первое уравнение на p'_B, а второе на p'_A, и вычтем второе из первого. Получаем

$$p'_B\operatorname{div}\frac{\nabla p'_A}{\rho}-p'_A\operatorname{div}\frac{\nabla p'_B}{\rho}=\operatorname{div}\left(\frac{p'_B\nabla p'_A}{\rho}-\frac{p'_A\nabla p'_B}{\rho}\right)=0.$$

Проинтегрируем это уравнение по объему, заключенному между бесконечно удаленной замкнутой поверхностью C и двумя малыми сферами C_A и C_B, окружающими соответственно точки A и B. Объемный интеграл преобразуется в интеграл по этим трем поверхностям, причем интеграл по C обращается в нуль, поскольку на бесконечности звуковое поле исчезает. Таким образом, получаем

$$\int\limits_{C_A+C_B}\left(p'_B\frac{\nabla p'_A}{\rho}-p'_A\frac{\nabla p'_B}{\rho}\right)d\mathbf{f}=0. \tag{76.3}$$

Внутри малой сферы C_A давление p'_A в волне, создаваемой источником, находящимся в A, быстро меняется с расстоянием от A, и потому градиент $\nabla p'_A$ велик. Давление же p'_B, создаваемое источником, находящимся в B, в области вблизи точки A, значительно удаленной от B, является медленно меняющейся функцией координат, так что его градиент $\nabla p'_B$ относительно мал. При достаточно малом радиусе сферы C_A можно поэтому в интеграле по ней пренебречь вторым членом подынтегрального выражения по сравнению с первым, а в последнем можно вынести почти постоянную величину p'_B из-под знака интеграла, заменив ее значением в точке A. Аналогичные рассуждения применимы к интегралу по сфере C_B, и в результате мы получаем из (76.3) следующее соотношение:

$$p'_B(A)\int\limits_{C_A}\frac{\nabla p'_A}{\rho}\,d\mathbf{f}=p'_A(B)\int\limits_{C_B}\frac{\nabla p'_B}{\rho}\,d\mathbf{f}.$$

[1]) Размеры источника должны быть малыми по сравнению с расстоянием между A и B, а также по сравнению с длиной волны.

Но $\nabla p'/\rho = -\partial \mathbf{v}/\partial t$; поэтому это равенство можно переписать в виде

$$p'_B(A)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{C_A} \mathbf{v}_A\, d\mathbf{f} = p'_A(B)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{C_B} \mathbf{v}_B\, d\mathbf{f}.$$

Интеграл $\int\limits_{C_A} \mathbf{v}_A\, d\mathbf{f}$ представляет собой количество жидкости, протекающей через поверхность сферы C_A в единицу времени, т. е. изменение (в 1 с) объема пульсирующего источника звука. Поскольку источники в точках A и B тождественны, то ясно, что

$$\int\limits_{C_A} \mathbf{v}_A\, d\mathbf{f} = \int\limits_{C_B} \mathbf{v}_B\, d\mathbf{f},$$

и, следовательно,

$$p'_A(B) = p'_B(A). \tag{76.4}$$

Это равенство представляет собой содержание так называемого принципа взаимности: давление, создаваемое в точке B источником, находящимся в точке A, равно давлению, создаваемому в A таким же источником, находящимся в B. Подчеркнем, что этот результат относится, в частности, и к тому случаю, когда среда представляет собой совокупность нескольких различных областей, каждая из которых однородна. При распространении звука в такой среде на поверхностях раздела различных областей происходит отражение и преломление. Таким образом, принцип взаимности применим и в тех случаях, когда на пути своего распространения от точки A к B и обратно волна испытывает отражения и преломления.

Задача

Вывести принцип взаимности для дипольного звукового излучения, создаваемого источником, совершающим колебания без изменения своего объема

Решение. В данном случае

$$\int\limits_{C_A} \mathbf{v}_A\, d\mathbf{f} = 0 \tag{1}$$

и при вычислении интегралов в (76.3) необходимо учесть следующее приближение. Для этого имеем с точностью до членов первого порядка

$$p'_B = p'_B(A) + \mathbf{r}\nabla p'_B, \tag{2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из точки A. В интеграле

$$\int\limits_{C_A} \left(p'_B\frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A\frac{\nabla p'_B}{\rho}\right) d\mathbf{f} \tag{3}$$

оба члена имеют теперь одинаковый порядок величины. Подставляя сюда p'_B из (2) и учитывая (1), получим

$$\int\limits_{C_A}\left[(\mathbf{r}\nabla p'_B)\frac{\nabla p'_A}{\rho}-p'_A\frac{\nabla p'_B}{\rho}\right]d\mathbf{f}.$$

Далее, выносим почти постоянную величину $\nabla p'_B=-\rho\dot{\mathbf{v}}_B$ из-под знака интеграла, заменив ее значением в точке A:

$$\rho_A\dot{\mathbf{v}}_B(A)\int\limits_{C_A}\left[\frac{p'_A}{\rho}\,d\mathbf{f}-\mathbf{r}\left(\frac{\nabla p'_A}{\rho}\,d\mathbf{f}.\right)\right]$$

(ρ_A — плотность среды в точке A). Для вычисления этого интеграла замечаем, что вблизи источника жидкость можно считать несжимаемой (см. § 74), и потому для давления внутри малой сферы C_A можно написать согласно (11.1)

$$p'_A=-\rho\dot{\varphi}=\rho\frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{r^3}.$$

В монохроматической волне $\dot{\mathbf{v}}=-i\omega\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{A}}=-i\omega\mathbf{A}$; вводя также единичный вектор $\mathbf{n}_A$ в направлении вектора $\mathbf{A}$ для источника, находящегося в точке A, найдем, что интеграл (3) пропорционален по величине

$$\rho_A\mathbf{v}_B(A)\mathbf{n}_A.$$

Аналогично интеграл по сфере C_B будет пропорционален

$$-\rho_B\mathbf{v}_A(B)\mathbf{n}_B$$

с тем же коэффициентом пропорциональности. Приравнивая их сумму нулю, найдем искомое соотношение

$$\rho_A\mathbf{v}_B(A)\mathbf{n}_A=\rho_B\mathbf{v}_A(B)\mathbf{n}_B,$$

выражающее собой принцип взаимности для дипольного звукового излучения.

§ 77. Распространение звука по трубке

Рассмотрим распространение звуковой волны вдоль длинной узкой трубки. Под узкой подразумевается трубка, ширина которой мала по сравнению с длиной волны. Сечение трубки может меняться вдоль ее длины как по форме, так и по площади. Важно только, чтобы это изменение происходило достаточно медленно, — площадь S сечения должна мало меняться на расстояниях порядка ширины трубки.

В этих условиях можно считать, что вдоль каждого поперечного сечения трубки все величины (скорость, плотность и т. п.) постоянны. Направление же распространения волны можно считать везде совпадающим с направлением оси трубки. Уравнение, определяющее распространение такой волны, удобнее всего вывести методом, аналогичным примененному в § 12 для вывода уравнения распространения гравитационных волн в каналах.

В единицу времени через сечение трубки проходит масса $S\rho v$ жидкости. Поэтому количество (масса) жидкости в объеме между двумя бесконечно близкими поперечными сечениями трубки уменьшается в 1 с на

$$(Sv\rho)_{x+dx} - (Sv\rho)_x = \frac{\partial(Sv\rho)}{\partial x}\,dx$$

(координата x вдоль оси трубки). Поскольку самый объем между обоими сечениями остается неизменным, то это уменьшение может произойти только за счет изменения плотности жидкости.

Изменение плотности в единицу времени есть $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, а соответствующее уменьшение массы жидкости в объеме $S\,dx$ между двумя сечениями равно

$$-S\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx.$$

Приравнивая оба выражения, получаем уравнение

$$S\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(S\rho v)}{\partial x}, \tag{77.1}$$

представляющее собой уравнение непрерывности для жидкости в трубке.

Далее, напишем уравнение Эйлера, опуская в нем квадратичный по скорости член:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{77.2}$$

Продифференцируем (77.1) по времени; при дифференцировании правой части этого уравнения надо считать ρ не зависящим от времени, так как при дифференцировании ρ возникает член, содержащий $v\frac{\partial\rho}{\partial t} = v\frac{\partial\rho'}{\partial t}$ и потому малый второго порядка. Таким образом,

$$S\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(S\rho\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Подставляем сюда для $\partial v/\partial t$ выражение (77.2), а стоящую слева производную от плотности выражаем через производную от давления согласно $\ddot\rho = \ddot p/c^2$.

В результате получаем следующее уравнение распространения звука в трубке:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \tag{77.3}$$

В монохроматической волне p [1]) зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$, и (77.3) переходит в

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)+k^2p=0 \tag{77.4}$$

($k=\omega/c$ — волновой вектор).

Наконец, остановимся на вопросе об излучении звука из открытого конца трубки. Разность давлений между газом в конце трубки и газом в окружающем трубку пространстве мала по сравнению с разностями давлений внутри трубки. Поэтому в качестве граничного условия на открытом конце трубки надо с достаточной точностью потребовать обращения давления p в нуль. Скорость же газа v у конца трубки при этом оказывается отличной от нуля; пусть v_0 есть ее значение здесь. Произведение Sv_0 есть количество (объем) газа, выходящего в единицу времени из конца трубки.

Мы можем теперь рассматривать открытый конец трубки как некоторый источник газа с производительностью Sv_0. Задача об излучении из трубки делается эквивалентной задаче об излучении пульсирующего тела, определяющемся формулой (74.10). Вместо производной $\dot{V}$ от объема тела по времени мы должны теперь писать величину Sv_0. Таким образом, полная интенсивность излучаемого звука есть

$$I=\frac{\rho\overline{S^2\dot{v}_0^2}}{4\pi c}. \tag{77.5}$$

З а д а ч и

1. Определить коэффициент прохождения звука при переходе его из трубки сечения S_1 в трубку сечения S_2.

Р е ш е н и е. В первой трубке имеем две волны — падающую p_1 и отраженную p_1', а во второй трубке — одна прошедшая волна p_2:

$$p_1=a_1e^{i(kx-\omega t)},\quad p_1'=a_1'e^{-i(kx+\omega t)},\quad p_2=a_2e^{i(kx-\omega t)}.$$

В месте соединения трубок ($x=0$) должны быть равными давления и количества Sv газа, переходящие из одной трубки в другую. Эти условия дают

$$a_1+a_1'=a_2,\quad S_1\left(a_1-a_1'\right)=S_2a_2,$$

откуда

$$a_2=a_1\frac{2S_1}{S_1+S_2}.$$

Отношение D потока энергии в прошедшей волне к потоку энергии в падающей волне равно

$$D=\frac{S_2\overline{|v_2|^2}}{S_1\overline{|v_1|^2}}=\frac{4S_1S_2}{(S_1+S_2)^2}=1-\left(\frac{S_2-S_1}{S_2+S_1}\right)^2.$$

[1]) Здесь и в задачах к этому параграфу под p подразумевается везде переменная часть давления (которую мы раньше обозначали через p').

2. Определить количество энергии, излучаемой из открытого конца цилиндрической трубки.

Р е ш е н и е. В граничном условии $p = 0$ на открытом конце трубки можно приближенно пренебречь излучаемой волной (мы увидим, что интенсивность излучения из конца трубки мала). Тогда имеем условие $p_1 = -p_1'$, где p_1 и p_1' — давления в падающей волне и в волне, отраженной обратно в трубку; для скоростей будем соответственно иметь $v_1 = v_1'$, так что суммарная скорость на выходе из трубки есть $v_0 = v_1 + v_1' = 2v_1$. Поток энергии в падающей волне равен $cS\rho\overline{v_1^2} = (1/4)cS\rho\overline{v_0^2}$. С помощью (77.5) получаем для отношения излучаемой энергии к потоку в падающей волне

$$D = \frac{S\omega^2}{\pi c^2}.$$

Для трубки кругового сечения (радиуса R) имеем $D = R^2\omega^2/c^2$. Поскольку по предположению $R \ll c/\omega$, то $D \ll 1$.

3. Одно из отверстий цилиндрической трубки закрыто излучающей звук мембраной, совершающей заданное колебательное движение; другой конец трубки открыт. Определить излучение звука из трубки.

Р е ш е н и е. В общем решении

$$p = \left(ae^{ikx} + be^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

определяем постоянные a и b из условий $v = u$ ($u = u_0e^{-i\omega t}$ — заданная скорость колебаний мембраны) на закрытом конце трубки ($x = 0$) и условия $p = 0$ на открытом конце ($x = l$). Эти условия дают

$$ae^{ikl} + be^{-ikl} = 0, \quad a - b = c\rho u_0.$$

Определяя a и b, находим для скорости газа на открытом конце трубки величину $v_0 = u/\cos kl$. Если бы трубки не было, то интенсивность излучения колеблющейся мембраной определялась бы средним квадратом $S^2\overline{|\dot{u}|^2} = S^2\omega^2\overline{|u|^2}$ согласно формуле (74.10) с Su вместо $\dot{V}$; S — площадь поверхности мембраны. Излучение же из конца трубки пропорционально $S^2\overline{|v_0|^2}\omega^2$. Коэффициент усиления звука трубкой есть

$$A = \frac{S^2\overline{|v_0|^2}}{S^2\overline{|u|^2}} = \frac{1}{\cos^2 kl}.$$

Он обращается в бесконечность при частотах колебаний мембраны, равных собственным частотам трубки (резонанс); в действительности, конечно, он все же остается конечным благодаря наличию эффектов, которыми мы пренебрегли (например, трения, влияния излучения звука).

4. То же для конической трубки (мембрана закрывает меньшее из отверстий трубки).

Р е ш е н и е. Для сечения трубки имеем $S = S_0x^2$, меньшему и большему отверстиям трубки пусть соответствуют значения x_1 и x_2 координаты x, так что длина трубки есть $l = x_2 - x_1$. Общее решение уравнения (77.4) есть

$$p = \frac{1}{x}\left(ae^{ikx} + be^{-ikx}\right)e^{-i\omega t};$$

a и b определяются из условий $v = u$ при $x = x_1$ и $p = 0$ при $x = x_2$. Для коэффициента усиления получаем

$$A = \frac{S_0^2x_2^4\overline{|v_2|^2}}{S_0^2x_1^4\overline{|u|^2}} = \frac{k^2x_2^2}{(\sin kl + kx_1\cos kl)^2}.$$

5. То же для трубки, сечение которой меняется вдоль ее длины по экспоненциальному закону $S = S_0 e^{\alpha x}$.

Р е ш е н и е. Уравнение (77.4) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0,$$

откуда

$$p = e^{-\alpha x/2}\left(a e^{imx} + b e^{-imx}\right) e^{-i\omega t}, \quad m = \left(k^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Определяя a и b из условий $v = u$ при $x = 0$ и $p = 0$ при $x = l$, находим для коэффициента усиления

$$A = \frac{S_0^2 e^{2\alpha l}\overline{|v_0^2|^2}}{S_0^2 \overline{|u|^2}} = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\sin ml}{m} + \cos ml\right)^2}$$

при $k > \alpha/2$ и

$$A = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\operatorname{sh} m'l}{m'} + \operatorname{ch} m'l\right)^2}, \quad m' = \left(\frac{\alpha^2}{4} - k^2\right)^{1/2}$$

при $k < \alpha/2$.

§ 78. Рассеяние звука

Если на пути распространения звуковой волны находится какое-либо тело, то происходит, как говорят, рассеяние звука: наряду с падающей волной появляются дополнительные (рассеянная) волны, распространяющиеся во все стороны от рассеивающего тела. Рассеяние звуковой волны происходит уже благодаря самому факту наличия тела на ее пути. Кроме того, под влиянием падающей волны само тело приходит в движение; это движение в свою очередь обусловливает некоторое дополнительное излучение звука телом, т. е. некоторое дополнительное рассеяние. Однако, если плотность тела велика по сравнению с плотностью среды, в которой происходит распространение звука, а его сжимаемость мала, то рассеяние, связанное с движением тела, представляет собой лишь малую поправку к основному рассеянию, обусловленному самим наличием тела. Этой поправкой мы будем в дальнейшем пренебрегать и потому будем считать, рассеивающее тело неподвижным.

Будем предполагать, что длина волны звука λ велика по сравнению с размерами l тела; тогда для вычисления рассеянной волны можно воспользоваться формулами (74.8) и (74.11) [1].

[1]) В то же время требуется, чтобы размеры тела были велики по сравнению с амплитудой смещений частиц жидкости в волне; в противном случае движение жидкости не будет, вообще говоря, потенциальным.

Рассеянную волну мы при этом рассматриваем как волну, излучаемую телом; разница заключается только в том, что вместо движения тела в жидкости мы имеем теперь дело с движением жидкости относительно тела. Обе задачи, очевидно, эквивалентны.

Для потенциала излучаемой волны мы получили выражение

$$\varphi = -\frac{\dot{V}}{4\pi r} - \frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{cr^2}.$$

В этой формуле V — объем тела. Теперь же объем самого тела остается неизменным, и под $\dot{V}$ надо подразумевать не скорость изменения объема тела, а то количество (объем) жидкости, которое вошло бы в единицу времени в объем, занимаемый телом (этот объем обозначим через V_0), если бы этого тела вообще не было. Действительно, при наличии тела это количество жидкости не проникает внутрь занимаемого телом объема, что эквивалентно выбрасыванию этого же количества из объема V_0. Коэффициент же при $1/(4\pi r)$ в первом члене в φ должен быть, как мы видели в предыдущем параграфе, равен как раз количеству «выбрасываемой» в 1 с из начала координат жидкости. Это количество легко вычислить. Изменение массы жидкости в единицу времени в объеме, равном объему тела, равно $V_0\dot{\rho}$, где функция ρ определяет изменение со временем плотности жидкости в падающей звуковой волне (поскольку длина волны велика по сравнению с размерами тела, то на протяжении расстояний порядка этих размеров плотность ρ можно считать постоянной; поэтому мы можем писать изменение массы жидкости в объеме V_0 просто в виде $V_0\dot{\rho}$, где $\dot{\rho}$ одинаково вдоль всего объема V_0). Изменение объема жидкости, соответствующее изменению массы $\dot{\rho}V_0$, есть, очевидно, $V_0\dot{\rho}/\rho$. Таким образом, вместо $\dot{V}$ надо писать в выражении для φ величину $V_0\dot{\rho}/\rho$. В падающей плоской волне переменная часть плотности ρ' связана со скоростью соотношением $\rho' = \rho v/c$; поэтому $\dot{\rho} = \dot{\rho}' = \rho\dot{v}/c$, и вместо $V_0\dot{\rho}/\rho$ можно писать $V_0\dot{v}/c$.

Что касается вектора $\mathbf{A}$, то при движении тела в жидкости он определяется формулами (11.5), (11.6):

$$4\pi\rho A_i = m_{ik}u_k + \rho V_0 u_i.$$

Теперь же мы должны писать вместо скорости $\mathbf{u}$ тела взятую с обратным знаком скорость $\mathbf{v}$ жидкости в падающей волне (которую она имела бы в месте нахождения тела, если бы тела вовсе не было). Таким образом,

$$A_i = -\frac{1}{4\pi\rho}m_{ik}v_k - \frac{V_0}{4\pi}v_i. \qquad (78.1)$$

Окончательно получаем для потенциала рассеянной волны

$$\varphi_{\text{р}} = -\frac{V_0\dot{v}}{4\pi cr} - \frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{cr^2} \tag{78.2}$$

с вектором $\mathbf{A}$, определяющимся формулой (78.1). Для распределения скоростей в рассеянной волне получаем отсюда

$$\mathbf{v}_{\text{р}} = \frac{V_0\ddot{v}\mathbf{n}}{4\pi rc^2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{A}})}{rc^2} \tag{78.3}$$

(см. § 74; $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении рассеяния).

Среднее количество рассеиваемой (в 1 с) в данном элементе do телесного угла энергии определяется потоком энергии, равным $c\rho\overline{\mathbf{v}_{\text{р}}^2}\,do$. Полная интенсивность $I_{\text{р}}$ рассеяния получается интегрированием этого выражения по всем направлениям. При этом интегрировании удвоенное произведение обоих членов в (78.3), пропорциональное первой степени косинуса угла между направлением рассеяния и направлением распространения падающей волны, исчезает и остается (ср. (74.10) и (74.13)):

$$I_{\text{р}} = \frac{V_0^2\rho}{4\pi c^3}\overline{\ddot{v}^2} + \frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}. \tag{78.4}$$

Рассеяние принято характеризовать его *эффективным сечением* (или просто *сечением*) $d\sigma$. Оно определяется как отношение средней (по времени) рассеиваемой в данном элементе телесного угла энергии к средней плотности потока энергии в падающей волне. Полное сечение σ равно интегралу от $d\sigma$ по всем направлениям рассеяния, т. е. равно отношению полной интенсивности рассеяния к плотности падающего потока энергии. Сечение имеет, очевидно, размерность площади.

Средняя плотность потока энергии в падающей волне есть $c\rho\overline{\mathbf{v}^2}$. Поэтому дифференциальное сечение рассеяния равно отношению

$$d\sigma = \frac{\overline{\mathbf{v}_{\text{р}}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}}r^2\,do. \tag{78.5}$$

Полное сечение равно

$$\sigma = \frac{V_0^2}{4\pi c^4}\frac{\overline{\ddot{v}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}} + \frac{4\pi}{3c^4}\frac{\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}}. \tag{78.6}$$

Для монохроматической падающей волны среднее значение квадрата второй производной от скорости по времени пропорционально четвертой степени частоты. Таким образом, сечение рассеяния звука телом, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, пропорционально четвертой степени частоты.

Наконец, остановимся коротко на обратном предельном случае, когда длина волны рассеиваемого звука мала по сравнению

с размерами тела. В этом случае все рассеяние, за исключением лишь рассеяния на очень малые углы, сводится к простому отражению от поверхности тела. Соответствующая часть полного сечения рассеяния равна, очевидно, просто площади S сечения тела плоскостью, перпендикулярной к направлению падающей волны. Рассеяние же на малые углы (углы порядка λ/l) представляет собой дифракцию от краев тела. Мы не станем излагать здесь теорию этого явления, полностью аналогичную теории дифракции света (см. II, § 60, 61). Укажем лишь, что согласно принципу Бабине полная интенсивность дифрагировавшего звука равна полной интенсивности отраженного звука. Поэтому дифракционная часть сечения рассеяния равна той же площади S, а полное сечение равно, следовательно, $2S$.

Задачи

1. Определить сечение рассеяния плоской звуковой волны твердым шариком, радиус R которого мал по сравнению с длиной волны.

Решение. Для скорости в плоской волне имеем $v = a\cos\omega t$ (в данной точке пространства). Вектор $\mathbf{A}$ равен в случае шара (см. задачу 1 § 11) $\mathbf{A} = -\mathbf{v}R^3/2$. Для дифференциального сечения получаем

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4}\left(1 - \frac{3\cos\theta}{2}\right)^2 do$$

(θ — угол между направлением падающей волны и направлением рассеяния). Интенсивность рассеяния максимальна в направлении $\theta = \pi$, противоположном направлению падения. Полное сечение равно

$$\sigma = \frac{7\pi}{9}\left(\frac{R^3\omega^2}{c^2}\right)^2. \qquad (1)$$

Здесь (а также ниже в задачах 3, 4) предполагается, что плотность ρ_0 шарика велика по сравнению с плотностью ρ газа; в противном случае надо учитывать увлечение шарика действующими на него со стороны колеблющегося газа силами давления.

2. Определить сечение рассеяния звука жидкой каплей с учетом сжимаемости жидкости и движения капли под влиянием падающей волны.

Решение. При адиабатическом изменении давления газа, в котором находится капля, на величину p' объем капли уменьшается на

$$\frac{V_0}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial p}\right)_s p' = \frac{V_0}{\rho_0 c_0^2} c\rho v$$

(ρ — плотность газа, ρ_0 — плотность жидкости в капле, c_0 — скорость звука в жидкости). В выражениях (78.2), (78.3) надо писать теперь вместо $V_0\dot{v}/c$ разность

$$V_0\left(\dot{v}/c - \dot{v}c\rho/\left(c_0^2\rho_0\right)\right).$$

Далее, в выражении для $\mathbf{A}$ надо писать теперь вместо $-\mathbf{v}$ разность $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость тела, приобретаемая им под влиянием падающей волны. Для шара получаем с помощью результатов задачи 1 § 11

$$\mathbf{A} = R^3\mathbf{v}\frac{\rho - \rho_0}{2\rho_0 + \rho}.$$

Подстановка этих выражений приводит к сечению

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4}\left[\left(1-\frac{c^2\rho}{c_0^2\rho_0}\right) - 3\cos\theta\frac{\rho_0-\rho}{2\rho_0+\rho}\right]^2 do.$$

Полное сечение равно

$$\sigma = \frac{4\pi\omega^4 R^6}{9c^4}\left[\left(1-\frac{c^2\rho}{c_0^2\rho_0}\right)^2 + \frac{3(\rho_0-\rho)^2}{(2\rho_0+\rho)^2}\right].$$

3. Определить сечение рассеяния звука твердым шариком, радиус R которого мал по сравнению с $\sqrt{\nu/\omega}$. Теплоемкость шарика предполагается настолько большой, что его температуру можно считать неизменной.

Р е ш е н и е. В этом случае должно быть учтено влияние вязкости газа на движение шарика, и вектор $\mathbf{A}$ должен быть видоизменен указанным в задаче 2 § 74 образом; при $R\sqrt{\omega/\nu} \ll 1$ имеем

$$\mathbf{A} = -i\frac{3R\nu}{2\omega}\mathbf{v}.$$

Кроме того, к рассеянию того же порядка величины приводит теплопроводность газа. Пусть $T_0' e^{-i\omega t}$ — колебания температуры в заданной точке звуковой волны. Распределение температуры вблизи шарика будет (ср. задачу 2 § 52):

$$T' = T_0' e^{-i\omega t}\left\{1 - \frac{R}{r}\exp\left[-(1-i)(r-R)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right]\right\}$$

(при $r = R$ должно быть $T' = 0$). Количество тепла, передаваемое в единицу времени от газа к шарику, есть (при $R\sqrt{\omega/\chi} \ll 1$):

$$q = 4\pi R^2 \varkappa \frac{dT'}{dr}\bigg|_{r=R} = 4\pi R\varkappa T_0' e^{-i\omega t}.$$

Передача этого тепла приводит к изменению объема газа, которое можно воспринимать в смысле его влияния на рассеяние как соответствующее эффективное изменение объема шарика, равное

$$\dot V = -4\pi R\chi\beta T_0' e^{-i\omega t} = -\frac{4\pi R}{c}\chi(\gamma-1)v,$$

где β — коэффициент теплового расширения газа, а $\gamma = c_p/c_v$; мы воспользовались также формулами (64.13) и (79.2).

Учитывая оба эффекта, получим дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{\omega^2 R^2}{c^4}\left[\chi(\gamma-1) - \frac{3}{2}\nu\cos\theta\right] do.$$

Полное эффективное сечение:

$$\sigma = \frac{4\pi\omega^2 R^2}{c^4}\left[\chi^2(\gamma-1)^2 + \frac{3}{4}\nu^2\right].$$

Эти формулы применимы лишь постольку, поскольку стоксова сила трения мала по сравнению с инерционными силами, т. е. $\eta R \ll M\omega$, где $M = 4\pi R^3\rho_0/3$ — масса шарика; в противном случае становится существенным увлечение шарика вязкими силами.

4. Определить среднюю силу, действующую на твердый шарик, рассеивающий плоскую звуковую волну ($\lambda \gg R$).

Р е ш е н и е. Передаваемый в единицу времени от падающей волны шарику импульс, т. е. искомая сила, равен разности импульса, приносимого

рассеиваемой волной, и полного потока импульса в рассеянной волне. Из падающей волны рассеивается поток энергии, равный $\sigma c\overline{E}_0$, где E_0 — плотность энергии в падающей волне; соответствующий поток импульса получается делением на c, т. е. равен $\sigma\overline{E}_0$. В рассеянной волне поток импульса в телесном угле do равен $\overline{E}_{\text{p}} r^2\,do = \overline{E}_0\,d\sigma$; проецируя его на направление распространения падающей волны (очевидно, что искомая сила имеет это направление) и интегрируя по всем углам, получим $\overline{E}_0 \int \cos\theta\,d\sigma$. Таким образом, действующая на шарик сила равна

$$F = \overline{E}_0 \int (1-\cos\theta)\,d\sigma.$$

Подставляя сюда $d\sigma$ из задачи 1, получим

$$F = \overline{E}_0 \frac{11\pi\omega^4 R^6}{9c^4}.$$

§ 79. Поглощение звука

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к диссипации энергии звуковых волн, в связи с чем звук поглощается, т. е. его интенсивность постепенно уменьшается. Для вычисления диссипируемой в единицу времени энергии $\dot{E}_{\text{мех}}$ воспользуемся следующими общими соображениями. Механическая энергия представляет собой не что иное, как максимальную работу, которую можно получить при переходе из данного неравновесного состояния в состояние термодинамического равновесия. Как известно из термодинамики, максимальная работа совершается, если переход происходит обратимым образом (т. е. без изменения энтропии), и равна соответственно этому

$$E_{\text{мех}} = E_0 - E(S),$$

где E_0 есть заданное начальное значение энергии тела в исходном состоянии, а $E(S)$ — энергия тела в состоянии равновесия с той же энтропией S, которую тело имело вначале. Дифференцируя по времени, получаем

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\dot{E}(S) = -\frac{\partial E}{\partial S}\dot{S}.$$

Производная от энергии по энтропии есть температура. Поэтому $\dfrac{\partial E}{\partial S}$ — температура, которую имело бы тело, если бы оно находилось в состоянии термодинамического равновесия (с заданным значением энтропии). Обозначая эту температуру как T_0, имеем, следовательно:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -T_0\dot{S}.$$

Воспользуемся для $\dot{S}$ выражением (49.6), включающим в себя возрастание энтропии, обусловленное как теплопроводностью,

так и вязкостью. Поскольку температура T мало меняется вдоль жидкости и мало отличается от T_0, то можно вынести ее из-под знака интеграла и писать T вместо T_0:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = \frac{\varkappa}{T}\int (\nabla T)^2\, dV - \frac{\eta}{2}\int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV - \zeta\int (\operatorname{div}\mathbf{v})^2\, dV. \quad (79.1)$$

Эта формула представляет собой обобщение формулы (16.3) на случай сжимаемой жидкости и наличия теплопроводности.

Пусть ось x совпадает с направлением распространения звуковой волны. Тогда

$$v_x = v_0\cos(kx - \omega t), \quad v_y = v_z = 0.$$

Два последних члена в (79.1) дают

$$-\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\int \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dV = -k^2\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)v_0^2 \int \sin^2(kx - \omega t)\, dV.$$

Нас, конечно, интересует среднее по времени значение величин; усреднение дает

$$-k^2\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\cdot \frac{1}{2}v_0^2 V_0$$

(V_0 — объем жидкости).

Далее, вычислим первый член в (79.1). Отклонение T' температуры в звуковой волне от своего равновесного значения связано со скоростью формулой (64.13), так что градиент температуры равен

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \beta\frac{cT}{c_p}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\beta c T}{c_p}v_0 k\sin(kx - \omega t).$$

Для среднего по времени значения от первого члена в (79.1) получаем

$$-\frac{\varkappa c^2 T\beta^2}{2c_p^2}v_0^2 k^2 V_0.$$

С помощью известных термодинамических формул

$$c_p - c_v = T\beta^2\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = T\beta^2\frac{c_v}{c_p}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = T\beta^2 c^2\frac{c_v}{c_p} \quad (79.2)$$

можно переписать это выражение в виде

$$-\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)k^2 v_0^2 V_0.$$

Собирая полученные выражения, находим среднее значение диссипации энергии в виде

$$\overline{\dot{E}}_{\text{мех}} = -\frac{k^2 v_0^2 V_0}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right]. \quad (79.3)$$

Полная же энергия звуковой волны равна

$$\overline{E} = \frac{\rho v_0^2}{2} V_0. \tag{79.4}$$

Введенный в § 25 коэффициент затухания волны определяет закон уменьшения интенсивности со временем. Для звука, однако, обычно приходится иметь дело с несколько иной постановкой задачи, в которой звуковая волна распространяется вдоль жидкости и ее интенсивность падает с увеличением пройденного расстояния x. Очевидно, что это уменьшение будет происходить по закону $e^{-2\gamma x}$, а для амплитуды — как $e^{-\gamma x}$, где коэффициент поглощения γ определяется следующим соотношением

$$\gamma = \frac{|\overline{\dot{E}_{\text{мех}}}|}{2c\overline{E}}. \tag{79.5}$$

Подставляя сюда (79.3) и (79.4), находим, таким образом, следующее выражение для коэффициента поглощения звука:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right] \equiv a\omega^2. \tag{79.6}$$

Отметим, что он пропорционален квадрату частоты звука [1]).

Эта формула применима постольку, поскольку определяемый ею коэффициент поглощения мал: должно быть мало относительное убывание амплитуды на расстояниях порядка длины волны (т. е. должно быть $\gamma c/\omega \ll 1$). На этом предположении по существу основан изложенный вывод, так как мы вычисляли диссипацию энергии с помощью незатухающего выражения для звуковой волны. Для газов это условие фактически всегда выполнено. Рассмотрим, например, первый член в (79.6). Условие $\gamma c/\omega \ll 1$ означает, что должно быть $\nu\omega/c^2 \ll 1$. Но, как известно из кинетической теории газов, коэффициент вязкости ν газа — порядка величины произведения длины свободного пробега l на среднюю тепловую скорость молекул; последняя совпадает по порядку величины со скоростью звука в газе, так что $\nu \sim lc$. Поэтому имеем

$$\frac{\nu\omega}{c^2} \sim \frac{l\omega}{c} \sim \frac{l}{\lambda} \ll 1, \tag{79.7}$$

так как заведомо $l \ll \lambda$. Член с теплопроводностью в (79.6) дает то же самое, поскольку $\chi \sim \nu$.

[1]) Специфический механизм поглощения должен иметь место при распространении звука в двухфазной среде — эмульсии (*М.А. Исакович*, 1948). Ввиду различия в термодинамических свойствах компонент эмульсии изменения их температуры при прохождении звуковой волны будут, вообще говоря, различны. Возникающий при этом между ними теплообмен приведет к дополнительному поглощению звука. Вследствие сравнительной медленности этого теплообмена уже сравнительно рано возникает и существенная дисперсия звука.

Что же касается жидкостей, то и здесь условие малости поглощения выполняется всегда, когда вообще имеет смысл задача о поглощении звука в той постановке, о которой здесь шла речь. Поглощение (на длине волны) может стать большим, лишь если силы вязких напряжений сравнимы с силами давления, возникающими при сжатии вещества. Но в таких условиях становится неприменимым уже самое уравнение Навье–Стокса (с не зависящими от частоты коэффициентами вязкости) и возникает существенная, связанная с процессами внутреннего трения дисперсия звука [1]).

При поглощении звука соотношение между волновым вектором и частотой можно, очевидно, написать в виде

$$k = \frac{\omega}{c} + ia\omega^2 \tag{79.8}$$

(где a — коэффициент в (79.6)). Легко сообразить соответственно этому, каким образом надо видоизменить уравнение бегущей звуковой волны для того, чтобы учесть в нем эффект поглощения. Для этого замечаем, что в отсутствие поглощения дифференциальное уравнение для, скажем, давления $p' = p'(x - ct)$ можно написать в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p'}{\partial t}.$$

Уравнение же, решением которого была бы функция $e^{i(kx-\omega t)}$ с k из (70.8), надо, очевидно, написать в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p'}{\partial t} + a\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \tag{79.9}$$

Если ввести вместо t переменную $\tau = t - x/c$, то это уравнение перейдет в

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = a\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2},$$

т. е. уравнение типа одномерного уравнения теплопроводности. Общее решение этого уравнения можно написать в виде (см. § 51)

$$p'(x,\,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a x}}\int p_0'(\tau')\exp\left[-\frac{(\tau'-\tau)^2}{4ax}\right]d\tau' \tag{79.10}$$

(где $p_0'(\tau) = p'(0,\,\tau)$). Если волна излучалась в течение ограниченного промежутка времени, то на достаточно больших

[1]) Особый случай, когда возможно сильное поглощение звука, которое может быть рассмотрено обычными методами, — газ с аномально большой (по сравнению с его вязкостью) теплопроводностью, связанной с посторонними причинами, например, с лучистой теплопроводностью при очень высоких температурах (ср. задачу 3 этого параграфа).

расстояниях от источника это выражение переходит в

$$p'(x,\,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a x}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{4ax}\right)\int p_0'(\tau')\,d\tau'. \tag{79.11}$$

Другими словами, на больших расстояниях профиль волны определяется гауссовой кривой. Его ширина $\sim(ax)^{1/2}$, т. е. растет пропорционально корню из пройденного волной расстояния, амплитуда же волны падает как $x^{-1/2}$. Отсюда легко заключить, что полная энергия волны падает по тому же закону $x^{-1/2}$.

Легко вывести аналогичные формулы для шаровых волн. При этом надо учитывать, что для такой волны $\int p'\,dt = 0$ (см. (70.8)). Вместо (79.11) получим теперь

$$p'(r,\,\tau) = \mathrm{const}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\exp\left[-\tau^2/(4ar)\right]}{r^{1/2}}$$

или

$$p'(r,\,\tau) = \mathrm{const}\cdot\frac{\tau}{r^{5/2}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{4ar}\right). \tag{79.12}$$

Сильное поглощение должно происходить при отражении звуковой волны от твердой стенки. Причина этого явления состоит в следующем (*K.F. Herzfeld*, 1938; *Б.П. Константинов*, 1939).

В звуковой волне наряду с плотностью и давлением испытывает периодические колебания около своего среднего значения также и температура. Поэтому вблизи твердой стенки имеется периодически меняющаяся по величине разность температур между жидкостью и стенкой, даже если средняя температура жидкости равна температуре стенки. Между тем на самой поверхности температуры соприкасающихся жидкости и стенки должны быть одинаковыми. В результате в тонком пристеночном слое жидкости возникает большой градиент температуры; температура быстро меняется от своего значения в звуковой волне до температуры стенки. Наличие же больших градиентов температуры приводит к большой диссипации энергии путем теплопроводности. По аналогичной причине к большому поглощению звука приводит при наклонном падении волны также и вязкость жидкости. При таком падении скорость жидкости в волне (по направлению распространения волны) имеет отличную от нуля компоненту, касательную к поверхности стенки. Между тем на самой поверхности жидкость должна полностью «прилипать» к стенке. Поэтому в пристеночном слое жидкости возникает большой градиент касательной составляющей скорости [1]), что и приводит к большой вязкой диссипации энергии (см. задачу 1).

[1]) Что касается нормальной составляющей скорости, то на стенке она равна нулю уже в силу граничных условий для идеальной жидкости.

Задачи

1. Определить долю энергии, поглощаемой при отражении звуковой волны от твердой стенки. Плотность вещества стенки предполагается настолько большой, что звук практически не проникает в него, а теплоемкость — настолько большой, что температуру стенки можно считать постоянной.

Решение. Выбираем плоскость стенки в качестве плоскости $x = 0$, а плоскость падения в качестве плоскости xy. Угол падения (равный углу отражения) есть θ. Изменение плотности в падающей волне в некоторой точке на поверхности (скажем, в точке $x = y = 0$) есть $\rho_1' = Ae^{-i\omega t}$. Отраженная волна имеет ту же амплитуду, так что у стенки в ней $\rho_2' = \rho_1'$. Реальное изменение плотности жидкости, в которой распространяются одновременно обе волны (падающая и отраженная), есть $\rho' = 2Ae^{-i\omega t}$. Скорость жидкости в волне определяется согласно

$$\mathbf{v}_1 = \frac{c}{\rho}\rho_1'\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{c}{\rho}\rho_2'\mathbf{n}_2.$$

Полная скорость на стенке $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ есть поэтому

$$v = v_y = 2A\sin\theta\frac{c}{\rho}e^{-i\omega t}$$

(вернее, это есть то значение скорости, которое она имеет без учета верных граничных условий на поверхности стенки при наличия вязкости). Истинный ход скорости v_y вблизи стенки определяется формулой (24.13), а связанная с вязкостью диссипация энергии — формулой (24.14), в которые надо вместо $v_0e^{-i\omega t}$ подставить полученное выше выражение для v.

Отклонение T' температуры от своего среднего значения (равного температуре стенки) без учета правильных граничных условий на стенке получилось бы равным (см. (64.13))

$$T' = 2A\frac{c^2T\beta}{c_p\rho}e^{-i\omega t}.$$

В действительности же распределение температуры определяется уравнением теплопроводности с граничным условием $T' = 0$ при $x = 0$ и соответственно этому изображается формулой, в точности аналогичной (24.13).

Вычисляя связанную с теплопроводностью диссипацию энергии согласно первому члену формулы (79.1), получим в результате для полной диссипации энергии, отнесенной к единице площади поверхности стенки:

$$\overline{\dot{E}}_{\text{мех}} = -\frac{A^2c^2\sqrt{2\omega}}{\rho}\left[\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) + \sin^2\theta\sqrt{\nu}\right].$$

Средняя плотность потока энергии, падающего на единицу поверхности стенки с падающей волной, равна

$$c\rho\overline{v_1^2}\cos\theta = \frac{c^3A^2}{2\rho}\cos\theta.$$

Поэтому доля энергии, поглощающейся при отражении, есть

$$2\frac{\sqrt{2\omega}}{c\cos\theta}\left[\sin^2\theta\sqrt{\nu} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\sqrt{\chi}\right].$$

Это выражение справедливо лишь до тех пор, пока оно мало (при выводе мы считали амплитуды падающей и отраженной волн одинаковыми). Это условие означает, что угол падения θ не должен быть слишком близким к $\pi/2$.

2. Определить коэффициент поглощения звука, распространяющегося по цилиндрической трубе.

Р е ш е н и е. Основная доля поглощения обусловлена эффектом, происходящим от наличия стенок. Коэффициент поглощения γ равен энергии, диссипируемой в единицу времени на поверхности стенок единицы длины трубы, деленной на удвоенный полный поток энергии через поперечное сечение трубы. Вычисление, аналогичное произведенному в задаче 1, приводит к результату (R — радиус трубы):

$$\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}\,Rc}\left[\sqrt{\nu} + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\sqrt{\chi}\right].$$

3. Найти закон дисперсии для звука, распространяющегося в среде с очень большой теплопроводностью.

Р е ш е н и е. При наличии большой теплопроводности движение в звуковой волне не адиабатично. Поэтому вместо условия постоянства энтропии имеем теперь уравнение

$$\dot{s}' = \frac{\varkappa}{\rho T}\Delta T' \tag{1}$$

(линеаризованное уравнение (49.4) без вязких членов). В качестве второго уравнения берем

$$\ddot{\rho}' = \Delta p', \tag{2}$$

получающееся путем исключения $\mathbf{v}$ из уравнений (64.2), (64.3). Выбирая в качестве основных переменных p' и T', запишем ρ' и s' виде

$$\rho' = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p T' + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T p', \quad s' = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p T' + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T p'.$$

Эти выражения подставляем в (1) и (2), после чего ищем T', p' в виде, пропорциональном $e^{i(kx-\omega t)}$. Условие совместимости получающихся таким образом двух уравнений для p' и T' можно привести (путем использования ряда известных соотношений между производными от термодинамических величин) к виду

$$k^4 - k^2\left(\frac{\omega^2}{c_T^2} + \frac{i\omega}{\chi}\right) + \frac{i\omega^3}{\chi c_s^2} = 0, \tag{3}$$

чем и определяется искомая зависимость k от ω. Здесь введены обозначения

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s, \quad c_T^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T = \frac{c_s^2}{\gamma}$$

(γ — отношение теплоемкостей c_p/c_v).

В предельном случае малых частот ($\omega \ll c^2/\chi$) уравнение (3) дает

$$k = \frac{\omega}{c_s} + i\frac{\omega^2\chi}{2c_s}\left(\frac{1}{c_T^2} - \frac{1}{c_s^2}\right),$$

что соответствует распространению звука с обычной «адиабатической» скоростью c_s и малым коэффициентом поглощения, совпадающим со вторым членом в (79.6). Так и должно было быть, поскольку условие $\omega \ll c^2/\chi$ означает, что за время одного периода тепло успевает распространиться лишь на расстояние $\sim\sqrt{\chi/\omega}$ (ср. (51.7)), малое по сравнению с длиной волны c/ω.

В обратном предельном случае больших частот из (3) находим

$$k = \frac{\omega}{c_T} + i\frac{c_T}{2\chi c_s^2}\left(c_s^2 - c_T^2\right).$$

В этом случае звук распространяется с «изотермической» скоростью c_T (всегда меньшей скорости c_s). Коэффициент же поглощения оказывается снова малым (по сравнению с обратной длиной волны), причем он не зависит от частоты и обратно пропорционален теплопроводности [1]).

4. Определить дополнительное поглощение звука, распространяющегося в смеси двух веществ, связанное с диффузией (*И.Г. Шапошников* и *З.А. Гольдберг*, 1952).

Р е ш е н и е. В смеси имеется дополнительный источник поглощения звука, связанный с тем, что возникающие в звуковой волне градиенты температуры и давления приводят к появлению необратимых процессов термо- и бародиффузии (градиента же массовой концентрации, а с ней и чистой диффузии, очевидно, не возникает). Это поглощение определяется членом

$$\frac{1}{T\rho D}\left(\frac{\partial\mu}{\partial C}\right)_{p,\,T}\int \mathbf{i}^2\,dV$$

в скорости изменения энтропии (59.13) (мы обозначим здесь концентрацию буквой C в отличие от скорости звука c). Диффузионный поток

$$\mathbf{i} = -\rho D\left(\frac{k_T}{T}\nabla T + \frac{k_p}{p}\nabla p\right)$$

с k_p из (59.10). Вычисление, аналогичное произведенному в тексте, с использованием ряда соотношений между производными термодинамических величин приводит к следующему результату: к выражению (79.6) для коэффициента поглощения добавляется член

$$\gamma_D = \frac{D\omega^2}{2c\rho^2\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial C}\right)_{p,\,T}}\left\{\left(\frac{\partial\rho}{\partial C}\right)_{p,\,T} + \frac{k_T}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,\,C}\left(\frac{\partial\mu}{\partial C}\right)_{p,\,T}\right\}^2.$$

5. Определить эффективное сечение поглощения звука шариком, радиус которого мал по сравнению с $\sqrt{\nu/\omega}$.

Р е ш е н и е. Полное поглощение складывается из эффектов вязкости и теплопроводности газа. Первый определяется работой стоксовой силы трения при обтекании шарика движущимся в звуковой волне газом (как и в задаче 3 § 78, предполагается, что шарик не увлекается этой силой). Второй эффект определяется количеством тепла q, передаваемым в единицу времени от газа шарику (задача 3 § 78): диссипация энергии при передаче тепла q

---

[1]) Второй корень квадратного по k^2 уравнения (3) соответствует быстро затухающим с x тепловым волнам. В предельном случае $\omega\chi \ll c^2$ этот корень дает

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\chi}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$$

в согласии с (52.15). В случае же $\omega\chi \gg c^2$ получается

$$k = (1+i)\sqrt{\frac{\omega c_v}{2\chi c_p}}.$$

при разности температур T' между газом (вдали от шарика) и шариком равна qT'/T. Для суммарного эффективного сечения поглощения получается выражение

$$\sigma = \frac{2\pi R}{c}\left[3\nu + 2\chi\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\right].$$

§ 80. Акустическое течение

Одно из самых интересных проявлений влияния вязкости на звуковые волны состоит в возникновении стационарных вихревых течений в стоячем звуковом поле при наличии твердых препятствий или ограничивающих его твердых стенок. Это движение (его называют *акустическим течением*) появляется во втором приближении по амплитуде волны; его характерная особенность состоит в том, что скорость движения в нем (в пространстве вне тонкого пристеночного слоя) оказывается не зависящей от вязкости, — хотя самим своим возникновением оно обязано именно вязкости (*Rayleigh*, 1883).

Свойства акустического течения наиболее типичным образом проявляются в условиях, когда характерная длина задачи (размеры препятствий или области движения) мала по сравнению с длиной звуковой волны λ, но в то же время велика по сравнению с введенной в § 24 глубиной проникновения вязких волн $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$:

$$\lambda \gg l \gg \delta. \tag{80.1}$$

Ввиду последнего условия, в области движения можно выделить узкий *акустический пограничный слой*, в котором происходит падение скорости от ее значения в звуковой волне до нуля на твердой поверхности. Поскольку скорость газа в этом слое (как и в самой звуковой волне) мала по сравнению со скоростью звука, а его характерный размер — толщина δ — мал по сравнению с λ (ср. условие (10.17)), то движение в нем можно рассматривать как несжимаемое.

Рассмотрим акустический пограничный слой у плоской твердой стенки (плоскость xz), причем движение будем считать плоским — в плоскости xy (*H. Schlichting*, 1932). Приближения, связанные с малой толщиной пограничного слоя, описаны в § 39 и сохраняют силу для рассматриваемого нестационарного движения. Нестационарность приводит лишь к появлению в уравнении Прандтля (39.5) членов с производными по времени:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{80.2}$$

(производная dp/dx выражена через скорость $U(x,\, t)$ течения вне пограничного слоя с помощью уравнения (9.3)). В данном случае

$$U = v_0\cos kx\cdot\cos\omega t = v_0\cos kx\cdot\mathrm{Re}\,e^{-i\omega t} \tag{80.3}$$

($k = \omega/c$), что соответствует стоячей плоской звуковой волне с частотой ω. Искомую скорость $\mathbf{v}$ в пограничном слое выразим через функцию тока $\psi(x, y, t)$ согласно

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

чем автоматически удовлетворяется уравнение непрерывности (39.6).

Будем решать уравнение (80.2) последовательными приближениями по малой величине v_0 — амплитуде колебаний скорости газа в звуковой волне. В первом приближении пренебрегаем квадратичными членами полностью. Решение уравнения

$$\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial y^2} = -i\omega v_0 \cos kx \cdot e^{-i\omega t},$$

удовлетворяющее требуемым условиям при $y = 0$ и $y = \infty$, есть

$$v_x^{(1)} = \operatorname{Re}\left\{v_0 \cos kx \cdot e^{-i\omega t}\left(1 - e^{-\varkappa y}\right)\right\},$$

где

$$\varkappa = \sqrt{-\frac{i\omega}{\nu}} = \frac{1-i}{\delta}. \tag{80.4}$$

Соответствующая функция тока (удовлетворяющая условию $\psi^{(1)} = 0$ при $y = 0$, эквивалентному условию $v_y^{(1)} = 0$) есть

$$\psi^{(1)} = \operatorname{Re}\left\{v_0 \cos kx \cdot \zeta^{(1)}(y) e^{-i\omega t}\right\}, \tag{80.5}$$

$$\zeta^{(1)}(y) = y + \frac{1}{\varkappa} e^{-\varkappa y}.$$

В следующем приближении пишем $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$ и для скорости $\mathbf{v}^{(2)}$ получаем из (80.2) уравнение

$$\frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 v_x^{(2)}}{\partial y^2} = U\frac{\partial U}{\partial x} - v_x^{(1)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x} - v_x^{(1)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y}. \tag{80.6}$$

В правой части имеются члены с частотами $\omega + \omega = 2\omega$ и $\omega - \omega = 0$. Последние приводят к появлению в $\mathbf{v}^{(2)}$ не зависящих от времени членов, которые и описывают интересующее нас стационарное движение; ниже мы будем понимать под $\mathbf{v}^{(2)}$ только эту часть скорости. Соответствующую часть функции тока запишем в виде

$$\psi^{(2)} = \frac{v_0^2}{c} \sin 2kx \cdot \zeta^{(2)}(y) \tag{80.7}$$

и для функции $\zeta^{(2)}(y)$ находим уравнение

$$\delta^2 \zeta^{(2)'''} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|\zeta^{(1)'}|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\zeta^{(1)*}\zeta^{(1)''}\right), \tag{80.8}$$

где штрихи означают дифференцирование по y.

Решение этого уравнения должно удовлетворять условиям $\zeta^{(2)}(0) = 0$, $\zeta^{(2)\prime}(0) = 0$, эквивалентным требованию $v_x^{(2)} = v_y^{(2)} = 0$ на твердой поверхности. Что же касается условий вдали от стенки, то можно лишь потребовать, чтобы скорость $v_x^{(2)}$ стремилась к конечному значению (но не к нулю). Подстановка (80.5) в (80.8) и двукратное интегрирование приводят к следующему результату для производной $\zeta^{(2)\prime}$:

$$\zeta^{(2)\prime}(y) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}e^{-2y/\delta} - e^{-y/\delta}\sin\frac{y}{\delta} - \frac{1}{4}e^{-y/\delta}\cos\frac{y}{\delta} + \frac{y}{4\delta}e^{-y/\delta}\left(\cos\frac{y}{\delta} - \sin\frac{y}{\delta}\right).$$

При $y \to \infty$ она стремится к значению

$$\zeta^{(2)\prime}(\infty) = 3/8, \tag{80.9}$$

чему отвечает скорость

$$v_x^{(2)}(\infty) = \frac{3v_0^2}{8c}\sin 2kx. \tag{80.10}$$

Этот результат демонстрирует указанное в начале параграфа явление. Мы видим, что вне пограничного слоя возникает (во втором приближении по v_0) стационарное движение, скорость которого не зависит от вязкости. Ее значение (80.10) служит граничным условием при определении акустического течения в основной области движения (см. задачу) [1].

Задача

Определить акустическое течение в пространстве между двумя плоскопараллельными стенками (плоскости $y = 0$ и $y = h$), в котором имеется стоячая звуковая волна (80.3). Расстояние h между плоскостями (играющее роль, характерной длины l) удовлетворяет условиям (80.1) (*Rayleigh*, 1883).

Решение. Ввиду малости скорости $v^{(2)}$ искомого стационарного движения по сравнению со скоростью звука, его можно считать несжимаемым. Более того, ввиду предполагаемой сколь угодной малости скорости v_0 в звуковой волне (а вместе с ней и скорости $v^{(2)} \sim v_0^2/c$), в уравнении движения можно пренебречь квадратичными членами [2]. Тогда уравнение (15.12) для

---

[1]) Поперечная скорость, отвечающая продольной скорости (80.9), есть

$$v_y^{(2)} = -\frac{3v_0^2 k}{4c}y\cos 2kx \ll v_x^{(2)}.$$

При решении задачи о движении вне пограничного слоя эта скорость возникает автоматически в силу уравнения непрерывности, если поставить граничное условие $v_y^{(2)} = 0$ при $y = 0$.

[2]) Другими словами, отношение v_0/c предполагается малым по сравнению со всеми другими малыми параметрами задачи; в частности, $v_0/c \ll \delta/h$.

функции тока сводится к уравнению

$$\Delta^2\psi^{(2)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \psi^{(2)} = 0$$

(отметим, что оно возникает из члена с вязкостью, но сама вязкость из него выпадает). Ищем $\psi^{(2)}$ в виде (80.7). Ввиду условия $h \ll \lambda$ производные по y велики по сравнению с производными по x; пренебрегая последними, получим для функции $\zeta^{(2)}(y)$ уравнение

$$\zeta^{(2)''''} = 0. \tag{1}$$

Ввиду очевидной симметрии задачи, течение симметрично относительно плоскости $y = h/2$. Это значит, что

$$v_x^{(2)}(x,\, y) = v_x^{(2)}(x,\, h - y), \;\; v_y^{(2)}(x,\, y) = -v_y^{(2)}(x,\, h - y),$$

для чего должно быть

$$\zeta^{(2)}(y) = -\zeta^{(2)}(h - y).$$

Таким решением уравнения (1) является

$$\zeta^{(2)}(y) = A\Big(y - \frac{h}{2}\Big) + B\Big(y - \frac{h}{2}\Big)^3.$$

Постоянные A и B определяются граничными условиями

$$\zeta^{(2)}(0) = 0, \quad \zeta^{(2)'}(0) = 3/8.$$

В результате находим для функции тока выражение

$$\psi^{(2)} = \frac{3v_0^2}{16c}\sin 2kx\left[-\Big(y - \frac{h}{2}\Big) + \frac{(y - h/2)^3}{(h/2)^2}\right],$$

а из него следующие окончательные формулы для распределения скоростей:

$$v_x^{(2)} = -\frac{3v_0^2}{16c}\sin 2kx\left[1 - \frac{3(y - h/2)^2}{(h/2)^2}\right],$$

$$v_y^{(2)} = \frac{3v_0^2 k}{8c}\cos 2kx\left[\Big(y - \frac{h}{2}\Big) - \frac{(y - h/2)^3}{(h/2)^2}\right].$$

Скорость $v_x^{(2)}$ меняет знак на расстоянии $(h/2)\big(1 - 3^{-1/2}\big) = 0{,}423h/2$ от стенки.

Описываемое этими формулами течение состоит из двух рядов вихрей, симметрично расположенных относительно серединной плоскости $y = h/2$ и периодичных вдоль оси x с периодом $\lambda/2$.

§ 81. Вторая вязкость

Второй коэффициент вязкости ζ (мы будем говорить о нем просто как о *второй вязкости*) имеет обычно тот же порядок величины, что и коэффициент вязкости η. Существуют, однако, случаи, когда ζ может достигать значений, значительно превышающих значения η. Как мы знаем, вторая вязкость проявляется в тех процессах, которые сопровождаются изменением объема (т. е. плотности) жидкости. При сжатии или расширении, как и

при всяком другом быстром изменении состояния, в жидкости нарушается термодинамическое равновесие, в связи с чем в ней начинаются внутренние процессы, стремящиеся восстановить это равновесие. Обычно эти процессы настолько быстры (т. е. их время релаксации настолько мало), что восстановление равновесия успевает практически полностью следовать за ходом изменения объема, если только, конечно, скорость этого изменения не слишком велика.

Существуют случаи, когда время релаксации процессов установления равновесия в теле велико, т. е. эти процессы протекают сравнительно медленно. Так, если мы имеем дело с жидкостью или газом, представляющими собой смесь веществ, между которыми может происходить химическая реакция, то при каждых данных плотности и температуре существует определенное состояние химического равновесия, характеризующееся определенными концентрациями веществ в смеси. Если, например, сжать жидкость, то состояние равновесия нарушится и начнет происходить реакция, в результате которой концентрации веществ будут стремиться принять равновесные значения, соответствующие новому значению плотности (и температуры). Если скорость этой реакции не слишком велика, то установление равновесия происходит сравнительно медленно и не будет поспевать за изменением сжатия. Процесс сжатия будет сопровождаться тогда внутренними процессами приближения к состоянию равновесия. Но процессы установления равновесия являются процессами необратимыми; они сопровождаются возрастанием энтропии и, следовательно, диссипацией энергии. Поэтому, если время релаксации этих процессов велико, то при сжатии или расширении жидкости происходит значительная диссипация энергии, и поскольку эта диссипация должна определяться второй вязкостью, то мы приходим к выводу, что ζ будет велико [1]).

Интенсивность процессов диссипации, а с ними и величина ζ, зависит, естественно, от соотношения между скоростью процессов сжатия и расширения и временем релаксации. Если, например, речь идет о сжатиях и расширениях, вызываемых звуковой волной, то вторая вязкость будет зависеть от частоты волны. Таким образом, значение второй вязкости не будет просто константой, характеризующей данное вещество, а само будет зависеть от частоты того движения, в котором она проявляется. О зависимости величины ζ от частоты говорят как о ее дисперсии.

Излагаемый ниже метод общего рассмотрения всех этих явлений принадлежит *Л.И. Мандельштаму* и *М.А. Леонтовичу* (1937).

---

[1]) Медленным процессом, приводящим к большим ζ, часто является также передача энергии от поступательных степеней свободы молекул к колебательным (внутримолекулярным) степеням свободы.

Пусть ξ — некоторая физическая величина, характеризующая состояние тела, а ξ_0 — ее значение в состоянии равновесия; ξ_0 является функцией от плотности и температуры. Так, для жидких (или газовых) смесей величиной ξ может являться концентрация одного из веществ в смеси, а ξ_0 есть тогда значение концентрации при химическом равновесии.

Если тело не находится в состоянии равновесия, то величина ξ будет меняться со временем, стремясь принять значение ξ_0. В состояниях, близких к равновесному, разность $\xi - \xi_0$ мала, и можно разложить скорость $\dot{\xi}$ изменения ξ в ряд по этой разности. Член нулевого порядка в этом разложении отсутствует, так как $\dot{\xi}$ должно обратиться в нуль в состоянии равновесия, т. е. при $\xi = \xi_0$. Поэтому с точностью до членов первого порядка имеем

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\tau}(\xi - \xi_0). \tag{81.1}$$

Коэффициент пропорциональности между $\dot{\xi}$ и $\xi - \xi_0$ должен быть отрицательным, так как в противном случае ξ не стремилось бы к конечному пределу. Положительная постоянная τ имеет размерность времени и может рассматриваться как время релаксации для данного процесса; чем τ больше, тем медленнее происходит приближение к равновесию.

В дальнейшем мы будем рассматривать процессы, в которых жидкость подвергается периодическому адиабатическому [1]) сжатию и расширению, так что переменная часть плотности (и других термодинамических величин) зависит от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$; речь идет о звуковой волне в жидкости. Вместе с плотностью и другими величинами меняется также и положение равновесия, так что ξ_0 можно написать в виде $\xi_0 = \xi_{00} + \xi_0'$, где ξ_{00} — постоянное значение ξ_0, соответствующее среднему значению плотности, а ξ_0' — периодическая часть, пропорциональная $e^{-i\omega t}$. Написав истинное значение ξ в виде $\xi = \xi_{00} + \xi'$, мы видим из уравнения (81.1), что ξ' тоже является периодической функцией времени и связано с ξ_0' соотношением

$$\xi' = \frac{\xi_0'}{1 - i\omega\tau}. \tag{81.2}$$

Вычислим производную от давления по плотности при рассматриваемом процессе. Давление должно теперь рассматриваться как функция от значений плотности и величины ξ в данном состоянии, а также от энтропии, которая предполагается

[1]) Изменение энтропии (в состояниях, близких к равновесному) является величиной второго порядка малости. Поэтому с точностью до величин первого порядка можно говорить об адиабатичности процесса.

постоянной и которую мы будем для краткости просто опускать. Имеем

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi}{\partial \rho}.$$

Согласно (81.2) подставляем сюда

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau}\frac{\partial \xi_0'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau}\frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}$$

и получаем

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho} - i\omega\tau\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi\right\}.$$

Сумма

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}$$

есть не что иное, как производная от p по ρ при процессе настолько медленном, что жидкость находится все время в состоянии равновесия; обозначая ее через $(\partial p/\partial \rho)_{\text{равн}}$, имеем окончательно:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}} - i\omega\tau\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi\right\}. \tag{81.3}$$

Пусть, далее, p_0 — давление в состоянии термодинамического равновесия; p_0 связано с другими термодинамическими величинами уравнением состояния жидкости и является при заданных плотности и энтропии вполне определенной величиной. Давление же p в неравновесном состоянии отлично от p_0 и является функцией также и от ξ. Если плотность получает адиабатическое приращение $\delta\rho$, то равновесное давление меняется на

$$\delta p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}} \delta\rho,$$

между тем как полное приращение давления есть $(\partial p/\partial \rho)\delta\rho$, где $\partial p/\partial \rho$ определяется формулой (81.3). Поэтому разность $p - p_0$ между истинным и равновесным давлениями в состоянии с плотностью $\rho + \delta\rho$ равна

$$p - p_0 = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}}\right]\delta\rho = \frac{i\omega\tau}{1 - i\omega\tau}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi\right]\delta\rho.$$

Нас интересуют здесь те изменения плотности, которые обусловлены движением жидкости. Тогда $\delta\rho$ связано со скоростью уравнением непрерывности, которое мы напишем в виде

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где d/dt обозначает полную производную по времени. При периодическом движении имеем: $d\delta\rho/dt = -i\omega\delta\rho$, и поэтому

$$\delta\rho = \frac{\rho}{i\omega}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Подставляя это выражение в $p - p_0$, получаем

$$p - p_0 = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau}\left(c_0^2 - c_\infty^2\right)\operatorname{div}\mathbf{v}, \tag{81.4}$$

где введены обозначения

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}}, \quad c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi, \tag{81.5}$$

смысл которых выяснится ниже.

Для того чтобы связать полученные выражения с вязкостью жидкости, напишем тензор напряжений σ_{ik}. В этот тензор давление входит в виде члена $-p\delta_{ik}$. Выделяя отсюда давление p_0, определяющееся уравнением состояния, находим, что в неравновесном состоянии в σ_{ik} входит дополнительный член

$$-\left(p - p_0\right)\delta_{ik} = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau}\left(c_\infty^2 - c_0^2\right)\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

С другой стороны, сравнивая это с общим выражением (15.2), (15.3) для тензора напряжений, в которое $\operatorname{div}\mathbf{v}$ входит в виде $\zeta\operatorname{div}\mathbf{v}$, мы приходим к результату, что наличие медленных процессов установления равновесия макроскопически эквивалентно наличию второй вязкости, равной

$$\zeta = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau}\left(c_\infty^2 - c_0^2\right). \tag{81.6}$$

На обычную же вязкость η эти процессы не влияют. При процессах, настолько медленных, что $\tau\omega \ll 1$, ζ равно

$$\zeta_0 = \tau\rho\left(c_\infty^2 - c_0^2\right). \tag{81.7}$$

ζ растет с увеличением времени релаксации τ в согласии со сказанным выше. При больших частотах ζ оказывается функцией частоты, т. е. обнаруживает дисперсию.

Рассмотрим теперь вопрос о том, каким образом влияет наличие процессов с большим временем релаксации (для определенности будем говорить о химических реакциях) на распространение звука в жидкости. Для этого можно было бы исходить из уравнения движения вязкой жидкости с ζ, определяемым формулой (81.6). Проще, однако, рассматривать движение формально как не вязкое, но с давлением p, определяющимся не уравнением состояния, а полученными здесь формулами. Тогда все известные нам уже из § 64 общие соотношения остаются

формально применимыми. В частности, связь волнового вектора с частотой по-прежнему определяется формулой $k = \omega/c$, где $c = (\partial p/\partial \rho)^{1/2}$, причем производная $\partial p/\partial \rho$ равна выражению (81.3). (Величина c не имеет, однако, теперь смысла скорости звука уже хотя бы потому, что она комплексна.) Таким образом, получаем

$$k = \omega\sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{c_0^2 - c_\infty^2 i\omega\tau}}. \tag{81.8}$$

Определяемый этой формулой «волновой вектор» является величиной комплексной. Легко выяснить смысл этого обстоятельства. В плоской волне все величины зависят от координаты x (в направлении распространения) посредством множителя e^{ikx}. Написав k в виде $k = k_1 + ik_2$ с вещественными k_1 и k_2, получаем $e^{ikx} = e^{ik_1x}e^{-k_2x}$, т. е. наряду с периодическим множителем e^{ik_1x} получается также затухающий множитель e^{-k_2x} (k_2 должно быть, конечно, положительным). Таким образом, комплексность волнового вектора является формальным выражением того, что волна затухает, т. е. имеет место поглощение звука. При этом вещественная часть комплексного «волнового вектора» определяет изменение фазы волны с расстоянием, а мнимая его часть есть коэффициент поглощения.

Нетрудно отделить в (81.8) вещественную и мнимую части; в общем случае произвольных ω выражения для k_1 и k_2 довольно громоздки, и мы не выписываем их здесь. Существенно, что k_1 (как и k_2) является функцией частоты. Таким образом, если в жидкости могут происходить химические реакции, то распространение звука с достаточно большими частотами сопровождается дисперсией.

В предельном случае малых частот ($\omega\tau \ll 1$) формула (81.8) дает в первом приближении $k = \omega/c_0$, что соответствует распространению звука со скоростью c_0. Так, разумеется, и должно было быть: условие $\omega\tau \ll 1$ означает, что период $1/\omega$ звуковой волны велик по сравнению со временем релаксации; другими словами, установление химического равновесия практически успевает следовать за колебаниями плотности в звуковой волне, и поэтому скорость звука должна определяться равновесной производной $(\partial p/\partial \rho)_{\text{равн}}$. В следующем приближении имеем

$$k = \frac{\omega}{c_0} + i\frac{\omega^2\tau}{2c_0^3}\left(c_\infty^2 - c_0^2\right), \tag{81.9}$$

т. е. появляется затухание с коэффициентом, пропорциональным квадрату частоты. С помощью (81.7) мнимую часть k можно написать в виде $k_2 = \omega^2\zeta_0/(2\rho c_0^3)$; это совпадает с зависящей от ζ

частью коэффициента поглощения γ (79.6), полученного без учета дисперсии.

В обратном предельном случае больших частот ($\omega\tau \gg 1$) имеем в первом приближении $k = \omega/c_\infty$, т. е. распространение звука со скоростью c_∞ — результат опять-таки естественный, поскольку при $\omega\tau \gg 1$ можно считать, что за время одного периода реакция вовсе не успевает произойти; поэтому скорость звука должна определяться производной $(\partial p/\partial\rho)_\xi$, взятой при постоянных концентрациях. В следующем приближении имеем

$$k = \frac{\omega}{c_\infty} + i\frac{c_\infty^2 - c_0^2}{2\tau c_\infty^3}. \tag{81.10}$$

Коэффициент поглощения оказывается не зависящим от частоты. При переходе от $\omega \ll 1/\tau$ к $\omega \gg 1/\tau$ этот коэффициент монотонно возрастает, стремясь к постоянному значению, определяемому формулой (81.10). Заметим, что величина k_2/k_1, характеризующая поглощение на расстоянии, равном длине волны, оказывается в обоих предельных случаях малой ($k_2/k_1 \ll 1$); она имеет максимум при некоторой промежуточной частоте (равной $\omega\tau = \sqrt{c_0/c_\infty}$).

Уже из формулы, например, (81.7) видно, что

$$c_\infty > c_0 \tag{81.11}$$

(поскольку должно быть $\zeta > 0$). В том же самом можно убедиться с помощью простых рассуждений на основании принципа Ле-Шателье.

Предположим, что под влиянием внешнего воздействия объем системы уменьшается (а плотность увеличивается). Этим система выводится из состояния равновесия, и согласно принципу Ле-Шателье в ней должны начаться процессы, стремящиеся уменьшить давление. Это значит, что величина $\partial p/\partial\rho$ будет уменьшаться, и когда система вновь вернется в состояние равновесия, значение $\partial p/\partial\rho = c^2$ будет меньшим, чем оно было в неравновесном состоянии.

При выводе всех формул мы предполагали, что имеется всего один медленный внутренний процесс релаксации. Возможны также и случаи, когда имеется одновременно несколько различных таких процессов. Все формулы могут быть без труда обобщены на такой случай. Вместо одной величины ξ мы будем иметь теперь ряд величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, характеризующих состояние тела, и соответственно ряд времен релаксации $\tau_1, \tau_2, \ldots$ Выберем величины ξ_n таким образом, чтобы каждая из производных $\dot{\xi}_n$ зависела только от соответствующего ξ_n, т. е. чтобы было

$$\dot{\xi}_n = -\frac{1}{\tau_n}(\xi_n - \xi_{0n}). \tag{81.12}$$

Вычисления, вполне аналогичные предыдущим, приводят тогда к формуле

$$c^2 = c_\infty^2 + \sum_n \frac{a_n}{1 - i\omega\tau_n}, \qquad (81.13)$$

где $c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi$, а постоянные a_n равны

$$a_n = \frac{\partial p}{\partial \xi_n}\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial \rho}\right)_{\text{равн}}. \qquad (81.14)$$

При всего одной величине ξ эта формула, как и должно быть, переходит в формулу (81.3).

ГЛАВА IX

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

§ 82. Распространение возмущений в потоке сжимаемого газа

Когда скорость движения жидкости делается сравнимой со скоростью звука или превышает ее, на передний план выдвигаются эффекты, связанные с сжимаемостью жидкости. С такого рода движениями приходится на практике иметь дело у газов. Поэтому о гидродинамике больших скоростей говорят обычно как о *газодинамике*.

Прежде всего следует заметить, что в газодинамике практически всегда приходится иметь дело с очень большими значениями числа Рейнольдса. Действительно, кинематическая вязкость газа, как известно из кинетической теории газов, — порядка величины произведения длины свободного пробега молекул l на их среднюю скорость теплового движения; последняя же совпадает по порядку величины со скоростью звука, так что $\nu \sim cl$. Если характеристическая скорость газодинамической задачи — порядка величины скорости звука или больше, то число Рейнольдса $\mathrm{R} \sim Lu/\nu \sim Lu/lc$, т. е. содержит заведомо очень большое отношение характеристических размеров L к длине свободного пробега l [1]. Как всегда, при очень больших значениях R вязкость оказывается не существенной для движения газа практически во всем пространстве, и в дальнейшем мы везде (за исключением лишь особо оговоренных мест) рассматриваем газ как идеальную (в гидродинамическом смысле слова) жидкость.

Движение газа имеет существенно различный характер в зависимости от того, является ли оно *дозвуковым* или *сверхзвуковым*, т. е. меньше или больше его скорость, чем скорость звука. Одним из наиболее существенных принципиальных отличий сверхзвукового потока является возможность существования в нем так называемых ударных волн, свойства которых будут подробно рассмотрены в следующих параграфах. Здесь же мы рассмотрим другую характерную особенность сверхзвукового дви-

[1]) Мы не рассматриваем вопроса о движении тел в очень разреженных газах, в которых длина пробега молекул сравнима с размерами тел. Этот вопрос по существу не является гидродинамической проблемой и должен рассматриваться с помощью кинетической теории газов.

жения, связанную со свойствами распространения в газе малых возмущений.

Если в каком-нибудь месте стационарно движущийся газ подвергается слабому возмущению, то влияние этого возмущения распространяется затем по газу со скоростью (относительно самого газа), равной скорости звука. Скорость же распространения возмущения относительно неподвижной системы координат складывается из двух частей: во-первых, возмущение сносится потоком газа со скоростью $\mathbf{v}$ и, во-вторых, распространяется относительно газа со скоростью c в некотором направлении $\mathbf{n}$. Рассмотрим для простоты однородный плоско-параллельный поток газа с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Пусть в некоторой (неподвижной в пространстве) точке O газ подвергается малому возмущению. Скорость $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ распространения исходящего из точки O возмущения (относительно неподвижной системы координат) различна в зависимости от направления единичного вектора $\mathbf{n}$. Все возможные ее значения мы получим, отложив из точки O вектор $\mathbf{v}$, а из его конца, как из центра, построив сферу радиуса c; векторы, проведенные из O в точки этой сферы, и определят возможные величины и направления скорости распространения возмущения. Предположим сначала, что $v < c$. Тогда векторы $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$ могут иметь любое направление в пространстве (рис. 50 *а*). Другими словами, в дозвуковом потоке возмущение, исходящее из некоторой точки, распространяется в конце концов по всему газу. Напротив, в сверхзвуковом потоке, $v > c$, направления векторов $\mathbf{v} + c\mathbf{n}$, как видно из рис. 50 *б*, могут лежать только внутри конуса с вершиной в точке O, касающегося построенной из конца вектора $\mathbf{v}$, как из центра, сферы. Для угла раствора 2α этого конуса имеем, как видно из чертежа:

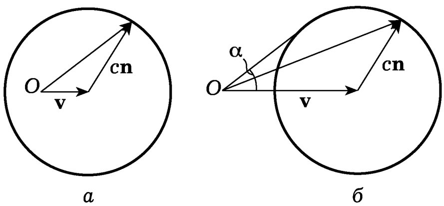


Рис. 50

$$\sin\alpha = c/v. \tag{82.1}$$

Таким образом, в сверхзвуковом потоке исходящее из некоторой точки возмущение распространяется только вниз по течению внутри конуса с углом раствора тем меньшим, чем меньше отношение c/v. На всей области потока вне этого конуса возмущение в точке O не отразится вовсе.

Определяемый равенством (82.1) угол называют *углом Маха*. Отношение же v/c, весьма часто встречающееся в газодинамике, называют *числом Маха*:

$$\mathrm{M} = v/c. \tag{82.2}$$

Поверхность, ограничивающую область, которую достигает исходящее из заданной точки возмущение, называют *поверхностью Маха* или *характеристической поверхностью*.

В общем случае произвольного стационарного течения эта поверхность не является уже конической во всем объеме потока. Можно, однако, по-прежнему утверждать, что она пересекает в каждой своей точке линию тока под углом, равным углу Маха. Значение же угла Маха меняется от точки к точке соответственно изменению скоростей v и c.

Подчеркнем здесь, кстати, что при движении с большими скоростями скорость звука различна в разных местах газа — она меняется вместе с термодинамическими величинами (давлением, плотностью и т. д.), функцией которых она является [1]. О скорости звука как функции координат точки говорят как о *местной скорости звука*.

Описанные свойства сверхзвукового течения придают ему характер, совершенно отличный от характера дозвукового движения. Если дозвуковой поток газа встречает на своем пути какое-либо препятствие, например, обтекает какое-либо тело, то наличие этого препятствия изменяет движение во всем пространстве как вверх, так и вниз по течению; влияние обтекаемого тела исчезает лишь асимптотически при удалении от тела. Сверхзвуновой же поток натекает на препятствие «слепо»; влияние обтекаемого тела простирается лишь на область вниз по течению [2], а во всей остальной области пространства вверх по течению газ движется так, как если бы никакого тела вообще не было.

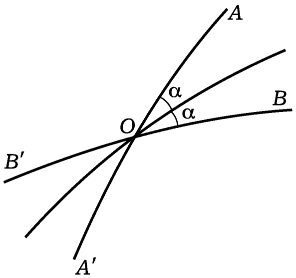


Рис. 51

В случае плоского стационарного течения газа вместо характеристических поверхностей можно говорить о *характеристических линиях* (или просто *характеристиках*) в плоскости движения. Через всякую точку O этой плоскости проходят две характеристики (AA' и BB' на рис. 51), пересекающие проходящую через эту же точку линию тока под углами, равными углу Маха. Ветви OA и OB характеристик, направленные вниз по течению, можно назвать исходящими из точки O; они ограничивают область AOB течения, на которую могут влиять исходящие из точки O возмущения. Ветви же $B'O$ и $A'O$ мож-

[1]) При изучении звуковых волн в гл. VIII мы могли считать скорость звука постоянной.

[2]) Во избежание недоразумений оговорим, что если перед обтекаемым телом возникает ударная волна, то эта область несколько увеличивается (см. § 122).

но назвать приходящими в точку O; область $A'OB'$ между ними есть та область течения, которая может влиять на движение в точке O.

Понятие о характеристиках (в трехмерном случае — характеристических поверхностях) имеет и несколько иной аспект. Это — лучи, вдоль которых распространяются возмущения, удовлетворяющие условиям геометрической акустики. Если, например, стационарный сверхзвуковой поток газа обтекает достаточно малое препятствие, то вдоль отходящих от этого препятствия характеристик расположится стационарное возмущение движения газа. К этому результату мы пришли еще в § 68 при изучении геометрической акустики движущихся сред.

Говоря о возмущении состояния газа, мы подразумеваем слабое изменение каких-либо характеризующих это состояние величин: скорости, плотности, давления и т. п. По этому поводу необходимо сделать следующую оговорку: со скоростью звука не распространяются возмущения значений энтропии газа (при постоянном давлении) и ротора его скорости. Эти возмущения, раз возникнув, не перемещаются вовсе относительно газа, а относительно неподвижной системы координат переносятся вместе с газом со скоростью, равной скорости каждого данного его элемента. Для энтропии это является непосредственным следствием закона ее сохранения (в идеальной жидкости), который как раз и означает, что энтропия каждого элемента газа остается постоянной при его перемещении. Для ротора скорости (завихренности) то же самое следует из закона сохранения циркуляции. Для этих возмущений характеристиками являются сами линии тока.

Подчеркнем, что последнее обстоятельство не меняет, разумеется, общей справедливости высказанных выше утверждений об областях влияния, так как для них был существен лишь факт существования наибольшей возможной (равной скорости звука) скорости распространения возмущений относительно самого газа.

Задача

Найти соотношения между малыми изменениями скорости и термодинамических величин при произвольном малом возмущении в однородном потоке газа.

Решение. Обозначим малые изменения величин при возмущении символом δ (вместо штриха, как в § 64). В линейном по этим величинам приближении уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\delta\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla\delta p = 0 \tag{1}$$

($\mathbf{v}$ — постоянная невозмущенная скорость потока), уравнение сохранения энтропии:

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\delta s = 0, \tag{2}$$

и уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\delta p + \rho c^2 \operatorname{div}\delta\mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

(здесь подставлено $\delta\rho = c^{-2}\delta p + (\partial\rho/\partial s)_p\,\delta s$; члены с δs выпадают в силу (2)). Для возмущения вида $\exp\left[i(\mathbf{kr} - \omega t)\right]$ находим систему алгебраических уравнений:

$$(\mathbf{vk} - \omega)\,\delta s = 0, \quad (\mathbf{vk} - \omega)\,\delta\mathbf{v} + \mathbf{k}\,\delta p/\rho = 0,$$

$$(\mathbf{vk} - \omega)\,\delta p + \rho c^2 \mathbf{k}\,\delta\mathbf{v} = 0.$$

Отсюда видно, что возможны два вида возмущений.

В одном из них (энтропийно-вихревая волна)

$$\omega = \mathbf{vk},\ \ \delta s \neq 0,\ \ \delta p = 0,\ \ \delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \delta s,\ \ \mathbf{k}\,\delta\mathbf{v} = 0;$$

отлична от нуля также и завихренность $\operatorname{rot}\delta\mathbf{v} = i[\mathbf{k}\,\delta\mathbf{v}]$. Возмущения δs и $\delta\mathbf{v}$ в этой волне независимы. Равенство $\omega = \mathbf{vk}$ означает перенос возмущения движущимся газом.

В другом типе возмущений

$$(\omega - \mathbf{vk})^2 = c^2 k^2, \quad \delta s = 0, \quad \delta p = c^2 \delta\rho,$$

$$(\omega - \mathbf{vk})\,\delta p = \rho c^2 \mathbf{k}\,\delta\mathbf{v}, \quad [\mathbf{k}\,\delta\mathbf{v}] = 0.$$

Это — звуковая волна с частотой, сдвинутой эффектом Доплера. Задание возмущения одной из величин в этой волне определяет возмущения всех остальных величин.

§ 83. Стационарный поток сжимаемого газа

Уже непосредственно из уравнения Бернулли можно получить ряд общих результатов, касающихся произвольного адиабатического стационарного движения сжимаемого газа. Уравнение Бернулли для стационарного движения имеет вид

$$w + \frac{v^2}{2} = \text{const},$$

где const — величина, постоянная вдоль каждой из линий тока (если же движение потенциально, то const одинакова и для разных линий тока, т. е. во всем объеме жидкости). Если на одной линии тока есть точка, в которой скорость газа равна нулю, то можно написать уравнение Бернулли так:

$$w + \frac{v^2}{2} = w_0, \tag{83.1}$$

где w_0 — значение тепловой функции в точке с $v = 0$.

Уравнение сохранения энтропии при стационарном движении сводится к $\mathbf{v}\nabla s = v\partial s/\partial l = 0$, т. е. $s = \text{const}$, где const есть опять величина, постоянная вдоль линии тока. Напишем это уравнение в виде, аналогичном (83.1):

$$s = s_0. \tag{83.2}$$

Из уравнения (83.1) видно, что скорость v больше в тех местах, где тепловая функция w меньше. Максимальное (вдоль данной линии тока) значение скорость имеет в точке, в которой w минимально. Но при постоянной энтропии имеем $dw = dp/\rho$; поскольку $\rho > 0$, то дифференциалы dw и dp имеют одинаковые знаки и потому изменение w и p направлено всегда в одну сторону. Следовательно, можно сказать, что вдоль линии тока скорость всегда падает с увеличением давления, и наоборот.

Наименьшее возможное значение давление и тепловая функция получают (при адиабатическом процессе) при равной нулю абсолютной температуре $T = 0$. Соответствующее значение давления есть $p = 0$, а значение w при $T = 0$ примем условно за нулевое значение, от которого отсчитывается энергия; тогда будет и $w = 0$ при $T = 0$. Из (83.1) получаем теперь, что наибольшее возможное значение скорости (при заданном значении термодинамических величин в точке с $v = 0$) равно

$$v_{\max} = \sqrt{2w_0}\,. \tag{83.3}$$

Эта скорость может достигаться при стационарном вытекании газа в вакуум [1]).

Выясним теперь характер изменения вдоль линии тока плотности потока жидкости $j = \rho v$. Из уравнения Эйлера $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p/\rho$ находим, что вдоль линии тока имеет место соотношение

$$v\,dv + \frac{dp}{\rho} = 0$$

между дифференциалами dv и dp. Написав $dp = c^2 d\rho$, имеем отсюда

$$\frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho v}{c^2} \tag{83.4}$$

и затем:

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{83.5}$$

Отсюда видно, что по мере возрастания скорости вдоль линии тока плотность потока возрастает до тех пор, пока скорость остается дозвуковой. В области же сверхзвукового движения плотность потока падает с увеличением скорости и обращается в нуль вместе с ρ при $v = v_{\max}$ (рис. 52). Это существенное различие между до- и сверхзвуковыми стационарными потоками может быть истолковано наглядно еще и следующим образом. В дозвуковом потоке линии тока сближаются друг с другом в направлении увеличения скорости. При сверхзвуковом же движении линии тока расходятся по мере увеличения скорости.

[1]) В действительности, конечно, при сильном понижении температуры должна произойти конденсация газа и образование двухфазной системы — тумана.

Поток j имеет максимальное значение j_* в точке, в которой скорость газа равна местному значению скорости звука:

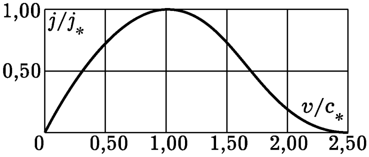


Рис. 52

$$j_* = \rho_* c_*, \tag{83.6}$$

где буквы с индексом $_*$ показывают значения соответствующих величин в этой точке. Скорость $v_* = c_*$ называют *критической*. В общем случае произвольного газа критические значения величин могут быть выражены через значения величин в точке с $v = 0$ в результате совместного решения уравнений

$$s_* = s_0, \quad w_* + \frac{c_*^2}{2} = w_0. \tag{83.7}$$

Очевидно, что всякий раз, когда число $\mathrm{M} = v/c < 1$, мы будем также иметь $v/c_* < 1$, а когда $\mathrm{M} > 1$, то и $v/c_* > 1$. Поэтому в данном случае отношение $\mathrm{M}_* = v/c_*$ может служить критерием, аналогичным числу Маха, и даже более удобным, поскольку c_* есть величина постоянная в противоположность скорости c, меняющейся вдоль потока.

В применениях общих уравнений гидродинамики особое место занимает термодинамически идеальный газ. Говоря о таком газе, мы будем всегда (за исключением только особо оговоренных случаев) считать, что его теплоемкость является постоянной величиной, не зависящей от температуры (в интересующей нас температурной области). Такой газ часто называют *политропным*; мы будем пользоваться этим термином, имея в виду подчеркнуть каждый раз, что речь идет о предположении, идущем гораздо дальше термодинамической идеальности. Для политропного газа известны все соотношения между термодинамическими величинами, выражающиеся к тому же весьма простыми формулами; это часто дает возможность до конца решать уравнения гидродинамики. Выпишем здесь, для справок, эти соотношения, которыми нам неоднократно придется пользоваться в дальнейшем.

Уравнение состояния термодинамически идеального газа гласит

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}, \tag{83.8}$$

где $R = 8{,}314 \cdot 10^7$ эрг/К·моль — газовая постоянная, а μ — молекулярная масса газа. Скорость звука в таком газе была вычислена в § 64 и дается формулой

$$c^2 = \gamma \frac{RT}{\mu} = \gamma \frac{p}{\rho}, \tag{83.9}$$

где введено отношение теплоемкостей

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Это отношение всегда больше единицы, а для политропного газа оно постоянно. Для одноатомных газов $\gamma = 5/3$, а для двухатомных $\gamma = 7/5$ (при обычных температурах) [1].

Внутренняя энергия политропного газа с точностью до несущественной аддитивной постоянной равна

$$\varepsilon = c_v T = \frac{pV}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)}. \tag{83.10}$$

Для тепловой функции имеют место аналогичные формулы

$$w = c_p T = \frac{\gamma pV}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1}. \tag{83.11}$$

Здесь учтено известное соотношение $c_p - c_v = R/\mu$. Наконец, энтропия газа

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = c_p \ln \frac{p^{1/\gamma}}{\rho}. \tag{83.12}$$

Вернемся к изучению стационарного движения и применим полученные выше общие соотношения к политропному газу. Подставив (83.11) в (83.3), найдем, что максимальная скорость стационарного вытекания равна

$$v_{\max} = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}\,. \tag{83.13}$$

Для критической же скорости из второго уравнения (83.7) получим

$$\frac{c_*^2}{\gamma - 1} + \frac{c_*^2}{2} = w_0 = \frac{c_0^2}{\gamma - 1},$$

откуда [2]

$$c_* = c_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}\,. \tag{83.14}$$

Уравнение Бернулли (83.1) после подстановки выражения (83.11) для тепловой функции даст соотношение между температурой и скоростью в произвольной точке линии тока; аналогичные соотношения для давления и плотности можно затем

[1]) Название газа «политропный» происходит от термина «политропный процесс» — процесс, в котором давление меняется обратно пропорционально некоторой степени объема. Для газа с постоянными теплоемкостями таковым является не только изотермический, но и адиабатический процесс, для которого $pV^\gamma = \text{const}$ (адиабата Пуассона). Отношение теплоемкостей γ называют *показателем адиабаты*.

[2]) На рис. 52 дан график отношения j/j_* в функции от v/c_* для воздуха ($\gamma = 1{,}4$, $v_{\max} = 2{,}45 c_*$).

написать с помощью уравнения адиабаты Пуассона:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}. \tag{83.15}$$

Таким образом, получим следующие важные формулы:

$$\begin{gathered} T = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right) = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}\right), \\ \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \\ p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \end{gathered} \tag{83.16}$$

Иногда удобно пользоваться этими соотношениями в виде, определяющем скорость через другие величины:

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}\right]. \tag{83.17}$$

Выпишем также соотношение, связывающее скорость звука со скоростью v:

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}v^2 = \frac{\gamma+1}{2}c_*^2 - \frac{\gamma-1}{2}v^2. \tag{83.18}$$

Отсюда найдем, что числа M и M_* связаны друг с другом соотношением

$$\mathrm{M}_*^2 = \frac{\gamma+1}{2/\mathrm{M}^2 + \gamma - 1}. \tag{83.19}$$

Когда M растет от 0 до ∞, M_*^2 растет от 0 до $(\gamma+1)/(\gamma-1)$.

Наконец, приведем выражения для критических значений температуры, давления и плотности; они получаются при $v = c_*$ из формул (83.16) [1]:

$$T_* = \frac{2T_0}{\gamma+1}, \quad p_* = p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_* = \rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{83.20}$$

Подчеркнем в заключение, что полученные здесь результаты относятся к движению, при котором не возникают ударные волны. При наличии ударных волн не имеет места уравнение (83.2):

[1]) Так, для воздуха ($\gamma = 1{,}4$)

$$c_* = 0{,}913\, c_0, \; p_* = 0{,}528\, p_0, \; \rho_* = 0{,}634\, \rho_0, \; T_* = 0{,}833\, T_0.$$

при прохождении линии тока через ударную волну энтропия газа возрастает.

Мы увидим, однако, что уравнение Бернулли (83.1) остается справедливым и при наличии ударной волны, так как $w + v^2/2$ является как раз одной из величин, сохраняющихся при прохождении через поверхность разрыва (§ 85); вместе с ним остается, например, справедливой и формула (83.14).

Задача

Выразить температуру, давление и плотность вдоль линии тока через число $\mathrm{M} = v/c$.

Решение. С помощью полученных в тексте формул получим

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{M}^2, \quad \frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{M}^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{M}^2\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

§ 84. Поверхности разрыва

В предыдущих главах мы рассматривали только такие течения, при которых распределение всех величин (скорости, давления, плотности и т. д.) в газе непрерывно. Возможны, однако, и движения, при которых возникают разрывы непрерывности в распределении этих величин.

Разрыв непрерывности в движении газа имеет место вдоль некоторых поверхностей; при прохождении через такую поверхность указанные величины испытывают скачок. Эти поверхности называют *поверхностями разрыва*. При нестационарном движении газа поверхности разрыва не остаются, вообще говоря, неподвижными; необходимо при этом подчеркнуть, что скорость движения поверхности разрыва не имеет ничего общего со скоростью движения самого газа. Частицы газа при своем движении могут проходить через эту поверхность, пересекая ее.

На поверхностях разрыва должны выполняться определенные граничные условия. Для формулирования этих условий рассмотрим какой-нибудь элемент поверхности разрыва и воспользуемся связанной с этим элементом системой координат с осью x, направленной по нормали к нему [1]).

Во-первых, на поверхности разрыва должен быть непрерывен поток вещества: количество газа, входящего с одной стороны, должно быть равно количеству газа, выходящему с другой стороны поверхности. Поток газа через рассматриваемый элемент поверхности (отнесенный на единицу площади) равен ρv_x. По-

[1]) Если движение нестационарно, то мы рассматриваем элемент поверхности в течение малого интервала времени.

этому должно выполняться условие $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}$, где индексы 1 и 2 относятся к двум сторонам поверхности разрыва.

Разность значений какой-либо величины с обеих сторон поверхности разрыва мы будем ниже обозначать с помощью квадратных скобок; так,

$$[\rho v_x] = \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x},$$

и полученное условие напишется в виде

$$[\rho v_x] = 0. \tag{84.1}$$

Далее, должен быть непрерывным поток энергии. Поток энергии определяется выражением (6.3). Поэтому мы получаем условие

$$\left[\rho v_x \left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right] = 0. \tag{84.2}$$

Наконец, должен быть непрерывен поток импульса, т. е. должны быть равны силы, с которыми действуют друг на друга газы по обеим сторонам поверхности разрыва. Поток импульса через единицу площади равен (см. § 7)

$$p n_i + \rho v_i v_k n_k.$$

Вектор нормали **n** направлен по оси x. Поэтому непрерывность x-компоненты потока импульса приводит к условию

$$\left[p + \rho v_x^2\right] = 0, \tag{84.3}$$

а непрерывность y- и z-компонент дает

$$[\rho v_x v_y] = 0, \quad [\rho v_x v_z] = 0. \tag{84.4}$$

Уравнения (84.1)–(84.4) представляют собой полную систему граничных условий на поверхности разрыва. Из них можно сразу сделать вывод о возможности существования двух типов поверхностей разрыва.

В первом случае через поверхность разрыва нет потока вещества. Это значит, что $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x} = 0$. Поскольку ρ_1 и ρ_2 отличны от нуля, то это значит, что должно быть $v_{1x} = v_{2x} = 0$. Условия (84.2) и (84.4) в этом случае удовлетворяются автоматически, а условие (84.3) дает $p_1 = p_2$. Таким образом, на поверхности разрыва в этом случае непрерывны нормальная компонента скорости и давление газа:

$$v_{1x} = v_{2x} = 0, \quad [p] = 0. \tag{84.5}$$

Тангенциальные же скорости v_y, v_z и плотность (а также другие термодинамические величины, кроме давления) могут испытывать произвольный скачок. Такие разрывы будем называть *тангенциальными*.

Во втором случае поток вещества, а с ним и v_{1x} и v_{2x} отличны от нуля. Тогда из (84.1) и (84.4) имеем

$$[v_y] = 0, \quad [v_z] = 0, \tag{84.6}$$

т. е. тангенциальная скорость непрерывна на поверхности разрыва. Плотность же, давление (а потому и другие термодинамические величины) и нормальная скорость испытывают скачок, причем скачки этих величин связаны соотношениями (84.1)–(84.3). В условии (84.2) мы можем в силу (84.1) сократить ρv_x, а вместо v^2 в силу непрерывности v_y и v_z написать v_x^2. Таким образом, на поверхности разрыва в рассматриваемом случае должны иметь место условия:

$$[\rho v_x] = 0, \quad \left[\frac{v_x^2}{2} + w\right] = 0, \quad [p + \rho v_x^2] = 0. \tag{84.7}$$

Разрывы этого типа называют *ударными волнами.*

Если теперь вернуться к неподвижной системе координат, то вместо v_x надо везде писать разность между нормальной к поверхности разрыва компонентой v_n скорости газа и скоростью u самой поверхности, направленной, по определению, по нормали к ней:

$$v_x = v_n - u. \tag{84.8}$$

Скорости v_n и u берутся относительно неподвижной системы отсчета. Скорость v_x есть скорость движения газа относительно поверхности разрыва; иначе можно сказать, что $-v_x = u - v_n$ есть скорость распространения самой поверхности разрыва относительно газа. Обращаем внимание на то, что эта скорость различна по отношению к газу с обеих сторон поверхности (если v_x испытывает разрыв).

Тангенциальные разрывы, на которых испытывают скачок касательные компоненты скорости, рассматривались нами уже в § 29. Там было показано, что в несжимаемой жидкости такие разрывы неустойчивы и должны размываться в турбулентную область. Аналогичное исследование для сжимаемой жидкости показывает, что такая неустойчивость имеет место и в общем случае произвольных скоростей (см. задачу 1).

Частным случаем тангенциальных разрывов являются разрывы, в которых скорость непрерывна и испытывает скачок только плотность (а с ней и другие термодинамические величины за исключением давления); такие разрывы называют *контактными.* Сказанное выше о неустойчивости к ним не относится.

З а д а ч и

1. Исследовать устойчивость (по отношению к бесконечно малым возмущениям) тангенциальных разрывов в однородной сжимаемой среде (газ или жидкость).

Р е ш е н и е. Вычисления аналогичны произведенным в § 29 для несжимаемой жидкости. Как и там, по нормали к поверхности направим ось z.

В среде *2* (со скоростью $\mathbf{v}_2 = 0$, $z < 0$) давление удовлетворяет уравнению

$$\ddot{p}_2' - c^2 \Delta p_2' = 0$$

(вместо уравнения Лапласа (29.2) в несжимаемой жидкости). Ищем p_2' в виде

$$p_2' = \text{const} \cdot \exp\left(-i\omega t + iqx + i\varkappa_2 z\right),$$

где волновое число «ряби» на поверхности обозначено через q (вместо k в § 29); если $\varkappa_2$ комплексно, то оно должно быть выбрано так, чтобы было $\operatorname{Im} \varkappa_2 < 0$. Волновое уравнение приводит к соотношению

$$\omega^2 = c^2\left(q^2 + \varkappa_2^2\right). \tag{1}$$

Вместо (29.7) тем же образом находим теперь

$$p_2' = \zeta \rho \omega^2 / (i\varkappa_2).$$

В газе *1*, движущемся со скоростью $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ ($z > 0$), ищем p_1' в виде

$$p_1' = \text{const} \cdot \exp(-i\omega t + iqx - i\varkappa_1 z).$$

Для упрощения выводов предположим сначала, что скорость $\mathbf{v}$ направлена тоже по оси x. Соотношение между ω, q, $\varkappa_1$ дается формулой

$$(\omega - vq)^2 = c^2\left(q^2 + \varkappa_1^2\right) \tag{2}$$

(ср. (68.1)). Вместо (29.6) получаем теперь

$$p_1' = -\zeta(\omega - qv)^2 \rho / (i\varkappa_1),$$

и условие $p_1' = p_2'$ приводит к уравнению

$$\frac{\varkappa_1}{(\omega - qv)^2} + \frac{\varkappa_2}{\omega^2} = 0. \tag{3}$$

От сделанного выше предположения о направлении скорости $\mathbf{v}$ можно избавиться, заметив, что невозмущенная скорость входит в исходные линеаризованные уравнение непрерывности и уравнение Эйлера только в комбинации $(\mathbf{v}\nabla)$ (соответственно в членах $(\mathbf{v}\nabla)p'$ и $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}'$). Поэтому для перехода к произвольному направлению $\mathbf{v}$ (в плоскости xy) достаточно заменить в (1)–(3) v на $v\cos\varphi$, где φ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{q}$ (ср. примеч. на с. 155).

Исключив $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ из (1)–(3), получим следующее дисперсионное уравнение для определения частоты возмущения ω по волновому числу q:

$$\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\omega - qv\cos\varphi)^2}\right]\left[\frac{1}{c^2 q^2} - \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\omega - qv\cos\varphi)^2}\right] = 0. \tag{4}$$

Корень первого множителя

$$\omega = \frac{1}{2} qv\cos\varphi \tag{5}$$

всегда веществен. Корни второго множителя:

$$\omega = \frac{1}{2} vq\cos\varphi \pm q\left[\frac{1}{4}v^2\cos^2\varphi + c^2 \pm c(c^2 + v^2\cos^2\varphi)^{1/2}\right]^{1/2}; \tag{6}$$

эти корни вещественны только при $v\cos\varphi > v_k$, где

$$v_k = 2^{3/2} c. \tag{7}$$

Таким образом, при $v\cos\varphi < v_k$ дисперсионное уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней, для одного из которых будет $\operatorname{Im}\omega > 0$; соответствующие возмущения приводят к неустойчивости. При $v < v_k$ таковы

возмущения с любым углом φ, а при $v > v_k$ неустойчивы только возмущения с $\cos\varphi < v_k/v$. В результате тангенциальный разрыв неустойчив всегда. Отметим, что сам факт неустойчивости (если не интересоваться по отношению к каким именно возмущениям) очевиден уже из неустойчивости в случае несжимаемой жидкости в совокупности с тем обстоятельством, что в дисперсионное уравнение скорость v входит только в комбинации $v\cos\varphi$: какова бы ни была скорость v, найдутся такие углы φ, для которых $v\cos\varphi \ll c$, так что по отношению к таким возмущениям среда ведет себя как несжимаемая [1]).

2. На тангенциальный разрыв в однородной сжимаемой среде падает плоская звуковая волна; определить интенсивности отраженной от разрыва волны и волны, преломленной на нем (*J.W. Miles*, 1957; *H.S. Ribner*, 1957).

Р е ш е н и е. Выбираем оси координат, как в предыдущей задаче, причем скорость $\mathbf{v}$ (в среде *1*, $z > 0$) направлена по оси x. Пусть звуковая волна падает из неподвижной среды (среда *2*, $z < 0$); направление ее волнового вектора $\mathbf{k}$ задается сферическими углами θ и φ; угол θ — между $\mathbf{k}$ и осью z, угол φ — между проекцией $\mathbf{k}$ на плоскость xy (обозначим ее через $\mathbf{q}$) и скоростью $\mathbf{v}$:

$$k_x = q\cos\varphi, \quad k_y = q\sin\varphi, \quad k_z = \frac{\omega}{c}\cos\theta, \quad q = \frac{\omega}{c}\sin\theta = k\sin\theta,$$

причем $0 < \theta < \pi/2$ (волна падает в положительном направлении оси z). В среде *2* ищем давление в виде

$$p_2' = \exp\left[i(k_x x + k_y y - \omega t)\right]\left(e^{ik_z z} + Ae^{-ik_z z}\right),$$

где A — амплитуда отраженной волны, а амплитуда падающей волны условно принята за единицу. В среде *1* имеем одну преломленную волну:

$$p_1' = B\exp\left[i(k_x x + k_y y + \varkappa z - \omega t)\right],$$

где $\varkappa$ удовлетворяет уравнению

$$(\omega - vk_x)^2 = c^2\left(k_x^2 + k_y^2 + \varkappa^2\right)$$

(ср. (2)). Амплитуды A и B определяются из условий непрерывности давления и вертикального смещения жидких частиц по обе стороны разрыва: $p_1' = p_2'$ при $z = 0$, $\zeta_1 = \zeta_2 \equiv \zeta$. Это дает два уравнения

$$1 + A = B, \quad \frac{\varkappa}{(\omega - vk_x)^2}B = \frac{k_z}{\omega^2}(1 - A),$$

откуда

$$A = \frac{(\omega - vk_x)^2/\varkappa - \omega^2/k_z}{(\omega - vk_x)^2/\varkappa + \omega^2/k_z}, \quad B = \frac{2(\omega - vk_x)^2/\varkappa}{(\omega - vk_x)^2/\varkappa + \omega^2/k_z}, \tag{8}$$

чем и решается поставленная задача. Знак величины $\varkappa$,

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[(1 - \mathrm{M}\sin\theta\cos\varphi)^2 - \sin^2\theta\right], \quad \mathrm{M} = \frac{v}{c},$$

должен быть выбран с учетом предельных условий при $z \to \infty$: скорость преломленной волны должна быть направлена от разрыва, т. е.

$$U_z = \frac{\partial\omega}{\partial\varkappa} = \frac{c^2\varkappa}{\omega - vk_x} > 0. \tag{9}$$

[1]) Значение (7) получено *Л.Д. Ландау* (1944). Необходимость учета в этой задаче неколлинеарности $\mathbf{v}$ и $\mathbf{q}$ указана *С.И. Сыроватским* (1954).

Из полученных формул видно, что возможны три различных режима отражения.

1) При $\mathrm{M}\cos\varphi < 1/\sin\theta - 1$ величина $\varkappa$ вещественна, а поскольку $\omega - vk_x > 0$, то согласно условию (9) $\varkappa > 0$. Из (8) видно, что при этом $|A| < 1$ — отражение происходит с ослаблением волны.

2) При $1/\sin\theta - 1 < \mathrm{M}\cos\varphi < 1/\sin\theta + 1$ величина $\varkappa$ мнима и $|A| = 1$, — происходит полное внутреннее отражение звуковой волны.

3) При $\mathrm{M}\cos\varphi > 1 + 1/\sin\theta$ (что возможно лишь при $\mathrm{M} > 2$) величина $\varkappa$ снова вещественна, но теперь надо выбрать $\varkappa < 0$. Согласно (8) при этом $|A| > 1$, т. е. отражение происходит с усилением волны. Более того, знаменатели выражений (8) с $\varkappa < 0$ могут обратиться в нуль при определенных углах падения волны, и тогда коэффициент отражения обращается в бесконечность. Поскольку этот знаменатель совпадает (с точностью до обозначений) с левой частью уравнения (3) предыдущей задачи, то можно сразу заключить, что «резонансные» углы падения определяются равенствами (5) и (6) (последнее — при $\mathrm{M} > 2^{3/2}$). В свою очередь, бесконечность коэффициента отражения (и прохождения), т. е. конечность амплитуды отраженной волны при стремящейся к нулю амплитуде падающей волны, означает возможность спонтанного излучения звука поверхностью разрыва: раз созданное на ней возмущение (рябь) неограниченно долго продолжает излучать звуковые волны, не затухая и не усиливаясь при этом; энергия, уносимая излучаемым звуком, черпается из всей движущейся среды.

Плотность потока энергии (усредненная по времени) в преломленной волне

$$\overline{q}_2 = U_z\overline{E}_2 = \frac{c^2\varkappa}{\omega - vk_x}\frac{\omega}{\omega - vk_x}\frac{|B|^2}{2\rho c^2}$$

(E_2 из (68.3)). В случае *3* имеем $\varkappa < 0$, а потому и $\overline{q}_2 < 0$, — энергия приходит к разрыву из движущейся среды, что и служит источником усиления. При спонтанном излучения звука эта приходящая энергия совпадает с энергией, уносимой волной, уходящей в неподвижную среду.

В изложенном решении задачи неустойчивость поверхности разрыва не учитывается, формальная корректность такой постановки задачи связана с тем, что звуковые волны и неустойчивые поверхностные (затухающие при $z \to \pm\infty$) волны представляют собой линейно независимые колебательные моды. Физическая же корректность требует соблюдения специальных условий (например, начальных), в которых поверхностные волны еще достаточно слабы.

§ 85. Ударная адиабата

Перейдем к подробному изучению ударных волн [1]. Мы видели, что в этих разрывах тангенциальная компонента скорости газа непрерывна. Можно поэтому выбрать систему координат, в которой рассматриваемый элемент поверхности разрыва покоится, а тангенциальная компонента скорости газа по обе стороны

[1]) Сделаем одно терминологическое замечание. Под ударной волной мы понимаем самую поверхность разрыва. В литературе, однако, можно встретить и другую терминологию, в которой поверхность разрыва называют фронтом ударной волны, а под ударной волной понимают поверхность разрыва вместе со следующим за ним течением газа.

поверхности равна нулю [1]). Тогда можно писать вместо нормальной компоненты v_x величину v и условия (84.7) напишутся в виде

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j, \tag{85.1}$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \tag{85.2}$$

$$w_1 + \frac{v_1^2}{2} = w_2 + \frac{v_2^2}{2}, \tag{85.3}$$

где j обозначает плотность потока газа через поверхность разрыва. Мы условимся в дальнейшем всегда считать j положительным, причем газ переходит со стороны *1* на сторону *2*. Другими словами, мы будем называть газом *1* тот, в сторону которого движется ударная волна, а газом *2* — газ, остающийся за ней. Сторону ударной волны, обращенную к газу *1*, будем называть передней, а обращенную к газу *2* — задней.

Выведем ряд соотношений, являющихся следствием написанных условий. Введем удельные объемы $V_1 = 1/\rho_1$, $V_2 = 1/\rho_2$ газа. Из (85.1) имеем

$$v_1 = jV_1, \quad v_2 = jV_2 \tag{85.4}$$

и, подставляя в (85.2):

$$p_1 + j^2 V_1 = p_2 + j^2 V_2, \tag{85.5}$$

или

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \tag{85.6}$$

Эта формула (вместе с (85.4)) связывает скорость распространения ударной волны с давлениями и плотностями газа по обеим сторонам поверхности.

Поскольку j^2 — величина положительная, то должно быть одновременно $p_2 > p_1$, $V_1 > V_2$ или $p_2 < p_1$, $V_1 < V_2$; мы увидим в дальнейшем, что в действительности возможен лишь первый случай.

Отметим еще следующую полезную формулу для разности скоростей $v_1 - v_2$. Подставляя (85.6) в $v_1 - v_2 = j(V_1 - V_2)$, получаем [2])

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \tag{85.7}$$

---

[1]) Такой выбор системы координат будет подразумеваться везде в этой главе, за исключением § 92.

Неподвижную ударную волну часто называют скачком уплотнения. Если неподвижная ударная волна перпендикулярна к направлению потока, то говорят о прямом скачке уплотнения; если же она наклонна к направлению движения, то говорят о косом скачке уплотнения.

[2]) Мы пишем здесь квадратный корень с положительным знаком, заранее имея в виду, что должно быть $v_1 - v_2 > 0$, как это будет выяснено ниже (§ 87).

Далее, пишем (85.3) в виде

$$w_1 + \frac{j^2V_1^2}{2} = w_2 + \frac{j^2V_2^2}{2} \tag{85.8}$$

и, подставляя j^2 из (85.6), получаем

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_2 - p_1) = 0. \tag{85.9}$$

Если ввести вместо тепловой функции внутреннюю энергию ε согласно $\varepsilon = w - pV$, то полученное соотношение можно написать в виде

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0. \tag{85.10}$$

Эти соотношения определяют связь между термодинамическими величинами по обе стороны поверхности разрыва.

При заданных p_1, V_1 уравнение (85.9) или (85.10) определяет зависимость между p_2 и V_2. Об этой зависимости говорят как об *ударной адиабате* или *адиабате Гюгонио* (*W.J. Rankine*, 1870; *H. Hugoniot*, 1885). Графически она изображается (рис. 53) в

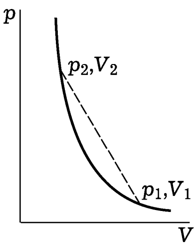


Рис. 53

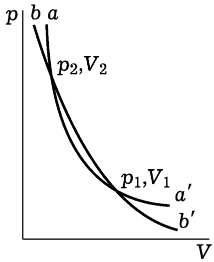


Рис. 54

плоскости pV кривой, проходящей через заданную точку p_1, V_1, отвечающую состоянию газа *1* перед ударной волной; эту точку ударной адиабаты мы будем называть ее *начальной точкой*. Отметим, что ударная адиабата не может пересечь вертикальной прямой $V = V_1$ нигде, кроме только начальной точки. Действительно, наличие такого пересечения означало бы, что одному и тому же объему соответствуют два различных давления, удовлетворяющих уравнению (85.10). Между тем, при $V_1 = V_2$ имеем из (85.10) также и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, а при одинаковых объемах и энергиях давления тоже должны быть одинаковыми. Таким образом, прямая $V = V_1$ делит ударную адиабату на две части, из которых каждая находится целиком по одну сторону от этой прямой. По аналогичной причине ударная адиабата пересекает только в одной точке (p_1, V_1) также и горизонтальную прямую $p = p_1$.

Пусть aa' (рис. 54) есть ударная адиабата, проведенная через точку p_1, V_1 в качестве начальной. Выберем на ней какую-нибудь точку p_2, V_2 и проведем через нее другую адиабату (bb'),

для которой бы эта точка была начальной. Очевидно, что пара значений p_1, V_1 будет удовлетворять также и уравнению этой второй адиабаты. Таким образом, адиабаты aa' и bb' пересекутся в обеих точках p_1, V_1 и p_2, V_2. Подчеркнем, что обе эти адиабаты отнюдь не совпадают полностью друг с другом, как это имело бы место для адиабат Пуассона, проведенных через заданную точку.

Это обстоятельство является одним из следствий того факта, что уравнение ударной адиабаты не может быть написано в виде $f(p, V) = \text{const}$, где f есть некоторая функция своих аргументов, как это, например, имеет место для адиабаты Пуассона (уравнение которой есть $s(p, V) = \text{const}$). В то время как адиабаты Пуассона (для заданного газа) составляют однопараметрическое семейство кривых, ударная адиабата определяется заданием двух параметров: начальных значений p_1, V_1. С этим же связано и следующее важное обстоятельство: если две (или более) последовательные ударные волны переводят газ соответственно из состояния *1* в состояние *2* и из *2* в *3*, то переход из состояния *1* в *3* путем прохождения какой-либо одной ударной волны, вообще говоря, невозможен.

При заданном начальном термодинамическом состоянии газа (т. е. заданных p_1, V_1) ударная волна определяется всего одним каким-либо параметром: если, например, задать давление p_2 за волной, то по адиабате Гюгонио определится V_2, а затем по формулам (85.4) и (85.6) — плотность потока j и скорости v_1 и v_2. Напомним, однако, что мы рассматриваем здесь ударную волну в системе координат, в которой газ движется нормально к ее поверхности. Если же учесть возможность расположения ударной волны под косым углом к направлению потока, то понадобится еще один параметр, например, значение касательной к ее поверхности составляющей скорости.

Укажем здесь на следующее удобное графическое истолкование формулы (85.6). Если соединить хордой точку p_1, V_1 на ударной адиабате (рис. 53) с некоторой произвольной точкой p_2, V_2 на ней, то $(p_2 - p_1)/(V_2 - V_1) = -j^2$ есть не что иное, как тангенс угла наклона этой хорды к оси абсцисс (к ее положительному направлению). Таким образом, значение j, а с ним и скорости ударной волны, определяется в каждой точке ударной адиабаты углом наклона хорды, проведенной в эту точку из начальной точки.

Наряду с другими термодинамическими величинами в ударной волне испытывает разрыв также и энтропия. В силу закона возрастания энтропии последняя для газа может лишь возрастать при его движении. Поэтому энтропия s_2 газа, прошедшего через ударную волну, должна быть больше его начальной энтропии s_1:

$$s_2 > s_1. \tag{85.11}$$

Мы увидим ниже, что это условие налагает существенные ограничения на характер изменения всех величин в ударной волне.

Подчеркнем здесь следующее обстоятельство. Наличие ударных волн приводит к возрастанию энтропии при таких движениях, которые можно рассматривать во всем пространстве как движение идеальной жидкости, не обладающей вязкостью и теплопроводностью. Возрастание энтропии означает необратимость движения, т. е. наличие диссипации энергии. Таким образом, разрывы представляют собой механизм, который приводит к диссипации энергии при движении идеальной жидкости. В связи с этим для движения тел в идеальной жидкости, сопровождающегося возникновением ударных волн, не имеет места парадокс Даламбера (§ 11) — при таком движении тело испытывает силу сопротивления.

Разумеется, истинный механизм возрастания энтропии в ударных волнах заключен в диссипативных процессах, происходящих в тех весьма тонких слоях вещества, которые в действительности представляют собой физические ударные волны (см. § 93). Замечательно, однако, что величина этой диссипации целиком определяется одними лишь законами сохранения массы, энергии и импульса, примененными к обеим сторонам этих слоев: их ширина устанавливается как раз такой, чтобы дать требуемое этими законами сохранения увеличение энтропии.

Возрастание энтропии в ударной волне оказывает еще и другое существенное влияние на движение: если движение газа впереди ударной волны потенциально, то за ней оно, вообще говоря, становится вихревым; мы вернемся к этому обстоятельству в § 114.

§ 86. Ударные волны слабой интенсивности

Рассмотрим ударную волну, в которой все величины испытывают лишь небольшой скачок; о таких разрывах мы будем говорить как об ударных волнах слабой интенсивности. Преобразуем соотношение (85.9), производя в нем разложение по степеням малых разностей $s_2 - s_1$ и $p_2 - p_1$. Мы увидим, что при таком разложении в (85.9) сокращаются члены первого и второго порядков по $p_2 - p_1$; поэтому необходимо производить разложение по $p_2 - p_1$ до членов третьего порядка включительно. По разности же $s_2 - s_1$ достаточно разложить до членов первого порядка. Имеем

$$w_2 - w_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial s_1}\right)_p (s_2 - s_1) + \left(\frac{\partial w}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3}\right)_s (p_2 - p_1)^3.$$

Но согласно термодинамическому соотношению $dw = T\,ds + V\,dp$ имеем для производных:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s = V.$$

Поэтому

$$w_2 - w_1 = T_1(s_2 - s_1) + V_1(p_2 - p_1) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3.$$

Объем V_2 достаточно разложить только по $p_2 - p_1$, поскольку во втором члене уравнения (85.9) уже имеется малая разность $p_2 - p_1$ и разложение по $s_2 - s_1$ дало бы член порядка $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$, не интересующий нас. Таким образом,

$$V_2 - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2.$$

Подставляя эти разложения в (85.9), получим следующее соотношение:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3. \tag{86.1}$$

Таким образом, скачок энтропии в ударной волне слабой интенсивности является малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления.

Адиабатическая сжимаемость вещества — $(\partial V/\partial p)_s$ практически всегда падает с увеличением давления, т. е. вторая производная [1])

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0. \tag{86.2}$$

Подчеркнем, однако, что это неравенство не является термодинамическим соотношением и, в принципе, возможны его нарушения [2]). Как мы неоднократно увидим ниже, в газодинамике

---

[1]) Для политропного газа

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s = \frac{\gamma+1}{\gamma^2}\frac{V}{p^2}.$$

Это выражение проще всего можно получить путем дифференцирования уравнения адиабаты Пуассона $pV^\gamma = \text{const}$.

[2]) Так, это может иметь место в области вблизи критической точки жидкость — газ. Ситуация с нарушением условия (86.2) может быть также имитирована на ударной адиабате для среды, допускающей фазовый переход (в результате чего на адиабате возникает излом). См. об этом в кн.: *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1966, гл. 1, § 19; гл. XI, § 20.

знак производной (86.2) весьма существен; в дальнейшем мы будем всегда считать его положительным.

Проведем через точку *1* (p_1, V_1) на p, V-диаграмме две кривые — ударную адиабату и адиабату Пуассона. Уравнение адиабаты Пуассона есть $s_2 - s_1 = 0$. Из сравнения этого уравнения с уравнением (86.1) ударной адиабаты вблизи точки *1* видно, что обе кривые касаются в этой точке, причем имеет место касание второго порядка — совпадают не только первые, но и вторые производные. Для того чтобы выяснить взаимное расположение обеих кривых вблизи точки *1*, воспользуемся тем, что согласно (86.1) и (86.2) при $p_2 > p_1$ на ударной адиабате должно быть $s_2 > s_1$, между тем как на адиабате Пуассона остается $s_2 = s_1$. Поэтому абсцисса точки на ударной адиабате должна быть при той же ординате p_2 больше абсциссы точки на адиабате Пуассона. Это следует из того, что согласно известной термодинамической формуле

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

энтропия растет с увеличением объема при постоянном давлении — для всех тел, которые расширяются при нагревании, т. е. у которых $(\partial V/\partial T)_p > 0$. Аналогично убеждаемся в том, что ниже точки *1* (т. е. при $p_2 < p_1$) абсциссы точек адиабаты Пуассона должны быть больше абсцисс ударной адиабаты. Таким образом, вблизи точки своего касания обе кривые расположены указанным на рис. 55 образом (HH' — ударная адиабата, а PP' — адиабаты Пуассона) [1]), причем в силу (86.2) обе обращены вогнутостью вверх.

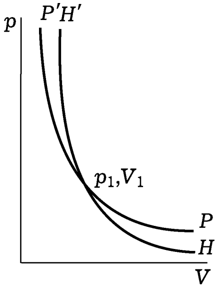


Рис. 55

При малых $p_2 - p_1$ и $V_2 - V_1$ формулу (85.6) можно написать в первом приближении в виде

$$j^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s$$

(мы пишем здесь производную при постоянной энтропии, имея в виду, что касательные к адиабатам Пуассона и ударной в точке *1* совпадают). Далее, скорости v_1 и v_2 в том же приближении одинаковы и равны

$$v = jV = \sqrt{-V^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

Но это есть не что иное, как скорость звука c. Таким образом, скорость распространения ударных волн слабой интенсивности

[1]) При $(\partial V/\partial T)_p < 0$ расположение обеих кривых было бы обратным.

совпадает в первом приближении со скоростью звука:

$$v = c. \tag{86.3}$$

Из полученных свойств ударной адиабаты в окрестности точки *1* можно вывести ряд существенных следствий. Поскольку в ударной волне должно выполняться условие $s_2 > s_1$, то должно быть и

$$p_2 > p_1,$$

т. е. точки *2* (p_2, V_2) должны находиться выше точки *1*. Далее, поскольку хорда *12* идет круче касательной к адиабате в точке *1* (см. рис. 53), а тангенс угла наклона этой касательной равен производной $(\partial p_1/\partial V_1)_{s_1}$, имеем

$$j^2 > -\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1}.$$

Умножая это неравенство с обеих сторон на V_1, находим

$$j^2 V_1^2 = v_1^2 > -V_1^2\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_1}\right)_{s_1} = c_1^2,$$

где c_1 — скорость звука, соответствующая точке *1*. Таким образом,

$$v_1 > c_1.$$

Наконец, из того, что хорда *12* расположена менее круто, чем касательная в точке *2*, аналогичным образом следует, что $v_2 < c_2$ [1].

Упомянем еще, в заключение, что при $(\partial^2 V/\partial p^2)_s < 0$ из условия $s_2 > s_1$ для ударных волн слабой интенсивности следовало бы $p_2 < p_1$, а для скоростей — те же неравенства $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$.

§ 87. Направление изменения величин в ударной волне

Таким образом, в предположении положительности производной (86.2) для ударных волн слабой интенсивности можно весьма просто показать, что условие возрастания энтропии с необходимостью приводит также и к неравенствам

$$p_2 > p_1, \tag{87.1}$$

$$v_1 > c_1, \quad v_2 < c_2. \tag{87.2}$$

Из замечания, сделанного по поводу формулы (85.6) следует, что если $p_2 > p_1$, то

$$V_2 < V_1, \tag{87.3}$$

[1]) Последняя аргументация применима только вблизи точки *1*, где тангенс угла наклона касательной к ударной адиабате в точке *2* отличается от производной $(\partial p_2/\partial V_2)_{s_2}$, лишь на величину второго порядка малости.

а поскольку $j = v_1/V_1 = v_2/V_2$, то и [1])

$$v_1 > v_2. \tag{87.4}$$

Неравенства (87.1) и (87.3) означают, что при прохождении газа через ударную волну происходит его сжатие — его давление и плотность возрастают. Неравенство $v_1 > c_1$ означает, что ударная волна движется относительно находящегося перед ней газа со сверхзвуковой скоростью; ясно поэтому, что в этот газ не могут проникнуть никакие исходящие от ударной волны возмущения. Другими словами, наличие ударной волны вовсе не сказывается на состоянии газа впереди нее.

Покажем теперь, что все неравенства (87.1)–(87.4) справедливы и для ударных волн произвольной интенсивности — при том же предположении о знаке производной $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ [2]).

Величина j^2 определяет наклон хорды, проведенной из начальной точки ударной адиабаты *1* в произвольную точку *2* ($-j^2$ есть тангенс угла наклона этой хорды к оси V). Покажем, прежде всего, что направление изменения этой величины при перемещении точки *2* вдоль адиабаты однозначно связано с направлением изменения энтропии s_2 при том же перемещении.

Продифференцируем соотношения (85.5) и (85.8) по величинам, относящимся к газу *2* при заданном состоянии газа *1*. Это значит, что дифференцируются p_2, V_2, w_2 и j при заданных значениях p_1, V_1, w_1. Из (85.5) получаем

$$dp_2 + j^2\, dV_2 = (V_1 - V_2)\, d(j^2), \tag{87.5}$$

а из (85.8):

$$dw_2 + j^2 V_2\, dV_2 = \frac{1}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right) d\left(j^2\right)$$

или, раскрыв дифференциал dw_2:

$$T_2\, ds_2 + V_2\left(dp_2 + j^2\, dV_2\right) = \frac{1}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right) d\left(j^2\right).$$

Подставив сюда $dp_2 + j^2\, dV_2$ из (87.5), получим соотношение

$$T_2\, ds_2 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)^2\, d(j^2). \tag{87.6}$$

---

[1]) Если перейти в систему отсчета, в которой газ *1* перед ударной волной покоится, а волна движется, то неравенство $v_1 > v_2$ означает, что газ позади ударной волны будет двигаться (со скоростью $v_1 - v_2$) в ту же сторону, куда движется сама волна.

[2]) Неравенства (87.1)–(87.4) были получены для ударных волн произвольной интенсивности в политропном газе *Жуге* (*E. Jouguet*, 1904) и *Цемпленом* (*G. Zemplen*, 1905). Излагаемое ниже доказательство для произвольной среды дано *Л.Д. Ландау* (1944).

Отсюда видно, что

$$d(j^2)/\,ds_2 > 0, \tag{87.7}$$

т. е. j^2 и s_2 меняются в одинаковом направлении.

Дальнейшие рассуждения имеют своей следующей целью показать, что на ударной адиабате не может быть точек, в которых бы она касалась проведенной из точки *1* прямой (как это имело бы место в точке O на рис. 56).

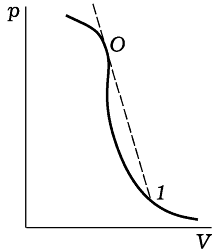


Рис. 56

В такой точке угол наклона хорды (проведенной из точки *1*) имеет минимум, а j^2 — соответственно максимум, и потому

$$d(j^2)/dp_2 = 0.$$

Из соотношения (87.6) видно, что в таком случае

$$ds_2/dp_2 = 0.$$

Далее, вычислим производную $d(j^2)/dp_2$ в произвольной точке ударной адиабаты. Подставив в соотношение (87.5) дифференциал dV_2 в виде

$$dV_2 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} dp_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2} ds_2,$$

взяв для ds_2 выражение (87.6) и разделив все равенство на dp_2, получим

$$\frac{d(j^2)}{dp_2} = \frac{1 + j^2\left(\dfrac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2}}{(V_1 - V_2)\left[1 - \dfrac{j^2(V_1 - V_2)}{2T_2}\left(\dfrac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2}\right]}. \tag{87.8}$$

Отсюда видно, что обращение этой производной в нуль влечет за собой также и равенство

$$1 + j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} = 1 - \frac{v_2^2}{c_2^2} = 0,$$

т. е. $v_2 = c_2$. Обратно, из равенства $v_2 = c_2$ следует, что производная $d(j^2)/dp_2 = 0$; последняя могла бы не обратиться в нуль, если бы вместе с числителем в (87.8) обратился бы в нуль также и знаменатель; но выражения в числителе и знаменателе представляют собой две различные функции точки *2* на ударной адиабате, их одновременное обращение в нуль могло бы произойти лишь чисто случайно и потому невероятно [1]).

[1]) Подчеркнем, во избежание недоразумений, что сама производная $d(j^2)/dp_2$ не является еще одной независимой функцией точки *2*; выражение (87.8) есть ее определение.

Таким образом, все три равенства

$$\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0, \quad \frac{ds_2}{dp_2} = 0, \quad v_2 = c_2 \tag{87.9}$$

являются следствиями друг друга и имели бы место одновременно в точке O на кривой рис. 56 (имея в виду последнее из этих равенств, будем условно называть такую точку *звуковой*), Наконец, для производной от $(v_2/c_2)^2$ в этой точке имеем

$$\frac{d}{dp_2}\left(\frac{v_2^2}{c_2^2}\right) = -\frac{d}{dp_2}\left[j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2}\right] = -j^2\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial p_2^2}\right)_{s_2}.$$

Ввиду предполагаемой везде положительности производной $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$, имеем, следовательно, в звуковой точке:

$$\frac{d}{dp_2}\frac{v_2}{c_2} < 0. \tag{87.10}$$

Теперь уже легко доказать невозможность существования звуковой точки на ударной адиабате. В точках, лежащих вблизи начальной точки *1* над ней, имеем $v_2 < c_2$ (см. конец предыдущего параграфа). Поэтому равенство $v_2 = c_2$ может быть достигнуто лишь при увеличении v_2/c_2; другими словами, в звуковой точке должно было бы быть $d(v_2/c_2)/dp_2 > 0$, между тем, как согласно (87.10), мы имеем как раз обратное неравенство. Аналогичным образом можно убедиться в невозможности обращения v_2/c_2 в единицу и на нижней части ударной адиабаты, под точкой *1*.

Имея в виду доказанную таким образом невозможность существования звуковых точек, можно заключить непосредственно из графика ударной адиабаты, что угол наклона хорды *12* уменьшается при передвижении точки *2* вверх по кривой, а j^2 соответственно монотонно возрастает; ввиду неравенства (87.7) отсюда следует, что монотонно возрастает и энтропия s_2. Таким образом, при соблюдении необходимого условия $s_2 > s_1$ будет и $p_2 > p_1$.

Легко, далее, убедиться в том, что на верхней части ударной адиабаты справедливы также и неравенства $v_2 < c_2$, $v_1 > c_1$. Первое следует прямо из того, что оно справедливо вблизи точки *1*, а сделаться равным единице отношение v_2/c_2 нигде не может. Второе следует из того, что ввиду невозможности такого перегиба адиабаты, какой изображен на рис. 56, всякая хорда из точки *1* в находящуюся над ней точку *2* расположена более круто, чем касательная к ударной адиабате в точке *1*.

Таким образом, на верхней части ударной адиабаты выполняются условие $s_2 > s_1$ и все три неравенства (87.1), (87.2). Наоборот, на нижней части адиабаты все эти условия не выполняются.

Следовательно, все эти условия оказываются эквивалентными друг другу и выполнение одного из них автоматически влечет за собой также и выполнение всех остальных.

Напомним лишний раз, что в изложенных рассуждениях все время предполагалось выполненным условие положительности производной $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$. Если эта производная могла бы менять знак, то из необходимого термодинамического неравенства $s_2 > s_1$ уже нельзя было бы сделать никаких универсальных заключений о неравенствах для остальных величин.

§ 88. Эволюционность ударных волн

Вывод неравенств (87.1)–(87.4) в § 86, 87 был связан с определенным предположением о термодинамических свойствах среды — с положительностью производной $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$. Весьма существенно, однако, что неравенства

$$v_1 > c_1 \quad v_2 < c_2 \tag{88.1}$$

для скоростей могут быть получены также и из совершенно иных соображений, показывающих, что ударные волны с нарушенными условиями (88.1) все равно не могли бы существовать, даже если бы это не противоречило изложенным выше чисто термодинамическим соображениям [1]).

Именно необходимо исследовать еще вопрос об устойчивости ударных волн. Наиболее общее необходимое условие устойчивости состоит в требовании, чтобы любое бесконечно малое возмущение начального (в некоторый момент $t = 0$) состояния приводило бы лишь к вполне определенным бесконечно малым же изменениям течения, — по крайней мере в течение достаточно малого промежутка времени t. Последняя оговорка означает недостаточность указанного условия; так, если начальное малое возмущение возрастает даже экспоненциально (как $e^{\gamma t}$ с положительной постоянной γ), то в течение времени $t \lesssim 1/\gamma$ возмущение остается малым, хотя в конце концов оно и приводит к разрушению данного режима движения. Возмущением, не удовлетворяющим поставленному необходимому условию, является расщепление ударной волны на два (или более) последовательных разрыва; очевидно, что изменение движения при этом сразу же оказывается не малым, хотя при малых t (когда оба разрыва не разошлись еще на большое расстояние) оно и занимает лишь небольшой интервал расстояний δx.

[1]) Напомним в то же время, что (по крайней мере для ударных волн слабой интенсивности) эти термодинамические соображения приводят к условиям (88.1) также и при $(\partial^2 V/\partial p^2)_s < 0$, когда ударная волна является волной разрежения (а не сжатия); это обстоятельство было отмечено в конце § 86.

Произвольное начальное малое возмущение определяется некоторым числом независимых параметров. Дальнейшая же эволюция возмущения определяется системой линеаризованных граничных условий, которые должны удовлетворяться на поверхности разрыва. Поставленное выше необходимое условие устойчивости будет выполнено, если число этих уравнений совпадает с числом содержащихся в них неизвестных параметров — тогда граничные условия определяют дальнейшее развитие возмущения, которое при малых $t > 0$ останется малым. Если же число уравнений больше или меньше числа независимых параметров, то задача о малом возмущении не имеет решений вовсе или имеет их бесконечное множество. Оба случая свидетельствовали бы о неправомерности исходного предположения (малость возмущения при малых t) и, таким образом, противоречили бы поставленному требованию. Сформулированное таким образом условие называют условием *эволюционности* течения.

Рассмотрим возмущение ударной волны, представляющее собой ее бесконечно малое смещение в направлении, перпендикулярном ее плоскости [1]. Оно сопровождается бесконечно малым возмущением также и других величин — давления, скорости и т. д. газа по обеим сторонам поверхности разрыва. Эти возмущения, возникнув вблизи волны, будут затем распространяться от нее, переносясь (относительно газа) со скоростью звука; это не относится лишь к возмущению энтропии, которое будет переноситься только с самим газом. Таким образом, произвольное возмущение данного типа можно рассматривать как совокупность звуковых возмущений, распространяющихся в газах *1* и *2* по обе стороны ударной волны, и возмущения энтропии; последнее, перемещаясь вместе с газом, будет, очевидно, существовать лишь в газе *2* позади ударной волны. В каждом из звуковых возмущений изменения всех величин связаны друг с другом определенными соотношениями, следующими из уравнений движения (как в любой звуковой волне; § 64); поэтому каждое такое возмущение определяется всего лишь одним параметром.

Подсчитаем теперь число возможных звуковых возмущений. Оно зависит от относительной величины скоростей газа v_1, v_2 и скоростей звука c_1, c_2. Выберем направление движения газа (со стороны *1* на сторону *2*) в качестве положительного направления оси x. Скорость распространения возмущения в газе *1* относительно неподвижной ударной волны есть $u_1 = v_1 \pm c_1$, а в газе *2* $u_2 = v_2 \pm c_2$. Тот факт, что эти возмущения должны распространяться по направлению от ударной волны, означает, что должно быть $u_1 < 0$, $u_2 > 0$.

---

[1] Излагаемое ниже обоснование неравенств (88.1) принадлежит *Л.Д. Ландау* (1944).

Предположим, что $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$. Тогда ясно, что оба значения $u_1 = v_1 \pm c_1$ будут положительными, а из двух значений u_2 будут положительными лишь $v_2 + c_2$. Это значит, что в газе *1* вообще не сможет быть интересующих нас звуковых возмущений, а в газе *2* — всего одно, распространяющееся относительно самого газа со скоростью $+c_2$. Аналогичным образом производится подсчет в других случаях.

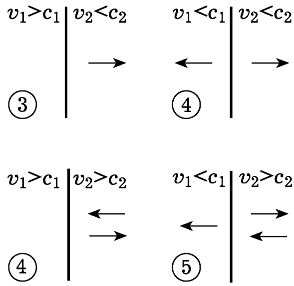


Рис. 57

Результат изображен на рис. 57, где каждая стрелка соответствует одному звуковому возмущению, распространяющемуся относительно газа в указываемую стрелкой сторону. Каждое же звуковое возмущение определяется, как было выше указано, одним параметром. Кроме того, во всех четырех случаях имеется еще по два параметра: параметр, определяющий распространяющееся в газе *2* возмущение энтропии, и параметр, определяющий самое смещение ударной волны.

Для каждого из четырех случаев на рис. 57 цифрой в кружке указано получающееся таким образом полное число параметров, определяющих произвольное возмущение, возникающее при смещении ударной волны.

С другой стороны, число необходимых граничных условий, которым должно удовлетворять возмущение на поверхности разрыва, равно трем (условия непрерывности потоков массы, энергии и импульса). Во всех изображенных на рис. 57 случаях, за исключением лишь первого, число имеющихся независимых параметров превышает число уравнений. Мы видим, что эволюционны лишь ударные волны, удовлетворяющие условиям (88.1). Эти условия, таким образом, необходимы для существования ударных волн, вне зависимости от термодинамических свойств среды. Искусственно созданный разрыв, не удовлетворяющий этим условиям, немедленно распался бы на другие разрывы [1]).

Эволюционная ударная волна устойчива по отношению к рассмотренному типу возмущений и в обычном смысле этого слова. Если искать смещение ударной волны (а с ним и возмущения всех остальных величин) в виде, пропорциональном $e^{-i\omega t}$, то заранее очевидно, что однозначно определяемое граничными условиями

[1]) Во всех перечисленных на рис. 57 неэволюционных случаях возмущение недоопределено — число произвольных параметров превышает число уравнений. Упомянем, что в магнитной гидродинамике ударные волны могут быть неэволюционными в силу как недоопределенности, так и переопределенности возмущений (см. VIII, § 73).

значение ω может быть только нулем — уже хотя бы из тех соображений, что в задаче нет никаких параметров размерности обратного времени, которые могли бы определить отличное от нуля значение ω.

Мы вернемся к вопросу об устойчивости ударных волн в § 90.

§ 89. Ударные волны в политропном газе

Применим полученные в предыдущих параграфах общие соотношения к ударным волнам в политропном газе.

Тепловая функция такого газа дается простой формулой (83.11). Подставив это выражение в (85.9), получим после простого преобразования следующую формулу:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}. \qquad (89.1)$$

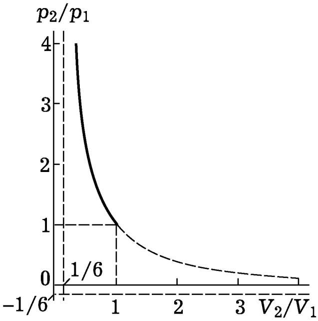


Рис. 58

По этой формуле можно определить по трем из величин p_1, V_1, p_2, V_2 четвертую. Отношение V_2/V_1 является монотонно убывающей функцией отношения p_2/p_1, стремящейся к конечному пределу $(\gamma-1)/(\gamma+1)$. Кривая, изображающая зависимость между p_2 и V_2 при заданных p_1, V_1 (ударная адиабата), представлена на рис. 58. Это — равнобочная гипербола с асимптотами

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \qquad \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

Реальным смыслом обладает, как мы знаем, только верхняя часть кривой над точкой $V_2/V_1 = p_2/p_1 = 1$, изображенная на рис. 58 (для $\gamma = 1{,}4$) сплошной линией.

Для отношения температур с обеих сторон разрыва имеем согласно уравнению состояния термодинамически идеального газа $T_2/T_1 = p_2V_2/(p_1V_1)$, так что

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}\right]. \qquad (89.2)$$

Для потока j получаем из (85.6) и (89.1):

$$j^2 = \frac{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}{2V_1} \qquad (89.3)$$

и отсюда для скорости распространения ударной волны относи-

тельно газов впереди и позади нее:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{V_1}{2}[(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2] = \frac{c_1^2}{2\gamma}\left[(\gamma-1)+(\gamma+1)\frac{p_2}{p_1}\right], \\ v_2^2 &= \frac{V_1}{2}\frac{[(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2]^2}{[(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2]} = \frac{c_2^2}{2\gamma}\left[(\gamma-1)+(\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}\right], \end{aligned} \tag{89.4}$$

и для разности скоростей:

$$v_1 - v_2 = \frac{\sqrt{2V_1}\,(p_2-p_1)}{[(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2]^{1/2}}. \tag{89.5}$$

В применениях полезны формулы, выражающие отношения плотностей, давлений и температур в ударной волне через число $\mathrm{M}_1 = v_1/c_1$; эти формулы без труда выводятся из полученных выше соотношений и гласят:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1)\mathrm{M}_1^2}{(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2+2}, \tag{89.6}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\mathrm{M}_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \tag{89.7}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma\mathrm{M}_1^2-(\gamma-1)][(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2+2]}{(\gamma+1)^2\mathrm{M}_1^2}. \tag{89.8}$$

Число же $\mathrm{M}_2 = v_2/c_2$ выражается через число M_1 с помощью соотношения

$$\mathrm{M}_2^2 = \frac{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2}{2\gamma\mathrm{M}_1^2-(\gamma-1)}. \tag{89.9}$$

Это соотношение симметрично относительно M_1 и M_2, как это становится очевидным, если записать его в виде уравнения

$$2\gamma\mathrm{M}_1^2\mathrm{M}_2^2 - (\gamma-1)\left(\mathrm{M}_1^2+\mathrm{M}_2^2\right) = 2.$$

Выпишем предельные формулы для ударных волн очень большой интенсивности (требуется, чтобы было $(\gamma-1)p_2 \gg (\gamma+1)p_1$). Имеем из (89.1), (89.2):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{p_2}{p_1}. \tag{89.10}$$

Отношение T_2/T_1 неограниченно растет вместе с p_2/p_1, т. е. скачок температуры, как и скачок давления, в ударной волне может быть сколь угодно большим. Отношение же плотностей стремится к постоянному пределу; так, для одноатомного газа предельное значение $\rho_2 = 4\rho_1$, для двухатомного $\rho_2 = 6\rho_1$. Скорости распространения ударной волны большой интенсивности равны

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}p_2V_1}\,, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)}p_2V_1}\,. \tag{89.11}$$

Они растут пропорционально корню из давления p_2.

Наконец, приведем соотношения для ударных волн слабой интенсивности, представляющие собой первые члены разложений по степеням малого отношения $z \equiv (p_2 - p_1)/p_1$:

$$\mathrm{M}_1 - 1 = 1 - \mathrm{M}_2 = \frac{\gamma+1}{4\gamma}z, \quad \frac{c_2}{c_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}z, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{z}{\gamma} - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}z^2. \tag{89.12}$$

Здесь сохранены члены, дающие первую поправку к значениям, отвечающим звуковому приближению.

Задачи

1. Получить формулу

$$v_1 v_2 = c_*^2,$$

где c_* — критическая скорость (*L. Prandtl*).

Решение. Поскольку величина $w + v^2/2$ непрерывна на ударной волне, можно ввести критическую скорость, одинаковую для газов *1* и *2* согласно

$$\frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma p_2}{(\gamma-1)\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_*^2$$

(ср. (83.7)). Определяя из этих равенств p_2/ρ_2 и p_1/ρ_1 и подставляя их в уравнение

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1}$$

(результат комбинирования (85.1) и (85.2)), получим

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma}(v_1 - v_2)\left(1 - \frac{c_*^2}{v_1 v_2}\right) = 0.$$

Ввиду того что $v_1 \neq v_2$, отсюда следует искомое соотношение.

2. Определить отношение p_2/p_1 по заданным температурам T_1, T_2 для ударной волны в термодинамически идеальном газе с непостоянной теплоемкостью.

Решение. Для такого газа можно лишь утверждать, что w (как и ε) есть функция только от температуры и что p, V, T связаны уравнением состояния $pV = RT/\mu$. Решая уравнение (85.9) относительно p_2/p_1, получаем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu}{RT_1}(w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1} + \sqrt{\left[\frac{\mu}{RT_1}(w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1}\right]^2 + \frac{T_2}{T_1}},$$

где $w_1 = w_1(T_1)$, $w_2 = w_2(T_2)$.

§ 90. Гофрировочная неустойчивость ударных волн

Соблюдение условий эволюционности само по себе необходимо, но еще недостаточно для гарантирования устойчивости ударной волны. Волна может оказаться неустойчивой по отношению к возмущениям, характеризующимся периодичностью вдоль поверхности разрыва и представляющим собой как бы «рябь», или «гофрировку», на этой поверхности (такого рода возмущения

рассматривались уже в § 29 для тангенциальных разрывов) [1]. Покажем, каким образом исследуется этот вопрос для ударных волн в произвольной среде (*С.П. Дьяков*, 1954).

Пусть ударная волна покоится, занимая плоскость $x = 0$; жидкость движется сквозь нее слева направо, в положительном направлении оси x. Пусть поверхность разрыва испытывает возмущение, при котором ее точки смещаются вдоль оси x на малую величину

$$\zeta = \zeta_0 e^{i(k_y y - \omega t)}, \tag{90.1}$$

где k_y — волновой вектор «ряби». Эта рябь на поверхности вызывает возмущение течения позади ударной волны, в области $x > 0$ (течение же перед разрывом, $x < 0$, не испытывает возмущения в силу своей сверхзвуковой скорости).

Произвольное возмущение течения складывается из энтропийно-вихревой волны и звуковой волны (см. задачу к § 82). В обоих зависимость величин от времени и координат дается множителем вида $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$ с той же частотой ω, что и в (90.1). Из соображений симметрии очевидно, что волновой вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости xy; его y-компонента совпадает с k_y в (90.1), а x-компонента различна для возмущений двух типов.

В энтропийно-вихревой волне $\mathbf{kv}_2 = \omega$, т. е. $k_x = \omega/v_2$ (v_2 — невозмущенная скорость газа за разрывом). В этой волне возмущение давления отсутствует, возмущение удельного объема связано с возмущением энтропии, $\delta V^{(\text{энт})} = (\partial V/\partial s)_p\,\delta s$, а возмущение скорости подчинено условию

$$\mathbf{k}\delta\mathbf{v}^{(\text{энт})} = \frac{\omega}{v_2}\delta v_x^{(\text{энт})} + k_y \delta v_y^{(\text{энт})} = 0. \tag{90.2}$$

В звуковой волне в движущемся газе связь между частотой и волновым вектором дается равенством $(\omega - \mathbf{kv})^2 = c^2k^2$ (см.(68.1)); поэтому k_x в этой волне определяется уравнением

$$\left(\omega - k_x v_2\right)^2 = c_2^2\left(k_x^2 + k_y^2\right). \tag{90.3}$$

Возмущения давления, удельного объема и скорости связаны соотношениями:

$$\delta p^{(\text{зв})} = -\left(\frac{c_2}{V_2}\right)^2 \delta V^{(\text{зв})}, \tag{90.4}$$

$$(\omega - v_2 k_x)\delta\mathbf{v}^{(\text{зв})} = V_2\mathbf{k}\,\delta p^{(\text{зв})}. \tag{90.5}$$

Возмущение в целом представляется линейной комбинацией возмущений обоих типов:

$$\delta v = \delta v^{(\text{энт})} + \delta v^{(\text{эв})},\ \ \delta V = \delta V^{(\text{энт})} + \delta V^{(\text{эв})},\ \ \delta p = \delta p^{(\text{эв})}. \tag{90.6}$$

---

[1]) Неустойчивость по отношению к таким возмущениям называют гофрировочной (corrugation instability по английской терминологии).

Оно должно удовлетворять определенным граничным условиям на возмущенной поверхности разрыва.

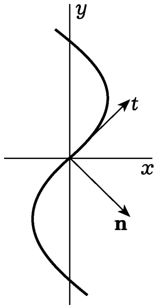


Рис. 59

Прежде всего, на этой поверхности должна быть непрерывна тангенциальная к ней составляющая скорости, а скачок нормальной составляющей должен выражаться через возмущенные давление и плотность равенством (85.7). Эти условия записываются как

$$\mathbf{v}_1\mathbf{t} = (\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v})\mathbf{t},$$

$$\mathbf{v}_1\mathbf{n} - (\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v})\mathbf{n} = [(p_2 - p_1 + \delta p)(V_1 - V_2 - \delta V)]^{1/2},$$

где $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы касательной и нормали к поверхности разрыва (рис. 59). С точностью до величин первого порядка малости компоненты этих векторов (в плоскости xy) равны $\mathbf{t}(ik\zeta, 1)$ и $\mathbf{n}(1, -ik\zeta)$; выражение $ik\zeta$ возникает как производная $\partial\zeta/\partial y$. С этой же точностью граничные условия для скорости принимают вид

$$\delta v_y = ik\zeta(v_1 - v_2), \quad \delta v_x = \frac{v_2 - v_1}{2}\left[\frac{\delta p}{p_2 - p_1} - \frac{\delta V}{V_1 - V_2}\right]. \tag{90.7}$$

Далее, возмущенные значения $p_2 + \delta p$ и $V_2 + \delta V_2$ должны удовлетворять тому же уравнению адиабаты Гюгонио, что и невозмущенные p_2 и V_2. Отсюда получаем условие, связывающее δp и δV:

$$\delta p = \frac{dp_2}{dV_2}\delta V, \tag{90.8}$$

где производная берется вдоль адиабаты.

Наконец, еще одно соотношение возникает из связи между потоком вещества через поверхность разрыва и скачками давления и плотности на ней. Для невозмущенного разрыва это соотношение выражается формулой (85.6), а для возмущенного аналогичное соотношение есть

$$\frac{1}{V_1^2}(\mathbf{v}_1\mathbf{n} - \mathbf{u}\mathbf{n})^2 = \frac{p_2 - p_1 + \delta p}{V_1 - V_2 - \delta V}.$$

где $\mathbf{u}$ — скорость точек поверхности разрыва. В первом приближении по малым величинам имеем $\mathbf{un} = -i\omega\zeta$; разлагая написанное равенство также и по степеням δp и δV, получим

$$\frac{2i\omega}{v_1}\zeta = \frac{\delta p}{p_2 - p_1} + \frac{\delta V}{V_1 - V_2}. \tag{90.9}$$

Равенства (90.2), (90.4), (90.5), (90.7)–(90.9) составляют систему восьми линейных алгебраических уравнений для восьми

величин ζ, δp, $\delta V^{(\text{энт})}$, $\delta V^{(\text{зв})}$, $\delta v_{x,y}^{(\text{энт})}$, $\delta v_{x,y}^{(\text{зв})}$ [1]). Условие совместности этих уравнений (выражаемое равенством нулю определителя их коэффициентов) имеет вид

$$\frac{2\omega v_2}{v_1}\left(k_y^2+\frac{\omega^2}{v_2^2}\right)-\left(\frac{\omega^2}{v_1 v_2}+k_x^2\right)\left(\omega-v_2k_y\right)(1+h)=0, \tag{90.10}$$

где для краткости введено обозначение $h=j^2(dV_2/dp_2)$, а j имеет обычный смысл: $j=v_1/V_1=v_2/V_2$. Величину k_x в (90.10) надо понимать как функцию k_y и ω, определяемую равенством (90.3).

Условие неустойчивости состоит в существовании возмущений, экспоненциально возрастающих со временем, причем они должны экспоненциально убывать с удалением от поверхности разрыва (т. е. при $x\to\infty$); последнее условие означает, что источником возмущения является сама ударная волна, а не какой-то внешний по отношению к ней источник. Другими словами, волна неустойчива, если уравнение (90.10) имеет решения, у которых

$$\operatorname{Im}\omega>0,\quad \operatorname{Im}k_x>0. \tag{90.11}$$

Исследование уравнения (90.10) на предмет выяснения условий существования таких решений довольно громоздко. Мы не будем производить его здесь, ограничившись указанием окончательного результата [2]). Гофрировочная неустойчивость ударной волны возникает, если

$$j^2\frac{dV_2}{dp_2}<-1, \tag{90.12}$$

или

$$j^2\frac{dV_2}{dp_2}>1+2\frac{v_2}{c_2}; \tag{90.13}$$

напомним, что производная берется вдоль ударной адиабаты (при заданных p_1, V_1) [3]).

Условия (90.12), (90.13) отвечают наличию у уравнения (90.10) комплексных корней, удовлетворяющих требованиям (90.11). Но в определенных условиях это уравнение может иметь также и

---

[1]) Все эти равенства берутся при $x=0$, и под перечисленными величинами в них могут подразумеваться постоянные амплитуды, без переменных экспоненциальных множителей.

[2]) Это исследование можно найти в оригинальной статье: *Дьяков С.П.* // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 288. В следующем параграфе будет приведено еще и менее строгое, но более наглядное обоснование условий (90.12), (90.13).

[3]) Отметим, что при выводе (90.12), (90.13) используется только обязательное условие (88.1), но не используется неравенство $p_2>p_1$. Поэтому эти условия неустойчивости относятся и к ударным волнам разрежения, которые могли бы существовать при $(\partial^2V/\partial p^2)_s<0$.

корни с вещественными ω и k_x, отвечающие «уходящим» от разрыва реальным незатухающим звуковым и энтропийным волнам, т.е. спонтанному излучению звука поверхностью разрыва. Мы будем говорить о такой ситуации как об особом виде неустойчивости ударной волны, хотя неустойчивости в буквальном смысле здесь нет, — раз созданное на поверхности разрыва возмущение (рябь) неограниченно долго продолжает излучать волны, не затухая и не усиливаясь при этом; энергия, уносимая излучаемыми волнами, черпается из всей движущейся среды [1]).

Для определения условий возникновения этого явления, преобразуем уравнение (90.10), введя угол θ между $\mathbf{k}$ и осью x; тогда

$$c_2k_x = \omega_0\cos\theta, \quad c_2k_y = \omega_0\sin\theta,$$
$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{v_2}{c_2}\cos\theta\right), \quad \omega_0^2 = c_2^2\left(k_x^2 + k_y^2\right) \tag{90.14}$$

(ω_0 — частота звука в системе координат, движущейся вместе с газом за ударной волной), и получаем квадратное относительно $\cos\theta$ уравнение:

$$\frac{v_2^2}{c_2^2}\left[\frac{4}{1+h} + \frac{v_1}{v_2} - 1\right]\cos^2\theta + \frac{2v_2}{c_2}\left[\frac{3+(v_2/c_2)^2}{1+h} - 1\right]\cos\theta + \\ + \frac{2[1+(v_2/c_2)^2]}{1+h} - \left(1 + \frac{v_1v_2}{c_2^2}\right) = 0. \tag{90.15}$$

Скорость распространения звуковой волны в движущемся со скоростью v_2 газе, по отношению к неподвижной поверхности разрыва, есть $v_2 + c_2\cos\theta$. Звуковая волна будет уходящей, если эта сумма положительна, т. е. если

$$-v_2/c_2 < \cos\theta < 1 \tag{90.16}$$

(значения $\cos\theta < 0$ отвечают случаям, когда вектор $\mathbf{k}$ направлен в сторону разрыва, но снос звуковой волны движущимся газом делает ее все же «уходящей»). Спонтанное излучение звука ударной волной возникает, если уравнение (90.15) имеет корень, лежащий в этих пределах. Простое исследование приводит к следующим неравенствам, определяющим область этой неустойчивости [2]):

$$\frac{1 - v_2^2/c_2^2 - v_1v_2/c_2^2}{1 - v_2^2/c_2^2 + v_1v_2/c_2^2} < j^2\frac{dV_2}{dp_2} < 1 + 2\frac{v_2}{c_2} \tag{90.17}$$

(нижний и верхний пределы здесь фактически отвечают нижнему и верхнему пределам в условиях (90.16)). Область (90.17) примыкает к области неустойчивости (90.13), расширяя ее.

---

[1]) Сравните с аналогичной ситуацией для тангенциальных разрывов — задача 2 § 84.

[2]) Эта неустойчивость тоже была указана *С.П. Дьяковым* (1954); правильное значение нижней границы в (90.17) найдено *В.М. Конторовичем* (1957).

К происхождению неустойчивости ударных волн в области (90.17) можно подойти также и с несколько иной точки зрения, рассмотрев отражение от поверхности разрыва звука, падающего на нее со стороны сжатого газа. Поскольку ударная волна движется относительно газа впереди нее со сверхзвуковой скоростью, то в этот газ звук не проникает. В газе же позади волны будем иметь, наряду с падающей звуковой волной, еще и отраженную звуковую и энтропийно-вихревую волны (а на самой поверхности разрыва возникает рябь). Задача об определении коэффициента отражения по своей постановке близка к задаче об исследовании устойчивости. Разница состоит в том, что наряду с подлежащими определению амплитудами исходящих от разрыва (отраженных) волн в граничных условиях фигурирует еще и заданная амплитуда приходящей (падающей) звуковой волны. Вместо системы однородных алгебраических уравнений мы будем иметь теперь систему неоднородных уравнений, в которых роль неоднородности играют члены с амплитудой падающей волны. Решение этой системы дается выражениями, в знаменателях которых стоит определитель однородных уравнений, — как раз тот, приравнивание которого нулю дает дисперсионное уравнение спонтанных возмущений (90.10). Тот факт, что в области (90.17) это уравнение имеет вещественные корни для $\cos\theta$, означает, что существуют определенные значения угла отражения (и тем самым угла падения), при которых коэффициент отражения становится бесконечным. Это — другая формулировка возможности спонтанного излучения звука, т. е. излучения без падающей извне звуковой волны.

То же самое относится и к коэффициенту прохождения звука, падающего на поверхность разрыва спереди, навстречу ей. В этом случае не существует отраженной волны, а позади поверхности разрыва возникают прошедшие звуковая и энтропийно-вихревая волны. В области (90.17) возможно обращение коэффициента прохождения в бесконечность [1]).

Скажем несколько слов о некоторых возможных, в принципе, типах ударных адиабат, содержащих области рассмотренных неустойчивостей [2]).

---

[1]) Вычисление коэффициентов отражения и прохождения звука на ударной волне при произвольных направлениях падения в произвольных средах см.: *Дьяков С.П.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 948, 962; *Конторович В.М.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 1527; Акустический журнал. 1959. Т. 5. С. 314.

[2]) В политропном газе $h = -(c_1/v_1)^2$, в чем легко убедиться с помощью полученных в § 89 формул. Ни одно из условий (90.12), (90.13) и (90.17) при этом заведомо не выполняется, так что ударная волна устойчива. Устойчивы, конечно, также и ударные волны слабой интенсивности в произвольной среде.

Условие (90.12) требует отрицательной производной dp_2/dV_2, причем ударная адиабата должна быть наклонена (к оси абсцисс) в точке *2* менее круто, чем проведенная в нее хорда *12* (т. е. обратно тому, что имеет место в обычных случаях — рис. 53). Для этого адиабата должна перегнуться, как показано на рис. 60; условие неустойчивости (90.12) выполняется на участке ab.

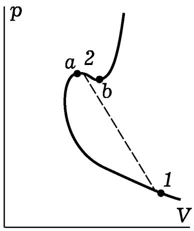


Рис. 60

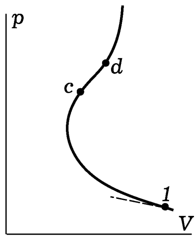


Рис. 61

Условие (90.13) требует положительности производной dp_2/dV_2, причем наклон адиабаты должен быть достаточно мал. На рис. 60 это условие выполняется на определенных отрезках адиабаты, непосредственно примыкающих к точкам a и b и расширяющих, таким образом, область неустойчивости. Условие (90.13) может оказаться выполненным и на участке (cd на рис. 61) адиабаты, не содержащей участка типа ab.

Условие (90.17) еще менее жестко, чем (90.13) и еще дополнительно расширяет область неустойчивости на адиабатах Гюгонио с $dp_2/dV_2 > 0$. Более того, нижний предел в (90.17) может быть отрицательным, так что неустойчивость этого типа может, в принципе, иметь место и в некоторых участках адиабат обычного вида, со всюду отрицательной производной dp_2/dV_2.

Вопрос о судьбе гофрировочно-неустойчивых ударных волн тесно связан со следующим замечательным обстоятельством: при выполнении условий (90.12) или (90.13) решение гидродинамических уравнений оказывается неоднозначным (*C.S. Gardner*, 1963). Для двух состояний среды, *1* и *2*, связанных друг с другом соотношениями (85.1)–(85.3), ударная волна является обычно единственным решением задачи (одномерной) о течении, переводящем среду из состояния *1* в *2*. Оказывается, что если в состоянии *2* выполнены условия (90.12) или (90.13), то решение указанной гидродинамической задачи не однозначно: переход из состояния *1* в *2* может быть осуществлен не только в ударной волне, но и через более сложную систему волн. Это второе решение (его можно назвать распадным) состоит из ударной волны меньшей интенсивности, следующего за ней контактного разрыва и из изэнтропической нестационарной волны разрежения

(см. ниже § 99), распространяющейся (относительно газа позади ударной волны) в противоположном направлении; в ударной волне энтропия увеличивается от s_1 до некоторого значения $s_3 < s_2$, а дальнейшее увеличение от s_3 до заданного s_2 происходит скачком в контактном разрыве (эта картина относится к типу, изображенному ниже на рис. 78 *б*; предполагается выполненным неравенство (86.2)) [1]).

Вопрос о том, чем определяется отбор одного из двух решений в конкретных гидродинамических задачах, не ясен. Если отбирается распадное решение, то это означало бы, что неустойчивость ударной волны с самопроизвольным усилением поверхностной ряби вообще не осуществляется. По-видимому, однако, такой отбор не может быть связан именно с этой неустойчивостью, поскольку неоднозначность решения не ограничена условиями (90.12), (90.13) [2]).

Задачи

1. На ударную волну падает сзади (со стороны сжатого газа) нормально к ней плоская звуковая волна. Определить коэффициент отражения звука.

Решение. Рассматриваем процесс в системе координат, в которой ударная волна покоится, а газ движется через нее в положительном направлении оси x; падающая звуковая волна распространяется в отрицательном направлении оси x. При нормальном падении (а потому и отражении) в отраженной энтропийной волне скорость $\delta\mathbf{v}^{(\text{энт})} = 0$. Возмущение давления: $\delta p = \delta p^{(\text{зв})} + \delta p^{(0)}$, где индекс (0) относится к падающей, а индекс (зв) — к отраженной звуковым волнам. Для скорости $\delta v_x \equiv \delta v$ имеем

$$\delta v = \frac{V_2}{c_2}\left(\delta p^{(\text{зв})} - \delta p^{(0)}\right)$$

(разность вместо суммы возникает ввиду противоположных направлений распространения обеих волн). Второе из граничных условий (90.7) имеет прежний вид (но в нем теперь $\delta V = \delta V^{(0)} + \delta V^{(\text{зв})} + \delta V^{(\text{энт})}$); с учетом (90,8) и формулы (85.6) переписываем его как

$$\delta v = -\frac{1-h}{2j}\left(\delta p^{(\text{зв})} + \delta p^{(0)}\right).$$

Приравняв друг другу оба выражения δv, получим для искомого отношения амплитуд давления в отраженной и падающей звуковых волнах:

$$\frac{\delta p^{(\text{зв})}}{\delta p^{(0)}} = -\frac{1-2\mathrm{M}_2-h}{1+2\mathrm{M}_2-h} \tag{1}$$

[1]) В статье *Gardner C.S.* // Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 1366 это показано для области (90.13). Более общее рассмотрение, включающее и область (90.12), дано *Кузнецовым Н.М.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 470; там же рассмотрены ударные адиабаты с нарушением условия $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$, когда распадные решения складываются из других совокупностей волн.

[2]) По-видимому, область неоднозначности простирается на ударной адиабате несколько за пределы области неустойчивости, определяемой этими условиями. См. об этом указанную выше статью Н. М. Кузнецова.

(где $\mathrm{M}_2 = v_2/c_2$). Оно обращается в бесконечность на верхней границе области (90.17).

Для политропного газа $h = -\mathrm{M}_1^{-2}$. При слабой интенсивности ударной волны ($p_2 - p_1 \ll p_1$) отношение (1) стремится к нулю как $(p_2 - p_1)^2$, а в обратном случае большой интенсивности стремится к постоянному пределу

$$\frac{\delta p^{(\text{зв})}}{\delta p^{(0)}} \approx -\frac{\sqrt{\gamma} - \sqrt{2(\gamma - 1)}}{\sqrt{\gamma} + \sqrt{2(\gamma - 1)}}.$$

2. На ударную волну падает спереди, нормально к ней, плоская звуковая волна. Определить коэффициент прохождения звука [1]).

Р е ш е н и е. Возмущение в газе *1* перед ударной волной

$$\delta p_1 = \delta p^{(0)}, \quad \delta V_1 = \delta V^{(0)} = -\frac{V_1^2}{c_1^2}\delta p_1, \quad \delta v_1 = \frac{V_1}{c_1}\delta p_1,$$

а в газе *2* позади нее:

$$\delta p_2 = \delta p^{(\text{зв})}, \quad \delta V_2 = \delta V^{(\text{зв})} + \delta V^{(\text{энт})}, \quad \delta v_2 = \frac{V_2}{c_2}\delta p_2$$

(индексы (0), (зв), (энт) относятся к падающей звуковой и к прошедшим звуковой и энтропийным волнам). Возмущения δp_2 и δV_2 связаны друг с другом соотношением, следующим из уравнения ударной адиабаты: если последнее выражено в виде $V_2 = V_2(p_2;\, p_1,\, V_1)$, то

$$\delta V_2 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_H \delta p_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial V_1}\right)_H \delta V_1 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_1}\right)_H \delta p_1 = \\ = \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_H \delta p_2 + \left[-\frac{V_1^2}{c_1^2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial V_1}\right)_H + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_1}\right)_H\right]\delta p_1$$

(индекс H у производных указывает, что они берутся вдоль адиабаты Гюгонио [2])). Граничное условие (90.7) заменяется теперь на

$$\delta v_2 - \delta v_1 = -\frac{v_1 - v_2}{2}\left[\frac{\delta p_2 - \delta p_1}{p_2 - p_1} - \frac{\delta V_2 - \delta V_1}{V_1 - V_2}\right] = -\frac{1}{2j}[\delta p_2 - \delta p_1 - j^2(\delta V_2 - \delta V_1)].$$

Приравняв два выражения для $\delta v_2 - \delta v_1$, получим для искомого отношения амплитуд в прошедшей и падающей звуковых волнах:

$$\frac{\delta p^{(\text{зв})}}{\delta p^{(0)}} = -\frac{(1 + \mathrm{M}_1)^2 + q}{1 + 2\mathrm{M}_2 - h}, \tag{2}$$

где h имеет прежнее значение, а

$$q = j^2\left[-\frac{V_1^2}{c_1^2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial V_1}\right)_H + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_1}\right)_H\right].$$

Для политропного газа

$$q = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{(\mathrm{M}_1^2 - 1)^2}{\mathrm{M}_1^2}$$

[1]) Для политропного газа эта задача рассматривалась *Д.И. Блохинцевым* (1945) и *Бюргерсом* (*J.M. Burgers*, 1946).

[2]) Производная $(\partial V_2/\partial p_2)_H$ есть то, что мы обозначали выше просто как dV_2/dp_2, подразумевая, что производная берется при постоянных p_1, V_1.

и коэффициент прохождения:

$$\frac{\delta p^{(\text{зв})}}{\delta p^{(0)}} = \frac{(1+\mathrm{M}_1)^2}{1+2\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_1^{-2}}\left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(1-\frac{1}{\mathrm{M}_1}\right)^2\right].$$

При слабой интенсивности ударной волны отсюда получается

$$\frac{\delta p^{(\text{зв})}}{\delta p^{(0)}} \approx 1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_2-p_1}{p_1},$$

а в обратном случае большой интенсивности:

$$\frac{\delta p^{(\text{зв})}}{\delta p^{(0)}} \approx \frac{1}{\gamma+\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}\frac{p_2}{p_1}.$$

В обоих случаях амплитуда давления в прошедшей звуковой волне возрастает по сравнению с давлением в падающей волне.

§ 91. Распространение ударной волны по трубе

Рассмотрим распространение ударной волны по среде, заполняющей длинную трубку с переменным сечением. Наша цель состоит при этом в выяснении влияния, оказываемого изменением площади ударной волны на ее скорость (*G.B. Whitham*, 1958).

Будем считать, что площадь $S(x)$ сечения трубки лишь медленно меняется вдоль ее длины (ось x) — мало на расстояниях порядка ширины трубки. Это дает возможность применить приближение (его называют *гидравлическим*), которое уже было использовано в § 77: можно считать все величины в потоке постоянными вдоль каждого поперечного сечения трубки, а скорость — направленной вдоль ее оси; другими словами, течение рассматривается как квазиодномерное. Такое течение описывается уравнениями

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{91.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}-c^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+v\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)=0, \tag{91.2}$$

$$S\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v S)=0. \tag{91.3}$$

Первое из них — уравнение Эйлера, второе — уравнение адиабатичности, а третье — уравнение непрерывности, представленное в виде (77.1).

Для выяснения интересующего нас вопроса достаточно рассмотреть трубку, в которой изменение площади $S(x)$ не только медленно, но и по абсолютной величине остается относительно малым на протяжении всей длины. Тогда будут малы и связанные с непостоянством сечения возмущения потока, и уравнения (91.1)–(91.3) могут быть линеаризованы. Наконец, должны быть поставлены начальные условия, исключающие появление каких-

либо посторонних возмущений, которые могли бы повлиять на движение ударной волны; нас интересуют только возмущения, связанные с изменением $S(x)$. Эта цель будет достигнута, если принять, что ударная волна первоначально движется с постоянной скоростью по трубе постоянного сечения, и площадь сечения начинает меняться только вправо от некоторой точки (которую примем за $x = 0$).

Линеаризованные уравнения (91.1)–(91.3) имеют вид

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + v\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + v\frac{\partial \delta p}{\partial x} - c^2\left(\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \delta \rho}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\rho v}{S}\frac{\partial \delta S}{\partial x} = 0,$$

где буквы без индекса обозначают постоянные значения величин в однородном потоке в однородной части трубки, а символ δ обозначает изменение этих величин в трубке переменного сечения. Умножив первое и третье из этих уравнений соответственно на ρc и c^2 и сложив затем все три уравнения, напишем следующую их комбинацию:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v + c)\frac{\partial}{\partial x}\right](\delta p + \rho c \delta v) = -\frac{\rho v c^2}{S}\frac{\partial \delta S}{\partial x}. \qquad (91.4)$$

Общее решение этого уравнения дается суммой общего решения однородного уравнения и частного решения уравнения с правой частью. Первое есть $F(x - vt - ct)$, где F — произвольная функция; оно описывает звуковые возмущения, приходящие слева. Но в однородной области, при $x < 0$, возмущений нет; поэтому надо положить $F \equiv 0$. Таким образом, решение сводится к интегралу неоднородного уравнения:

$$\delta p + \rho c\, \delta v = -\frac{\rho v c^2}{v + c}\frac{\delta S}{S}. \qquad (91.5)$$

Ударная волна движется слева направо со скоростью $v_1 > c_1$ по неподвижной среде с заданными значениями p_1, ρ_1. Движение же среды позади ударной волны (среда *2*) определяется решением (91.5) во всей области трубки слева от точки, достигнутой разрывом к данному моменту времени. После прохождения волны все величины в каждом сечении трубки остаются постоянными во времени, т. е. равными тем значениям, которые они получили в момент прохождения разрыва: давление p_2, плотность ρ_2 и скорость $v_1 - v_2$ (в соответствии с принятыми в этой главе обозначениями, v_2 обозначает скорость газа относительно движущейся ударной волны; скорость же его относительно стенок трубки есть тогда $v_1 - v_2$). В этих обозначениях (и снова выделив переменные

части этих величин) равенство (91.5) запишем в виде

$$\frac{\delta S}{S} = -\frac{v_1 - v_2 + c_2}{\rho_2(v_1 - v_2)c_2^2}\{\delta p_2 + \rho_2 c_2(\delta v_1 - \delta v_2)\}. \tag{91.6}$$

Все величины δv_1, δv_2, δp_2 можно выразить через одну из них, например, δv_1. Для этого запишем варьированные соотношения (85.1), (85.2) на разрыве (при заданных p_1 и ρ_1):

$$\rho_1 \delta v_1 = v_2 \delta\rho_2 + \rho_2 \delta v_2, \quad 2j(\delta v_1 - \delta v_2) = \delta p_2 + v_2^2 \delta\rho_2$$

(где $j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ — невозмущенное значение потока); к ним надо еще присоединить соотношение

$$\delta p_2 = \frac{dp_2}{d\rho_2}\delta\rho_2,$$

где производная берется вдоль адиабаты Гюгонио. Вычисление приводит к следующему окончательному соотношению, связывающему изменение δv_1 скорости ударной волны относительно неподвижного газа перед ней, с изменением δS площади сечения трубки:

$$-\frac{1}{S}\frac{\delta S}{\delta v_1} = \frac{v_1 - v_2 + c_2}{v_1 c_2}\left[\frac{1 + 2v_2/c_2 - h}{1 + h}\right], \tag{91.7}$$

где снова введено обозначение

$$h = -\frac{j^2}{\rho_2^2}\frac{d\rho_2}{dp_2} = j^2\frac{dV_2}{dp_2}. \tag{91.8}$$

Коэффициент при квадратной скобке в (91.7) положителен. Поэтому знак отношения $\delta v_1/\delta S$ определяется знаком выражения в этой скобке. Для всех устойчивых ударных волн этот знак положителен, так что $\delta v_1/\delta S < 0$. Но при выполнении какого-либо из условий (90.12), (90.13) гофрировочной неустойчивости выражение в скобках становится отрицательным, так что $\delta v_1/\delta S > 0$.

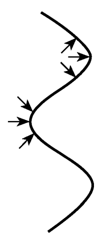


Рис. 62

Этот результат дает возможность наглядного истолкования происхождения неустойчивости. На рис. 62 изображена «гофрированная» поверхность ударной волны, перемещающаяся направо; стрелками схематически показано направление линий тока. При перемещении ударной волны на выдавшихся вперед участках поверхности площадь δS растет, а на отставших участках — уменьшается. При $\delta v_1/\delta S < 0$ это приводит к замедлению выступивших участков и ускорению отставших, так что поверхность стремится сгладиться. Напротив, при $\delta v_1/\delta S > 0$ возмущение формы поверхности будет усиливаться: выступающие участки будут уходить все дальше, а отставшие — все более отставать [1]).

[1]) Выражение (91.7) для произвольной (не политропной) среды и его связь с условиями гофрировочной неустойчивости ударных волн указаны *С.Г. Сугаком, В.Е. Фортовым, А.Л. Ни* (1981).

§ 92. Косая ударная волна

Рассмотрим стационарную ударную волну, отказавшись при этом от подразумевавшегося везде выше выбора системы координат, в которой скорость газа направлена перпендикулярно к данному элементу поверхности волны. Линии тока могут пересекать поверхность такой ударной волны наклонно, причем пересечение сопровождается преломлением линий тока. Касательная составляющая скорости газа не меняется при прохождении через ударную волну, а нормальная составляющая согласно (87.4) падает:

$$v_{1t} = v_{2t}, \quad v_{1n} > v_{2n}.$$

Поэтому ясно, что при прохождении через ударную волну линии тока приближаются к ней (как это показано на рис. 63). Таким образом, преломление линий тока на ударной волне происходит всегда в определенном направлении.

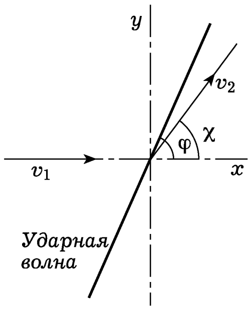


Рис. 63

Выберем направление скорости $\mathbf{v}_1$ газа перед ударной волной в качестве оси x, и пусть φ — угол между поверхностью разрыва и осью x (рис. 63). Возможные значения угла φ ограничены лишь условием, чтобы нормальная составляющая скорости $\mathbf{v}_1$ превышала скорость звука c_1. Поскольку $v_{1n} = v \sin\varphi$, то отсюда следует, что φ может иметь произвольные значения в интервале между $\pi/2$ и углом Маха α:

$$\alpha_1 < \varphi < \pi/2, \quad \sin\alpha_1 = c_1/v_1 \equiv 1/\mathrm{M}_1.$$

Движение позади ударной волны может быть как до-, так и сверхзвуковым (меньше скорости звука c_2 должна быть лишь нормальная компонента скорости); движение же перед ударной волной — непременно сверхзвуковое. Если движение газа по обе стороны от ударной волны является сверхзвуковым, то все возмущения могут распространяться вдоль ее поверхности лишь в ту сторону, куда направлена касательная к ней составляющая скорости газа. В этом смысле можно говорить о «направлении» ударной волны и различать по отношению к какому-либо месту «исходящие» из него и «приходящие» волны (подобно тому как мы это уже делали для характеристик, вокруг которых движение всегда является сверхзвуковым; см. § 82). Если же движение позади ударной волны является дозвуковым, то понятие о ее направлении теряет, строго говоря, смысл, так как возмущения могут распространяться вдоль ее поверхности во все стороны.

Выведем соотношение, связывающее друг с другом две компоненты скорости газа после его прохождения через косую ударную волну; при этом будем предполагать газ политропным.

Непрерывность касательной к волне составляющей скорости означает, что $v_1 \cos\varphi = v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi$, или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y}}. \tag{92.1}$$

Далее, воспользуемся формулой (89.6); в этой формуле v_1 и v_2 обозначают нормальные к плоскости ударной волны составляющие скорости и должны быть теперь заменены на $v_1 \sin\varphi$ и $v_{2x}\sin\varphi - v_{2y}\cos\varphi$, так что имеем

$$\frac{v_{2x}\sin\varphi - v_{2y}\cos\varphi}{v_1\sin\varphi} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2c_1^2}{(\gamma+1)v_1^2\sin^2\varphi}. \tag{92.2}$$

Из двух написанных соотношений можно исключить угол φ. После простых преобразований получим следующую формулу, определяющую связь между v_{2x} и v_{2y} (при заданных v_1 и c_1):

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{\dfrac{2}{\gamma+1}\left(v_1 - \dfrac{c_1^2}{v_1}\right) - (v_1 - v_{2x})}{v_1 - v_{2x} + \dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{c_1^2}{v_1}}. \tag{92.3}$$

Этой формуле можно придать более изящный вид, если ввести в нее критическую скорость. Согласно уравнению Бернулли и определению критической скорости имеем

$$w_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma-1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_*^2$$

(ср. задачу 1 § 89), откуда

$$c_*^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}v_1^2 + \frac{2}{\gamma+1}c_1^2. \tag{92.4}$$

Введя эту величину в (92.3), получим

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_*^2}{\dfrac{2}{\gamma+1}v_1^2 - v_1 v_{2x} + c_*^2}. \tag{92.5}$$

Уравнение (92.5) называют уравнением *ударной поляры* (*A. Busemann*, 1931). На рис. 64 изображен график этой зависимости; это есть кривая третьего порядка (так называемая строфоида или декартов лист). Она пересекает ось абсцисс в точках P и Q (рис. 64), соответствующих значениям $v_{2x} = c_*^2/v_1$ и $v_{2x} = v_1$ [1]).

[1]) От точки Q, являющейся двойной точкой кривой, строфоида в действительности продолжается еще в виде двух уходящих к бесконечным $|v_{2y}|$ ветвей (не изображенных на рис. 64) с общей вертикальной асимптотой

$$v_{2x} = c_*^2/v_1 + 2v_1/(\gamma+1)$$

Однако точки этих ветвей не имеют физическою смысла: они дали бы для v_{2x}, v_{2y} значения, при которых $v_{2n}/v_{1n} > 1$, что невозможно.

Проведя из начала координат луч (OB на рис. 64) под углом χ к оси абсцисс по длине его отрезка до точки пересечения с кривой ударной поляры, мы определяем скорость газа за скачком, поворачивающим поток на угол χ. Таких точек пересечения имеется две (A и B), т. е. заданному значению χ отвечают две различные ударные волны. Направление ударной волны тоже может быть сразу определено графически по этой же диаграмме — оно определяется перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, проведенную из точки Q соответственно через точку B или A (на рис. 64 изображен угол φ для волны, соответствующей точке B).

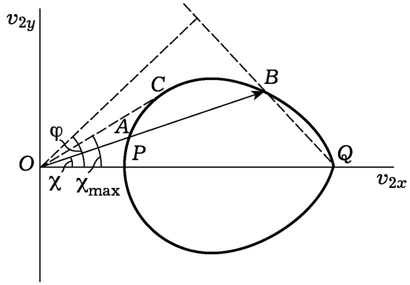


Рис. 64

При уменьшении χ точка A приближается к точке P, отвечающей прямому ($\varphi = \pi/2$) скачку с $v_2 = c_*^2/v_1$. Точка же B приближается при этом к точке Q, причем интенсивность ударной волны (скачок скорости в ней) стремится к нулю; в пределе, в самой точке Q, угол φ равен, как и следовало, углу Маха α_1 (угол наклона касательной к поляре к оси абсцисс в этой точке равен $\pi/2 + \alpha_1$).

Из диаграммы ударной поляры сразу можно вывести важное заключение, что угол отклонения χ потока в ударной волне не может превышать некоторого максимального значения $\chi_{\max}$, соответствующего лучу, проведенному из точки O касательно к кривой. $\chi_{\max}$ является, конечно, функцией числа $\mathrm{M}_1 = v_1/c_1$; мы не приводим ее здесь ввиду ее громоздкости. При $\mathrm{M}_1 = 1$ имеем $\chi_{\max} = 0$, а при возрастании M_1 угол $\chi_{\max}$ монотонно растет и при $\mathrm{M}_1 \to \infty$ стремится к конечному пределу. Легко рассмотреть оба предельных случая. Если скорость v_1 близка к c_*, то вместе с ней близка к c_* и скорость v_2, а угол χ мал; уравнение ударной поляры (92.5) можно тогда приближенно переписать в виде [1])

$$\chi^2 = \frac{\gamma+1}{2c_*^3}(v_1 - v_2)^2(v_1 + v_2 - 2c_*) \qquad (92.6)$$

(ввиду малости угла χ здесь положено $v_{2x} \approx v_2$, $v_{2y} \approx c_*\chi$. Отсюда элементарным путем найдем [2])

$$\chi_{\max} = \frac{4\sqrt{\gamma+1}}{3^{3/2}}\left(\frac{v_1}{c_*} - 1\right)^{3/2} = \frac{2^{7/2}}{3^{3/2}(\gamma+1)}(\mathrm{M}_1 - 1)^{3/2}. \qquad (92.7)$$

[1]) Можно легко убедиться в том, что уравнение (92.6) будет справедливым и для любого (не политропного) газа, если только заменить в нем величину $(\gamma+1)/2$ на параметр α_*, определенный согласно (102.2).

[2]) Отметим, что эта зависимость $\chi_{\max}$ от $\mathrm{M}_1 - 1$ находится в согласии с общим законом подобия (126.7) для околозвуковых течений.

В обратном предельном случае, при $M_1 \to \infty$, ударная поляра вырождается в окружность

$$v_{2y}^2 = \left(v_1 - v_{2x}\right)\left(v_{2x} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}v_1\right).$$

Легко видеть, что при этом

$$\chi_{\max} = \arcsin\,(1/\gamma). \tag{92.8}$$

На рис. 65 изображен график зависимости $\chi_{\max}$ от M_1 для воздуха ($\gamma = 1{,}4$); горизонтальная штриховая линия показывает предельное значение $\chi_{\max}(\infty) = 45{,}6^\circ$ (верхняя кривая на рисунке — аналогичный график для обтекания конуса; см. § 113).

Окружность $v_2 = c_*$ пересекает ось абсцисс между точками P и Q (рис. 64) и поэтому делит ударную поляру на две части, соответствующие до- и сверхзвуковым скоростям газа позади разрыва. Точка пересечения окружности $v_2 = c_*$ с полярой лежит правее точки C, но очень близко к ней; поэтому весь участок PC соответствует переходам к дозвуковым скоростям, а участок CQ (за исключением лишь очень небольшого участка вблизи точки C) — переходам к сверхзвуковым скоростям.

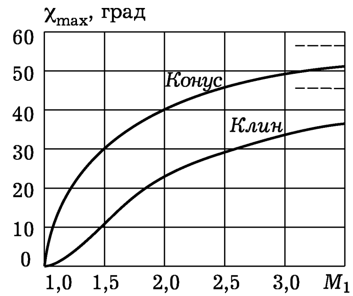


Рис. 65

Изменения давления и плотности в косой ударной волне зависят только от нормальных к ней компонент скорости. Поэтому отношения p_2/p_1 и ρ_2/ρ_1 при заданных M_1 и φ получаются из формул (89.6), (89.7) просто путем замены в них M_1 на $M_1 \sin\varphi$:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 \sin^2\varphi - 1\right), \tag{92.9}$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{2\left(M_1^2 \sin^2\varphi - 1\right)}{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2\varphi + 2}. \tag{92.10}$$

Эти отношения монотонно возрастают при увеличении угла φ от значения $\varphi = \alpha_1$ (когда $p_2/p_1 = \rho_2/\rho_1 = 1$) до $\pi/2$, т. е. по мере перемещения по ударной поляре от точки Q к точке P.

Приведем еще, для справок, формулу, выражающую угол поворота χ скорости через число M_1 и угол φ:

$$\operatorname{ctg}\chi = \operatorname{tg}\varphi\left[\frac{(\gamma-1)M_1^2}{2\left(M_1^2\sin^2\varphi - 1\right)} - 1\right], \tag{92.11}$$

и формулу, определяющую число $M_2 = v_2/c_2$ по M_1 и φ:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 \sin^2\varphi - (\gamma-1)} + \frac{2M_1^2\cos^2\varphi}{2 + (\gamma-1)M_1^2\sin^2\varphi} \tag{92.12}$$

(при $\varphi = \pi/2$ последнее выражение переходит в (89.9)).

Две ударные волны, определяемые ударной полярой для заданного угла поворота скорости, называют волнами *слабого* и *сильного* семейства. Ударная волна сильного семейства (участок PC поляры) обладает большей интенсивностью (бо́льшим отношением p_2/p_1), образует больший угол φ с направлением скорости $\mathbf{v}_1$ и превращает течение из сверх- в дозвуковое. Волна же слабого семейства (участок QC поляры) обладает меньшей интенсивностью, наклонена к потоку под меньшим углом и почти всегда оставляет течение сверхзвуковым.

Для иллюстрации на рис. 66 изображены зависимости угла χ отклонения скорости от угла φ наклона поверхности разрыва для воздуха ($\gamma = 1{,}4$) при нескольких различных значениях числа M_1, в том числе для предела $\mathrm{M}_1 \to \infty$. Ветви кривых, изображенные сплошными линиями, отвечают ударным волнам слабого

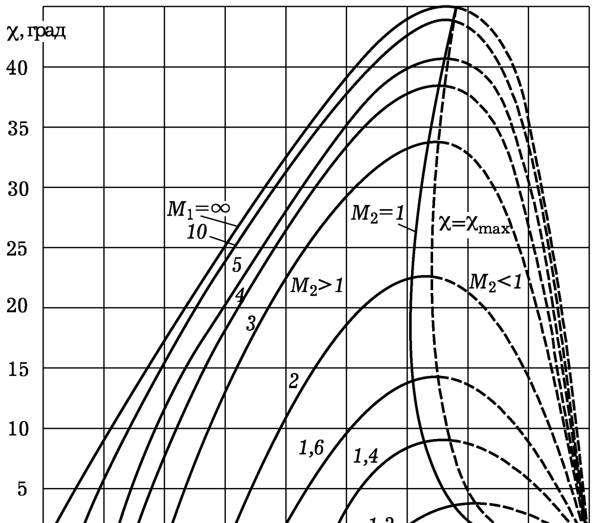


Рис. 66

семейства, а изображенные штрихами — ударным волнам сильного семейства. Штриховая линия $\chi = \chi_{\max}$ — геометрическое место точек максимального (при каждом заданном M_1) угла отклонения, а сплошная линия $\mathrm{M}_2 = 1$ разделяет области сверх- и дозвукового течения позади разрыва; узкая область между этими двумя линиями отвечает ударным волнам слабого семейства, превращающим, однако, течение из сверх- в дозвуковое. Разность значений угла φ на линиях $\chi = \chi_{\max}$ и $\mathrm{M}_2 = 1$ (при

заданном M_1) нигде не превышает 4,5°; разность же между $\chi_{\max}$ и значением $\chi = \chi_{зв}$ на линии $M_2 = 1$ (тоже при заданном M_1) не превышает 0,5° [1]).

§ 93. Ширина ударных волн

Мы говорили до сих пор об ударных волнах как о геометрических поверхностях, не обладающих толщиной. Рассмотрим теперь вопрос о структуре реальных физических поверхностей разрыва. Мы увидим, что ударные волны с небольшими скачками величин представляют собой в действительности переходные слои конечной толщины, уменьшающейся при увеличении величины скачков. Если же скачки величин в ударной волне не малы, то, действительно, разрыв происходит настолько резко, что в макроскопической теории не имеет смысла говорить о его толщине.

Для определения структуры и толщины переходного слоя надо учесть вязкость и теплопроводность газа, влиянием которых мы до сих пор пренебрегали.

Соотношения (85.1)–(85.3) на ударной волне были получены из условий постоянства потоков вещества, импульса и энергии. Если рассматривать поверхность разрыва как слой конечной толщины, то эти условия надо писать не в виде равенства соответствующих величин по обе стороны разрыва, а в виде их постоянства вдоль всей толщины разрывного слоя. Первое из этих условий (85.1) не меняется:

$$\rho v \equiv j = \mathrm{const}. \tag{93.1}$$

В двух же других условиях надо учесть дополнительные потоки импульса и энергии, обусловленные внутренним трением и теплопроводностью.

Плотность потока импульса (вдоль оси x), обусловленного внутренним трением, определяется компонентой $-\sigma'_{xx}$ вязкого тензора напряжений; согласно общему выражению (15.3) для этого тензора имеем

$$\sigma'_{xx} = \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\frac{dv}{dx}.$$

Условие (85.2) приобретает теперь вид [2])

$$p + \rho v^2 - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\frac{dv}{dx} = \mathrm{const}.$$

---

[1]) Подробные графики и диаграммы, относящиеся к ударной поляре (для $\gamma = 1{,}4$) можно найти в кн.: *Липман Г.В., Рошко А.* Элементы газовой динамики. — М.: ИЛ, 1960. [*Liepmann H.W., Roshko A.* Elements of gas dynamics. — N. Y.: J. Wiley, 1957]; *Oswatitsch K.* Gas dynamics. — N. Y.: Academic Press, 1956.

[2]) Положительное направление оси x совпадает с направлением движения газа через неподвижную ударную волну. Если перейти к системе отсчета, в которой неподвижен газ перед ударной волной, то сама ударная волна будет двигаться в отрицательном направлении оси x.

Как и в § 85, введем вместо скорости v удельный объем V согласно $v = jV$. Постоянную же в правой части равенства выразим через предельные значения величин на большом расстоянии впереди ударной волны (сторона *1*). Тогда написанное условие примет вид

$$p - p_1 + j^2(V - V_1) - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)j\frac{dV}{dx} = 0. \qquad (93.2)$$

Далее, плотность потока энергии, обусловленного теплопроводностью, есть $-\varkappa\partial T/\partial x$. Поток же энергии, связанный с внутренним трением, есть

$$-\sigma'_{xi}v_i = -\sigma'_{xx}v = -\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)v\frac{dv}{dx}.$$

Таким образом, условие (85.3) напишется в виде

$$\rho v\left(w + \frac{v^2}{2}\right) - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)v\frac{dv}{dx} - \varkappa\frac{dT}{dx} = \text{const},$$

или, снова введя $v = jV$ и выразив const через величины с индексом 1:

$$w - w_1 + \frac{j^2}{2}(V^2 - V_1^2) - j\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)V\frac{dV}{dx} - \frac{\varkappa}{j}\frac{dT}{dx} = 0. \qquad (93.3)$$

Мы будем рассматривать здесь ударные волны, в которых все величины испытывают лишь малый скачок. Тогда и все разности $V - V_1$, $p - p_1$ и т. п. между значениями величин внутри переходного слоя и вне его тоже малы. Из получающихся ниже соотношений видно, что $1/\delta$ (где δ — ширина разрыва) есть величина первого порядка малости по $p_2 - p_1$. Поэтому дифференцирование по x увеличивает порядок малости на единицу (так, производная dp/dx — величина второго порядка).

Умножим уравнение (93.2) на $(V + V_1)/2$ и вычтем его из уравнения (93.3). Тогда получим

$$(w - w_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)(V + V_1) = \frac{\varkappa}{j}\frac{dT}{dx} \qquad (93.4)$$

(здесь опущен член, содержащий $(V - V_1)dV/dx$, являющийся малой величиной третьего порядка). Разложим выражение в левой части (93.4) по степеням $p - p_1$ и $s - s_1$, выбрав давление и энтропию в качестве основных независимых переменных. Члены первого и второго порядка по $p - p_1$ в этом разложении выпадают (ср. вычисления при выводе формулы (86.1)) и, опустив члены более высокого порядка, получим просто $T(s - s_1)$. Производную же dT/dx пишем в виде

$$\frac{dT}{dx} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p\frac{ds}{dx}.$$

Член с производной ds/dx можно опустить как малую величину третьего порядка (см. ниже), и в результате находим формулу, выражающую функцию $s(x)$ через функцию $p(x)$:

$$T(s - s_1) = \frac{\varkappa}{j}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{93.5}$$

Обратим внимание на то, что разность $s - s_1$ внутри переходного слоя оказывается величиной второго порядка малости, между тем как полный скачок $s_2 - s_1$ является (как было показано в § 86) величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления $p_2 - p_1$. Это связано с тем, что (как будет показано ниже) давление $p(x)$ меняется в переходном слое монотонно от одного предельного значения p_1 до другого p_2; энтропия же $s(x)$, определяясь производной dp/dx, проходит через максимум, достигая наибольшего значения внутри переходного слоя.

Уравнение, определяющее функцию $p(x)$, можно было бы получить путем аналогичного разложения уравнений (93.2), (93.3) и их комбинирования друг с другом. Мы, однако, изберем другой, более поучительный способ, позволяющий более ясно понять происхождение различных членов в уравнении.

В § 79 было показано, что монохроматическое слабое возмущение состояния газа (звуковая волна) затухает по мере своего распространения с декрементом, пропорциональным квадрату частоты: $\gamma = a\omega^2$; положительный коэффициент a выражается через коэффициенты вязкости и теплопроводности согласно формуле (79.6). Там же было показано, что это затухание может быть описано (для произвольной плоской звуковой волны) введением дополнительного члена в линеаризованное уравнение движения — см. (79.9). Заменив в этом уравнении вторую производную по времени второй производной по координате и изменив знак перед производной $\partial p'/\partial x$ (что отвечает распространению волны в отрицательном направлении оси x [1])), запишем его в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - c\frac{\partial p'}{\partial x} = ac^3\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \tag{93.6}$$

где p' — переменная часть давления.

Для учета слабой нелинейности надо ввести в это уравнение член вида $p'\partial p'/\partial x$:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - c\frac{\partial p'}{\partial x} - \alpha_p p'\frac{\partial p'}{\partial x} = ac^3\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}. \tag{93.7}$$

[1]) Этот выбор направления распространения связан с замечанием, сделанным в примеч. на с. 487

Коэффициент α_p в нелинейном члене определяется путем соответствующего разложения гидродинамических уравнений идеальной (без диссипации) жидкости и оказывается равным

$$\alpha_p = \frac{c^3}{2V^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s \tag{93.8}$$

(см. задачу) [1].

Уравнение (93.7) описывает распространение возмущений в слабо диссипирующей, слабо нелинейной среде. В применении к слабой ударной волне оно описывает ее распространение в системе отсчета, в которой невозмущенный газ (перед волной) неподвижен. Требуется найти решение со стационарным (не зависящим от времени) профилем, в котором вдали от волны, при $x \to \pm\infty$, давление принимает заданные значения p_2 и p_1; разность $p_2 - p_1$ есть скачок давления в разрыве [2].

Волна со стационарным профилем описывается решением вида

$$p'(x,\, t) = p'(x + v_1 t), \tag{93.9}$$

где v_1 — скорость распространения такой волны. Подстановка в (93.7) приводит к уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left[(v_1 - c)p' - \frac{\alpha_p}{2}p'^2 - ac^3\frac{dp'}{d\xi}\right] = 0, \quad \xi = x + v_1 t,$$

первый интеграл которого:

$$ac^3\frac{dp'}{d\xi} = -\frac{\alpha_p}{2}p'^2 + (v_1 - c))p' + \text{const}. \tag{93.10}$$

Квадратный трехчлен в правой части равенства должен обращаться в нуль при значениях p', отвечающих предельным условиям на бесконечностях, где производная $dp'/d\xi$ обращается в

[1]) Введя новую неизвестную функцию $u = -p'\alpha_p$, новую (вместо x) независимую переменную $\zeta = x + ct$ и обозначив $\mu = ac^3$, приведем уравнение (93.7) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial \zeta} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \tag{93.7a}$$

в котором его называют *уравнением Бюргерса* (*J.M. Burgers*, 1940).

[2]) Мы увидим в дальнейшем (§ 102), что в отсутствие диссипации эффекты нелинейности приводят к искажению профиля волны по мере ее распространения — постепенному возрастанию крутизны фронта волны. В свою очередь, это возрастание приводит к усилению диссипативных эффектов, стремящихся уменьшить крутизну профиля (т. е. уменьшить градиенты меняющихся величин). Именно взаимная компенсация этих противоположных тенденций приводит к возможности распространения волн со стационарным профилем в нелинейной диссипативной среде.

нуль. Эти значения равны $p_2 - p_1$ и 0, если условиться отсчитывать p' от невозмущенного давления p_1 перед волной. Это значит, что указанный трехчлен может быть представлен в виде

$$-\frac{\alpha_p}{2}[p' - (p_2 - p_1)]p',$$

причем константа v_1 выражается через p_1 и p_2 согласно

$$v_1 = c + \frac{\alpha_p}{2}(p_2 - p_1). \tag{93.11}$$

Для самого же давления p уравнение (93.10) принимает вид

$$ac^3\frac{dp}{d\xi} = -\frac{\alpha_p}{2}(p - p_1)(p - p_2).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее требуемым условиям есть

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2}\operatorname{th}\frac{(p_2 - p_1)(x + v_1 t)}{4ac^3/\alpha_p}.$$

Этим решается поставленная задача. Возвратившись снова к системе отсчета, в которой ударная волна покоится, напишем формулу, определяющую ход изменения давления в ней в виде

$$p - \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{p_2 - p_1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{\delta}, \tag{93.12}$$

где

$$\delta = \frac{8aV^2}{(p_2 - p_1)(\partial^2 V/\partial p^2)_s}. \tag{93.13}$$

Практически все изменение давления от p_1 до p_2 происходит на расстоянии $\sim\delta$ — ширине ударной волны. Мы видим, что ширина волны уменьшается с увеличением ее интенсивности — скачка давления $p_2 - p_1$ [1]).

Для хода изменения энтропии внутри разрыва имеем из (93.5) и (93.12):

$$s - s_1 = \frac{\varkappa}{16caVT}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s(p_2 - p_1)^2\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x/\delta)}. \tag{93.14}$$

Отсюда видно, что энтропия меняется не монотонно, а имеет максимум внутри ударной волны (при $x = 0$). При $x = \pm\infty$ эта формула дает одинаковые значения $s = s_1$: это связано с тем, что

[1]) Для ударной волны, распространяющейся в смеси, определенный вклад в ее ширину возникает также и от процессов диффузии в переходном слое. Вычисление этого вклада см. *Дьяков С.П.* // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 283.

Упомянем также, что ударные волны слабой интенсивности остаются устойчивыми по отношению к поперечной модуляции (ср. примеч. на с. 475) и при учете их диссипативной структуры; см. *Спектор М.Д.* // Письма ЖЭТФ. 1983. Т. 35. С. 181.

полное изменение энтропии $s_2 - s_1$ является величиной третьего порядка по $p_2 - p_1$ (ср. (86.1)), в то время как $s - s_1$ — второго.

Формула (93.12) применима количественно только при достаточно малых разностях $p_2 - p_1$. Однако качественно мы можем применить формулу (93.13) для определения порядка величины ширины ударной волны и в тех случаях, когда разность $p_2 - p_1$ — порядка величины самих давлений p_1, p_2. Скорость звука в газе — порядка величины тепловой скорости v молекул. Кинематическая же вязкость, как известно из кинетической теории газов, $\nu \sim lv \sim lc$, где l — длина свободного пробега молекул. Поэтому $a \sim l/c^2$ (оценка члена с теплопроводностью дает то же самое). Наконец, $(\partial^2 V/\partial p^2)_s \sim V/p^2$ и $pV \sim c^2$. Внося эти выражения в (93.13), получаем

$$\delta \sim l. \tag{93.15}$$

Таким образом, ширина ударных волн большой интенсивности оказывается порядка величины длины свободного пробега молекул газа [1]. Но в макроскопической газодинамике, трактующей газ как сплошную среду, длина свободного пробега должна рассматриваться как равная нулю. Поэтому, строго говоря, чисто газодинамические методы непригодны для исследования внутренней структуры ударных волн большой интенсивности.

Задачи

1. Определить коэффициент нелинейности α_p в уравнении (93.7) для распространения звуковых волн в газе.

Решение. Точные гидродинамические уравнения одномерного движения идеального (без диссипации) газа:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho v = 0. \tag{1}$$

Произведем их разложение с учетом членов второго порядка малости. Для этого полагаем

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \frac{p'}{c^2} + \frac{p'^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s. \tag{2}$$

Члены второго порядка в уравнениях можно упростить, приведя их всех к одинаковому виду — содержащему произведение $p'\partial p'/\partial x$. Для этого замечаем, что для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x (со скоростью c) дифференцирование по t эквивалентно дифференцированию по x/c; при этом $v = -p'/(c\rho_0)$. После всех этих замен получим из (1) и (2) следующие уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p'}{\partial t} = c\rho\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s p'\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{4}$$

[1]) Сильная ударная волна сопровождается значительным увеличением температуры; под l надо понимать длину пробега, соответствующую некоторой средней температуре газа в волне.

(индекс 0 у постоянных равновесных значений величин опускаем); здесь использовано также равенство

$$\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial p^2}\right)_s = \frac{2}{\rho c^4} - \rho^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s \tag{5}$$

($V = 1/\rho$ — удельный объем). Дифференцируя уравнения (3) и (5) соответственно по x и по t и вычтя одно из другого, получим

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)p' = c^2\rho^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s \frac{\partial}{\partial x}\left(p'\frac{\partial p'}{\partial x}\right).$$

С той же точностью заменим в левой части этого уравнения $\partial/\partial x + \partial/c\partial t$ на $2\partial/\partial x$. Наконец, вычеркнув в обеих частях уравнения дифференцирование по x и сравнив получившееся уравнение с (93.7), найдем для α_p значение (93.8).

Уравнение для скорости v можно получить непосредственно из (93.7), не повторяя заново вычислений, подобных произведенным выше. Действительно, сумма членов первого порядка в левой части (93.7) содержит оператор $\partial/\partial t - c\partial/\partial x$, который надо рассматривать как малый член первого порядка: он обращает в нуль функцию $p'(x,\, t)$ в ее линейном приближении. Поэтому мы получим уравнение для функции $v(x,\, t)$ в требуемом приближении, заменив в (93.7) p' согласно линейному соотношению $p' = -\rho c v$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_v v\frac{\partial v}{\partial x} = ac^3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_v = \frac{c^4}{2V^3}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s.$$

Величина α_v безразмерна; для политропного газа $\alpha_v = (\gamma+1)/2$.

2. Путем нелинейной подстановки привести уравнение Бюргерса (93.7а) к виду линейного уравнения теплопроводности (*E. Hopf*, 1950).

Р е ш е н и е. Подстановкой

$$u(\zeta,\, t) = -2\mu\frac{\partial}{\partial\zeta}\ln\varphi(\zeta,\, t) \tag{1}$$

уравнение (93.7а) приводится к виду

$$2\mu\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{\varphi}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)\right] = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} = \varphi\frac{df(t)}{dt}, \tag{2}$$

где через df/dt обозначена произвольная функция t. Переобозначением $\varphi \to \varphi e^f$ (не меняющим искомой функции $u(\zeta,\, t)$ это уравнение преобразуется к требуемому виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}. \tag{3}$$

Решение этого уравнения с начальным условием $\varphi(\zeta,\, 0) = \varphi_0(\zeta)$ дается формулой (51.3):

$$\varphi(\zeta,\, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi\mu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(\zeta')\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta')^2}{4\mu t}\right]d\zeta'. \tag{4}$$

Начальная же функция $\varphi_0(\zeta)$ связана с начальным значением искомой функции $u(\zeta, t)$ равенством

$$\ln \varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\mu} \int_0^\zeta u_0(\zeta)\, d\zeta \tag{5}$$

(выбор нижнего предела в интеграле произволен).

§ 94. Ударные волны в релаксирующей среде

К значительному расширению ударной волны может привести наличие в газе сравнительно медленно протекающих релаксационных процессов — медленно протекающие химические реакции, замедленная передача энергии между различными степенями свободы молекулы и т. п. (*Я.Б. Зельдович*, 1946) [1].

Пусть τ — порядок величины времени релаксации. Как начальное, так и конечное состояния газа должны быть полностью равновесными; поэтому прежде всего ясно, что полная ширина ударной волны будет порядка величины τv_1 — расстояния, проходимого газом в течение времени τ. Кроме того, оказывается, что если интенсивность волны превышает определенный предел, то структура волны усложняется, в чем можно убедиться следующим образом.

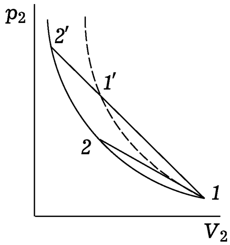


Рис. 67

На рис. 67 сплошной линией изображена ударная адиабата, проведенная через заданную начальную точку *1*, в предположении полной равновесности конечных состояний газа; наклон касательной к этой кривой в точке *1* определяется «равновесной» скоростью звука, которую мы обозначали в § 81 через c_0. Штриховой же кривой изображена ударная адиабата, проведенная через ту же точку *1*, в предположении, что релаксационные процессы «заморожены» и не происходят вовсе; наклон касательной к этой кривой в точке *1* определяется значением скорости звука, которое было обозначено в § 81 как c_∞.

Если скорость ударной волны такова, что $c_0 < v_1 < c_\infty$, то хорда *12* расположена так, как указано на рис. 67 нижним отрезком. В этом случае мы получим простое расширение ударной волны, причем все промежуточные состояния между начальным состоянием *1* и конечным *2* изображаются в плоскости pV точ-

[1]) Так, в двухатомных газах при температурах позади ударной волны порядка 1000–3000 К медленным релаксационным процессом является возбуждение внутримолекулярных колебаний. При более высоких температурах роль такого процесса переходит к термической диссоциации молекул на составляющие их атомы.

ками на отрезке *12*. Это следует из того, что (при пренебрежении обычными вязкостью и теплопроводностью) все последовательно проходимые газом состояния удовлетворяют уравнениям сохранения вещества $\rho v = j = \text{const}$ и сохранения импульса $p + j^2 V = \text{const}$ (ср. подробнее аналогичные соображения в § 129).

Если же $v_1 > c_\infty$, то хорда занимает положение *11′2′*. Все точки, лежащие на ее отрезке между точками *1* и *1′*, вообще не соответствуют каким-либо реальным состояниям газа; первой (после *1*) реальной точкой является точка *1′*, отвечающая состоянию с вовсе несмещенным относительно состояния *1* релаксационным равновесием. Сжатие газа от состояния *1* до состояния *1′* совершается скачком, вслед за чем уже происходит (на расстояниях $\sim v_1\tau$) постепенное сжатие до конечного состояния *2′*.

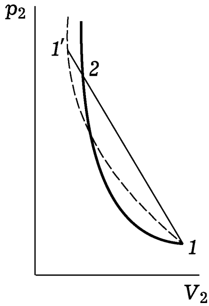


Рис. 68

Если равновесная и неравновесная ударные адиабаты пересекаются (рис. 68), появляется возможность существования ударных волн еще одного типа: если скорость волны такова, что хорда *12* пересекает адиабаты выше точки их взаимного пересечения (как на рис. 68), то релаксация будет сопровождаться понижением давления — от значения, отвечающего точке *1′* до значения, отвечающего точке *2* (*С.П. Дьяков*, 1954) [1]).

§ 95. Изотермический скачок

Рассматривая в § 93 строение ударной волны, мы по существу предполагали, что коэффициенты вязкости и температуропроводности — величины одного порядка, как это обычно и бывает. Возможен, однако, и случай, когда $\chi \gg \nu$. Именно, если температура вещества достаточно высока, то в теплопроводности будет участвовать добавочный механизм — лучистая теплопроводность, осуществляемая находящимся в равновесии с веществом тепловым излучением. На вязкости же (т. е. на переносе импульса) наличие излучения сказывается в несравненно меньшей степени, в результате чего ν и может оказаться малым по сравнению с χ. Мы увидим сейчас, что наличие такого неравенства приводит к весьма существенному изменению структуры ударной волны.

[1]) Такой случай мог бы, в принципе, иметь место в диссоциирующем многоатомном газе, если в равновесном состоянии за ударной волной достигается достаточно полная диссоциация его молекул на меньшие части. Диссоциация увеличивает значение отношения теплоемкостей γ, и тем самым уменьшает предельное сжатие в ударной волне, если только она уже настолько полна, что нагревание газа не требует заметной затраты энергии на продолжение диссоциации.

Пренебрегая членами, содержащими вязкость, напишем уравнения (93.2) и (93.3), определяющие структуру переходного слоя, в виде

$$p + j^2V = p_1 + j^2V_1, \tag{95.1}$$

$$\frac{\varkappa}{j}\frac{dT}{dx} = w + \frac{j^2V^2}{2} - w_1 - \frac{j^2V_1^2}{2}. \tag{95.2}$$

Правая часть второго из этих уравнений обращается в нуль лишь на границе слоя. Поскольку температура позади ударной волны должна быть выше, чем впереди нее, то отсюда следует, что на протяжении всей ширины переходного слоя

$$\frac{dT}{dx} > 0, \tag{95.3}$$

т. е. температура возрастает монотонно.

Все величины в слое являются функцией одной переменной — координаты x, а потому и определенными функциями друг от друга. Продифференцировав соотношение (95.1) по V, получим

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \frac{dT}{dV} + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T + j^2 = 0.$$

Производная $(\partial p/\partial T)_V$ у газов всегда положительна. Поэтому знак производной dT/dV определяется знаком суммы $(\partial p/\partial V)_T + j^2$. В состоянии *1* имеем $j^2 > (\partial p_1/\partial V_1)_s$ (так как $v_1 > c_1$), а поскольку адиабатическая сжимаемость всегда меньше изотермической, то во всяком случае и

$$j^2 > -\left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1}\right)_T.$$

Следовательно, на стороне *1* производная

$$\frac{dT_1}{dV_1} < 0.$$

Если эта производная отрицательна и на всем протяжении ширины переходного слоя, то по мере сжатия вещества (уменьшения V) при переходе со стороны *1* на сторону *2* температура будет монотонно возрастать в согласии с неравенством (95.3). Другими словами, мы будем иметь дело с ударной волной, сильно расширенной благодаря большой теплопроводности (расширение может оказаться столь большим, что самое представление об ударной волне станет условным).

Другая ситуация возникает, если

$$j^2 < -\left(\frac{\partial p_2}{\partial V_2}\right)_T \tag{95.4}$$

(это неравенство отвечает достаточно большой интенсивности ударной волны — см. ниже (95.7)). Тогда в состоянии *2* будем иметь $dT_2/dV_2 > 0$, так что где-то между значениями $V = V_1$ и

$V = V_2$ функция $T(V)$ будет иметь максимум (рис. 69). Ясно, что переход от состояния *1* к состоянию *2* с непрерывным изменением V станет невозможным, так как при этом неизбежно нарушилось бы неравенство (95.3).

В результате мы получим следующую картину перехода от начального состояния *1* к конечному состоянию *2*. Сначала идет область, в которой происходит постепенное сжатие вещества от удельного объема V_1 до объема V' (значение V, при котором впервые становится $T(V') = T_2$; см. рис. 69); ширина этой области, определяющаяся теплопроводностью, может быть весьма значительной. Сжатие же от V' до V_2 происходит затем скачком при постоянной (равной T_2) температуре. Этот разрыв можно назвать *изотермическим скачком.*

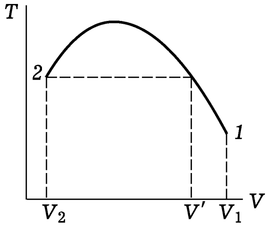


Рис. 69

Определим изменения давления и плотности в изотермическом скачке, предполагая газ идеальным. Условие непрерывности потока импульса (95.1), примененное к обеим сторонам скачка, дает

$$p' + j^2 V' = p_2 + j^2 V_2.$$

Для термодинамически идеального газа пишем $V = RT/(\mu p)$ и, имея в виду, что $T' = T_2$, получим

$$p' + \frac{j^2 RT_2}{\mu p'} = p_2 + \frac{j^2 RT_2}{\mu p_2}.$$

Это квадратное уравнение для p' имеет (помимо тривиального корня $p' = p_2$) решение

$$p' = \frac{j^2 RT_2}{\mu p_2} = j^2 V_2. \qquad (95.5)$$

Выражаем j^2 согласно формуле (85.6):

$$p' = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} V_2,$$

после чего, подставив сюда V_2/V_1 из (89.1), получим для политропного газа

$$p' = \frac{1}{2}[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2]. \qquad (95.6)$$

Поскольку должно быть $p_2 > p'$, то мы находим, что изотермический скачок возникает лишь при отношениях давлений p_2 и p_1, удовлетворяющих условию

$$\frac{p_2}{p_1} > \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} \qquad (95.7)$$

(*Rayleigh*, 1910). Это условие можно, конечно, получить и непосредственно из (95.4).

Поскольку при данной температуре плотность газа пропорциональна давлению, то отношение плотностей в изотермическом скачке равно отношению давлений:

$$\frac{\rho'}{\rho_2} = \frac{V_2}{V'} = \frac{p'}{p_2} \tag{95.8}$$

и стремится при увеличении p_2 к значению $(\gamma - 1)/2$.

§ 96. Слабые разрывы

Наряду с поверхностями разрывов, на которых испытывают скачок величины ρ, p, $\mathbf{v}$ и т. п., могут существовать также и такие поверхности, на которых эти величины как функции координат обладают какими-либо особенностями, оставаясь сами непрерывными. Эти особенности могут быть самого разнообразного характера. Так, на поверхности разрыва могут испытывать скачок первые производные по координатам от величин ρ, p, $\mathbf{v}$, ... или же эти производные могут обращаться в бесконечность. Наконец, то же самое может иметь место для производных не первого, а более высоких порядков. Все такие поверхности мы будем называть *поверхностями слабого разрыва* в противоположность сильным разрывам (ударным волнам и тангенциальным разрывам), в которых испытывают скачок сами указанные величины. Отметим, что ввиду непрерывности самих этих величин на поверхности слабого разрыва, непрерывны также и их тангенциальные производные; разрыв непрерывности испытывают лишь нормальные к поверхности производные.

Легко убедиться простыми рассуждениями, что поверхности слабого разрыва распространяются относительно газа (по обе стороны поверхности) со скоростью, равной скорости звука. Действительно, поскольку функции ρ, p, $\mathbf{v}$, ... сами не испытывают скачка, то их можно сгладить, заменив функциями, совпадающими с ними везде, кроме окрестности поверхности разрыва, а в этой окрестности отличающимися лишь на сколь угодно малые величины, но так, что сглаженные функции не имеют уже никаких особенностей. Истинное распределение, скажем, давления, можно, таким образом, представить в виде наложения совершенно плавного распределения p_0 без всяких особенностей и очень малого нарушения p' этого распределения вблизи поверхности разрыва. Последнее же, как и всякое малое возмущение, распространяется относительно газа со скоростью звука.

Подчеркнем, что в случае ударной волны сглаженные функции отличались бы от истинных на величины, вообще говоря, отнюдь не малые, и предыдущие рассуждения поэтому неприменимы. Однако если скачок величин в ударной волне достаточно мал, то эти рассуждения вновь делаются применимыми, и такие

разрывы тоже должны распространяться со скоростью звука, — этот результат был уже получен в § 86 другим способом.

Если движение стационарно относительно данной системы координат, то поверхность разрыва неподвижна относительно этой системы, а газ протекает через нее. При этом нормальная к поверхности разрыва компонента скорости газа должна быть равна скорости звука. Если обозначить буквой α угол между направлением скорости газа и касательной плоскостью к поверхности, то должно быть $v_n = v \sin\alpha = c$, или

$$\sin\alpha = c/v,$$

т. е. поверхность слабого разрыва пересекает линию тока под углом Маха. Другими словами, поверхность слабого разрыва совпадает с одной из характеристических поверхностей, — результат вполне естественный, если иметь в виду физический смысл последних как поверхностей, вдоль которых распространяются малые возмущения (§ 82). Ясно, что при стационарном движении газа слабые разрывы могут появиться только при скоростях, равных или превышающих скорость звука.

В отношении способов возникновения слабые разрывы существенно отличаются от сильных. Мы увидим, что ударные волны могут образовываться сами по себе, непосредственно в результате движения газа, при непрерывных граничных условиях (например, образование ударных волн в звуковой волне; § 102). В противоположность им слабые разрывы не могут возникать сами по себе; их появление всегда связано с какими-либо особенностями в граничных или начальных условиях движения. Особенности эти могут быть, как и сами слабые разрывы, самого различного характера. Так, причиной образования слабого разрыва может являться наличие углов на поверхности обтекаемого тела; на возникающем в этом случае слабом разрыве испытывают скачок первые производные скорости по координатам. К образованию слабого разрыва приводит также и скачок кривизны поверхности тела без угла на ней (причем испытывают разрыв вторые производные скорости по координатам) и т. п. Наконец, всякая особенность в изменении движения со временем влечет за собой возникновение нестационарного слабого разрыва.

Касательная к поверхности слабого разрыва компонента скорости протекающего через нее газа направлена всегда по направлению от того места (например, угла на поверхности тела), откуда исходят возмущения, вызывающие возникновение этого разрыва; мы будем говорить, что разрыв «исходит» из этого места. Это есть одно из проявлений направленности распространения возмущений вниз по течению в сверхзвуковом потоке.

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к возникновению ширины у слабого разрыва, так что слабые разрывы, как и сильные, представляют собой в действительности некото-

рые переходные слои. Однако в отличие от ударных волн, ширина которых зависит только от их интенсивности и постоянна во времени, ширина слабого разрыва растет со временем, начиная с момента образования разрыва. Закон, по которому происходит это возрастание, легко найти (качественно) исходя из аналогии между перемещением слабого разрыва и распространением малых звуковых возмущений. При наличии вязкости и теплопроводности возмущение, сконцентрированное первоначально в малом элементе объема (волновой пакет), по мере своего перемещения с течением времени расширяется; закон этого расширения был определен в § 79. Из него можно сразу заключить, что ширина δ слабого разрыва

$$\delta \sim (ac^3 t)^{1/2}, \tag{96.1}$$

где t — время, прошедшее с момента его возникновения, а a — коэффициент при квадрате частоты в формуле (79.6) для поглощения звука. Если мы имеем дело со стационарной картиной, в которой разрыв покоится, то вместо времени t надо говорить о расстоянии l от места, из которого исходит разрыв (например, для слабого разрыва, возникающего от угла на поверхности обтекаемого тела, l есть расстояние от вершины угла); тогда $\delta \sim \sim (ac^2 t)^{1/2}$ [1]).

В заключение этого параграфа необходимо сделать замечание, аналогичное замечанию в конце § 82. Там было отмечено, что среди различных возмущений состояния движущегося газа исключительными по своим свойствам являются возмущения энтропии (при постоянном давлении) и ротора скорости. Эти возмущения покоятся относительно газа, а не распространяются со скоростью звука. Поэтому поверхности, на которых испытывают какой-либо слабый разрыв непрерывности энтропия и ротор скорости [2]), покоятся относительно газа, а относительно неподвижной системы координат переносятся вместе с самим газом. Такие разрывы мы будем называть *тангенциальными слабыми разрывами*; они проходят через линии тока и в этом отношении вполне аналогичны «сильным» тангенциальным разрывам.

---

[1]) Подчеркнем, однако, что для количественного определения структуры слабого разрыва аналогия со звуком была бы недостаточна. Дело в том, что при определении закона затухания звука его амплитуду можно предполагать сколь угодно малой и соответственно этому исходить из линеаризованных уравнений движения. Для слабых же разрывов (как и для ударных волн слабой интенсивности — § 93) должна учитываться нелинейность уравнений, поскольку без нее отсутствовали бы и самые разрывы. Пример такого исследования дан в задаче 6 к § 99.

[2]) Слабый разрыв ротора скорости означает слабый разрыв касательной к поверхности компоненты скорости. Например, могут испытывать скачок взятые по направлению к нормали к поверхности производные от тангенциальной скорости.

Г Л А В А X

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

§ 97. Истечение газа через сопло

Рассмотрим стационарное вытекание газа из большого сосуда через трубку переменного сечения, или, как говорят, через *сопло*. Мы будем предполагать, что движение газа можно считать в каждом месте трубы однородным по ее сечению, а скорость — направленной практически вдоль оси трубы. Для этого труба должна быть не слишком широка, и площадь S ее сечения должна достаточно медленно меняться вдоль ее длины. Таким образом, все величины, характеризующие течение, будут функциями только от координаты вдоль оси трубы. При этих условиях можно применять полученные в § 83 соотношения, имеющие место вдоль линии тока, непосредственно к изменению величин вдоль длины трубы.

Количество (масса) газа, проходящего в единицу времени через поперечное сечение трубы, или, как говорят, расход газа, равно $Q = \rho v S$; эта величина должна, очевидно, оставаться постоянной вдоль всей трубы:

$$Q = \rho v S = \text{const}. \tag{97.1}$$

Линейные размеры самого сосуда предполагаются очень большими по сравнению с диаметром трубы. Поэтому скорость газа в сосуде можно считать равной нулю, и соответственно этому все величины с индексом нуль в формулах § 83 будут представлять собой значения соответствующих величин внутри сосуда.

Мы видели, что плотность потока $j = \rho v$ не может превышать некоторого предельного значения j_*. Ясно поэтому, что и возможные значения полного расхода газа Q будут иметь (для данной трубы и при заданном состоянии газа внутри сосуда) верхнюю границу $Q_{\max}$, которую легко определить. Если бы значение j_* плотности потока было достигнуто не в самом узком месте трубы, то в сечениях с меньшим S было бы $j > j_*$, что невозможно. Поэтому значение $j = j_*$ может быть достигнуто только в самом узком месте трубы, площадь сечения которого обозначим через $S_{\min}$. Таким образом, верхняя граница полного расхода газа есть

$$Q_{\max} = \rho_* v_* S_{\min} = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} S_{\min}. \tag{97.2}$$

Рассмотрим сначала сопло, монотонно суживающееся по направлению к своему внешнему концу, так что минимальная площадь сечения достигается на этом конце (рис. 70). В силу (97.1) плотность потока j монотонно возрастает вдоль трубы. То же самое касается скорости газа v, а давление соответственно монотонно падает. Наибольшее возможное значение j будет достигнуто, если скорость v достигает значения c как раз на выходном конце трубы, т. е. если будет $v_1 = c_1 = v_*$ (буквы с индексом 1 обозначают значения величин на выходном конце трубы). Одновременно будет и $p = p_*$.

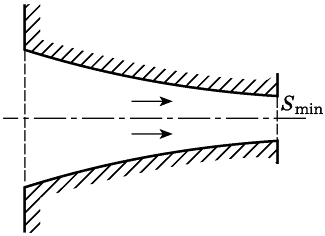


Рис. 70

Проследим за изменением режима вытекания газа при уменьшении давления p_e внешней среды, в которую газ выпускается. При уменьшении внешнего давления от значения, равного давлению p_0 в сосуде, и вплоть до значения p_* одновременно с ним падает также и давление p_1 в выходном сечении трубы, причем оба эти давления (p_1 и p_e) остаются равными друг другу; другими словами, все падение давления от p_0 до внешнего происходит внутри сопла. Выходная же скорость v_1 и полный расход газа $Q = j_1 S_{\min}$ монотонно возрастают. При $p_e = p_*$ выходная скорость делается равной местному значению скорости звука, а расход газа — значению $Q_{\max}$. При дальнейшем понижении внешнего давления выходное давление перестает падать и остается все время равным p_*; падение же давления от p_* до p_e происходит уже вне трубы, в окружающем пространстве. Другими словами, ни при каком внешнем давлении падение давления газа в трубе не может быть бóльшим, чем от p_0 до p_*; так, для воздуха ($p_* = 0{,}53\,p_0$) максимальное падение давления составляет $0{,}47\,p_0$. Выходная скорость и расход газа тоже остаются (при $p_e < p_*$) постоянными. Таким образом, при истечении через суживающееся сопло газ не может приобрести сверхзвуковой скорости.

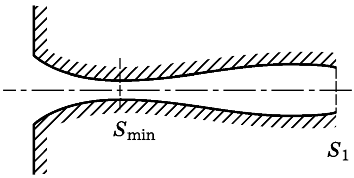


Рис. 71

Невозможность достижения сверхзвуковых скоростей при выпускании газа через суживающееся сопло связана с тем, что скорость, равная местной скорости звука, может достигаться только на самом выходном конце такой трубы. Ясно, что сверхзвуковая скорость сможет быть достигнута с помощью сопла сначала суживающегося, а затем вновь расширяющегося (рис. 71). Такие сопла называются *соплами Лаваля.*

Максимальная плотность потока j_*, если и достигается, то опять-таки только в наиболее узком сечении, так что и в таком

сопле расход газа не может превышать значения $S_{\min}j_*$. В суживающейся части сопла плотность потока возрастает (а давление падает); на кривой рис. 72, изображающей зависимость j от p [1]), это соответствует передвижению от точки c по направлению к b. Если в сечении $S_{\min}$ достигается максимальный поток (точка b на рис. 72), то в расширяющейся части сопла давление будет продолжать падать и начнет падать также и j соответственно перемещению по кривой рис. 72 от точки b по направлению к a. На выходном конце трубы поток j приобретает тогда вполне определенное значение, равное

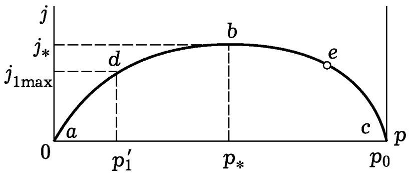


Рис. 72

$$j_{1\ \max} = j_* \frac{S_{\min}}{S_1},$$

а давление — соответствующее этому потоку значение, обозначенное на рис. 72 символом p_1' (некоторая точка d на кривой). Если же в сечении $S_{\min}$ достигается лишь некоторая точка e, то в расширяющейся части сопла давление будет возрастать соответственно обратному перемещению по кривой вниз от точки e. На первый взгляд могло бы показаться, что с ветви cb кривой можно перейти на ветвь ab скачком, минуя точку b, посредством образования ударной волны; однако это невозможно, так как «втекающий» в ударную волну газ не может иметь дозвуковой скорости.

Имея в виду все эти замечания, проследим теперь за изменением режима вытекания по мере постепенного увеличения внешнего давления p_e. При малых давлениях, начиная от нуля и до значения $p_e = p_1'$, устанавливается режим, при котором в сечении $S_{\min}$ достигается давление p_* и скорость $v_* = c_*$. В расширяющейся части сопла скорость продолжает расти, так что осуществляется сверхзвуковое течение газа, а давление продолжает соответственно падать, достигая на выходном конце значения p_1' вне зависимости от величины p_e. Падение давления от p_1' до p_e происходит вне сопла, в отходящей от края его отверстия волне разрежения (как это будет описано в § 112).

Когда p_e начинает превышать значение p_1', появляется отходящая от края отверстия сопла косая ударная волна, сжимающая газ от выходного давления p_1' до давления p_e (§ 112). Мы увидим, однако, что стационарная ударная волна может отхо-

[1]) Согласно формулам (83.15)–(83.17) уравнение этой зависимости:

$$j = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_0 \rho_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2}.$$

дить от твердой поверхности лишь постольку, поскольку она не обладает слишком большой интенсивностью (§ 111). Поэтому при дальнейшем повышении внешнего давления ударная волна скоро начинает передвигаться внутрь сопла, причем перед ней, на внутренней поверхности сопла, возникает отрыв. При некотором значении p_e ударная волна достигает наиболее узкого сечения сопла и затем исчезает; течение становится всюду дозвуковым с отрывом на стенках расширяющейся (диффузорной) части сопла. Все эти сложные явления имеют уже, разумеется, существенно трехмерный характер.

Задача

На малом участке длины трубы к стационарно текущему по ней газу подводится небольшое количество тепла. Определить изменение скорости газа при прохождении им этого участка. Газ предполагается политропным.

Решение. Пусть Sq есть подводимое в единицу времени количество тепла (S — площадь сечения трубы в данном ее участке). На обеих сторонах участка подогрева одинаковы плотности потока массы $j = \rho v$ и потока импульса $p + jv$; отсюда $\Delta p = -j\Delta v$, где Δ обозначает изменение величины при прохождении этого участка. Разность же плотностей потока энергий $(w + v^2/2)j$ равна q. Написав w в виде

$$w = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} = \frac{\gamma p v}{(\gamma-1)j},$$

получим (считая Δv и Δp малыми):

$$vj\Delta v + \frac{\gamma}{\gamma-1}(p\Delta v + v\Delta p) = q.$$

Исключая Δp из этих двух соотношений, найдем

$$\Delta v = \frac{(\gamma-1)q}{\rho(c^2 - v^2)}.$$

Мы видим, что при дозвуковом течении подвод тепла ускоряет поток ($\Delta v > 0$), а при сверхзвуковом — замедляет.

Написав температуру газа в виде $T = \mu p/R\rho = \mu p v/(Rj)$ (R — газовая постоянная), найдем для ее изменения выражение

$$\Delta T = \frac{\mu}{Rj}(v\Delta p + p\Delta v) = \frac{\mu(\gamma-1)q}{Rj(c^2 - v^2)}\left(\frac{c^2}{\gamma} - v^2\right).$$

При сверхзвуковом движении это выражение всегда положительно — температура газа повышается; при дозвуковом же движении оно может быть как положительным, так и отрицательным.

§ 98. Вязкое движение сжимаемого газа по трубе

Рассмотрим течение сжимаемого газа по трубе (постоянного сечения) настолько длинной, что нельзя пренебрегать трением газа о стенки, т. е. вязкостью газа. Стенки трубы мы будем предполагать теплоизолированными, так что никакого обмена теплом между газом и внешней средой не происходит.

При скоростях течения порядка или превышающих скорость звука (о которых только и идет здесь речь) течение газа по трубе является, конечно, турбулентным (если только радиус трубы не слишком мал). Турбулентность движения будет существенна здесь для нас только в одном отношении. Именно, мы видели в § 43, что при турбулентном течении скорость (средняя) практически постоянна почти по всему сечению трубы и быстро падает до нуля лишь на очень близких расстояниях от стенок. На этом основании мы будем считать скорость течения v просто постоянной по всему сечению трубы, определив ее так, чтобы произведение $\rho v S$ (S — площадь сечения) было равно полному расходу газа через сечение трубы.

Поскольку полный расход газа $\rho v S$ постоянен вдоль всей длины трубы, а S постоянно по предположению, то должна быть постоянной также и плотность потока газа

$$j = \rho v = \text{const}. \tag{98.1}$$

Далее, поскольку труба теплоизолирована, то вдоль нее должен быть постоянным также и полный поток энергии, переносимой газом через поперечное сечение трубы. Этот поток равен $\rho v S(w + v^2/2)$, и ввиду (98.1) можно написать:

$$w + \frac{v^2}{2} = w + \frac{j^2 V^2}{2} = \text{const}. \tag{98.2}$$

Что же касается энтропии газа s, то благодаря наличию внутреннего трения она, конечно, отнюдь не остается постоянной, а возрастает по мере движения газа вперед по трубе. Если x — координата вдоль оси трубы, причем положительное направление оси x совпадает с направлением течения, то

$$\frac{ds}{dx} > 0. \tag{98.3}$$

Продифференцируем теперь соотношение (98.2) по x. Помня, что $dw = T\,ds + V\,dp$, имеем

$$T\frac{ds}{dx} + V\frac{dp}{dx} + j^2 V\frac{dV}{dx} = 0.$$

Далее, подставляя сюда

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx}, \tag{98.4}$$

получаем

$$\left[T + j^2 V\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\right]\frac{dp}{dx} = -V\left[1 + j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right]\frac{dp}{dx}. \tag{98.5}$$

Согласно известной термодинамической формуле

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Коэффициент теплового расширения газов положителен. Поэтому в силу (98.3) заключаем, что положительно также и все выражение в левой части равенства (98.5). Знак же производной dp/dx совпадет, следовательно, со знаком выражения

$$-\left[1 + j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right] = \frac{v^2}{c^2} - 1.$$

Мы видим, что

$$\frac{dp}{dx} < 0 \quad \text{при} \quad v < c, \qquad \frac{dp}{dx} > 0 \quad \text{при} \quad v > c. \tag{98.6}$$

Таким образом, при дозвуковом течении давление падает вниз по течению (как и для несжимаемой жидкости). При сверхзвуковом же движении давление возрастает вдоль трубы.

Аналогичным образом можно установить знак производной dv/dx. Ввиду того, что $j = v/V = \text{const}$, знак dv/dx совпадает со знаком производной dV/dx. Последняя же может быть выражена через положительную производную ds/dx с помощью (98.4), (98.5). В результате найдем, что

$$\frac{dv}{dx} < 0 \quad \text{при} \quad v < c, \qquad \frac{dv}{dx} > 0 \quad \text{при} \quad v > c, \tag{98.7}$$

т. е. скорость возрастает вниз по течению при дозвуковом и падает при сверхзвуковом движении.

Любые две термодинамические величины текущего вдоль трубы газа являются функциями друг от друга, совершенно не зависящими, в частности, от закона сопротивления трубы. Эти функции зависят как от параметра от значения постоянной j и определяются уравнением $w + j^2V^2/2 = \text{const}$, получающимся путем исключения скорости из уравнений сохранения массы и энергии газа.

Выясним характер, который имеют кривые зависимости, например, энтропии от давления. Переписав (98.5) в виде

$$\frac{ds}{dp} = V\frac{v^2/c^2 - 1}{T + j^2V\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p},$$

мы видим, что в точке, где $v = c$, энтропия имеет экстремум. Легко видеть, что этот экстремум является максимумом. Действительно, для значения второй производной от s по p имеем в этой точке:

$$\left.\frac{d^2s}{dp^2}\right|_{v=c} = -V\frac{j^2V\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s}{T + j^2V\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p} < 0$$

(что связано с предполагающейся везде положительностью производной $(\partial^2V/\partial p^2)_s$).

Таким образом, кривые зависимости s от p имеют вид, изображенный на рис. 73. Справа от максимумов лежит область дозвуковых, а слева — сверхзвуковых скоростей. При увеличении параметра j мы переходим от более высоких к более низко расположенным кривым. Действительно, продифференцировав уравнение (98.2) по j при постоянном p, получим

$$\frac{ds}{dj} = -V\frac{jV^2}{T + j^2V\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p} < 0.$$

Из полученных результатов можно сделать интересный вывод. Пусть на входе трубы скорость газа меньше скорости звука. По направлению вниз по течению энтропия растет, а давление падает; это соответствует передвижению по правой ветви кривой $s = s(p)$ по направлению от B к O (рис. 73). Так может, однако, продолжаться лишь до тех пор, пока энтропия не достигнет своего максимального значения. Дальнейшее передвижение по кривой за точку O (т. е. в область сверхзвуковых скоростей) невозможно, так как оно соответствовало бы уменьшению энтропии газа по мере его течения по трубе. Переход с ветви BO на ветвь OA кривой не может произойти также и посредством возникновения ударной волны, так как скорость «втекающего» в ударную волну газа не может быть дозвуковой.

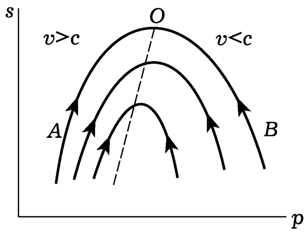


Рис. 73

Таким образом, мы приходим к выводу, что если на входе трубы скорость газа меньше скорости звука, то движение остается дозвуковым и на всем дальнейшем ее протяжении. Скорость, равная местной скорости звука, если и достигается вообще, то только на выходном конце трубы (при достаточно низком давлении во внешней среде, в которую выпускается газ).

Для того чтобы осуществить сверхзвуковое течение газа по трубе, необходимо впускать газ в трубу уже со сверхзвуковой скоростью. В связи с общими свойствами сверхзвукового движения (невозможностью распространения возмущений вверх по течению) дальнейшее течение газа будет происходить совершенно независимо от условий на выходе из трубы. В частности, будет происходить совершенно определенным образом возрастание энтропии вдоль длины трубы, и максимальное ее значение будет достигнуто на определенном расстоянии $x = l_k$ от входа. Если полная длина трубы $l < l_k$, то течение будет сверхзвуковым на всем ее протяжении (чему соответствует перемещение по ветви AO по направлению от A к O). Если же $l > l_k$, то течение не

может быть сверхзвуковым на всем протяжении трубы и в то же время не может перейти плавным образом в дозвуковое, так как передвигаться по ветви OB кривой можно лишь в направлении, указанном стрелкой. Поэтому в этом случае неизбежно возникновение ударной волны, переводящей движение скачком из сверх- в дозвуковое. При этом давление возрастает, мы переходим с ветви AO на ветвь BO, минуя точку O, и на всем остальном протяжении трубы течение будет дозвуковым.

§ 99. Одномерное автомодельное движение

Важную категорию одномерных нестационарных движений сжимаемого газа составляют течения, происходящие в условиях, характеризующихся какими-либо параметрами скорости, но не длины. Простейший пример такого движения представляет движение газа в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой, возникающее, когда поршень начинает двигаться с постоянной скоростью.

Наряду с параметром скорости такое течение определяется еще и параметрами, дающими, скажем, давление и плотность газа в начальный момент времени. Однако из всех этих параметров нельзя составить никаких комбинаций с размерностью длины или времени. Отсюда следует, что распределения всех величин могут зависеть от координаты x и времени t только в виде их отношения x/t, имеющего размерность скорости. Другими словами, эти распределения в различные моменты времени будут подобны друг другу, отличаясь лишь своим масштабом вдоль оси x, увеличивающимся пропорционально времени. Можно сказать, что если измерять длины в единицах, растущих пропорционально t, то картина движения вообще не будет меняться — движение автомодельно.

Уравнение сохранения энтропии для движения, зависящего только от одной координаты x, гласит:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Считая, что все величины зависят только от переменной $\xi = x/t$, и замечая, что при этом

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{d}{d\xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t}\frac{d}{d\xi},$$

будем иметь $(v_x - \xi)s' = 0$ (штрих означает здесь дифференцирование по ξ). Отсюда $s' = 0$, т. е. $s = \mathrm{const}$ [1]); таким образом,

[1]) Предположение же $v_x - \xi = 0$ противоречило бы остальным уравнениям движения: из (99.3) получилось бы $v_x = \mathrm{const}$, что не соответствовало бы сделанному предположению.

автомодельное одномерное движение не только адиабатично, но и изэнтропично. Аналогично из y- и z-компонент уравнения Эйлера

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

найдем, что v_y и v_z постоянны; не ограничивая общности, мы можем положить их в дальнейшем равными нулю.

Далее, уравнение непрерывности и x-компонента уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{99.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{99.2}$$

(здесь и ниже вместо v_x пишем v). После введения переменной ξ они примут вид

$$(v - \xi)\rho' + \rho v' = 0, \tag{99.3}$$

$$(v - \xi)v' = -\frac{p'}{\rho} = \frac{c^2}{\rho}\rho'. \tag{99.4}$$

(Имея в виду постоянство энтропии, пишем во втором уравнении $p' = (\partial p/\partial \rho)_s \rho' = c^2 \rho'$.)

Эти уравнения имеют, прежде всего, тривиальное решение $v = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ — однородный поток с постоянной скоростью. Для нахождения же нетривиального решения исключаем из уравнений ρ' и v' и получаем равенство $(v - \xi)^2 = c^2$, откуда $\xi = v \pm c$. Будем писать это соотношение со знаком плюс:

$$\frac{x}{t} = v + c \tag{99.5}$$

(выбор знака означает, что мы принимаем определенное условие для выбора положительного направления оси x, смысл которого выяснится ниже). Наконец, подставляя $v - \xi = -c$ в (99.3), получим $c\rho' = \rho v'$ или $c\,d\rho = \rho\,dv$. Скорость звука является функцией термодинамического состояния газа; выбрав в качестве основных термодинамических величин энтропию s и плотность ρ, мы можем представить скорость звука в виде функции плотности $c(\rho)$ при заданном постоянном значении энтропии. Подразумевая под c такую функцию, пишем на основании полученного равенства

$$v = \int \frac{c\,d\rho}{\rho} = \int \frac{dp}{c\rho}. \tag{99.6}$$

Эту формулу можно написать также и в виде

$$v = \int \sqrt{-dp\,dV}\,, \tag{99.7}$$

где не предрешается выбор независимого переменного.

Формулы (99.5), (99.6) определяют искомое решение уравнений движения. Если функция $c(\rho)$ известна, то по формуле (99.6) вычисляем скорость v как функцию плотности. Уравнение (99.5) определит тогда в неявном виде зависимость плотности от x/t, после чего определится зависимость также и всех остальных величин от x/t.

Выясним некоторые общие свойства полученного решения. Дифференцируя уравнение (99.5) по x, получаем

$$t\,\frac{\partial\rho}{\partial x}\,\frac{d(v+c)}{d\rho} = 1. \tag{99.8}$$

Для производной от $v + c$ имеем с помощью (99.6)

$$\frac{d(v+c)}{d\rho} = \frac{c}{\rho} + \frac{dc}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{d(\rho c)}{d\rho}.$$

Но

$$\rho c = \rho\sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}} = \frac{1}{\sqrt{-\partial V/\partial p}};$$

дифференцируя это выражение, получим

$$\frac{d(\rho c)}{d\rho} = c^2\frac{d(\rho c)}{dp} = \frac{\rho^3 c^5}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s. \tag{99.9}$$

Таким образом,

$$\frac{d(v+c)}{d\rho} = \frac{\rho^2 c^5}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0. \tag{99.10}$$

Из (99.8) следует поэтому, что при $t > 0$ будет $\dfrac{\partial\rho}{\partial x} > 0$. Замечая, что $\dfrac{\partial p}{\partial x} = c^2\dfrac{\partial\rho}{\partial x}$, заключаем, что и $\dfrac{\partial p}{\partial x} > 0$. Наконец, имеем $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{c}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}$, так что $\dfrac{\partial v}{\partial x} > 0$. Таким образом, имеем неравенства:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} > 0. \tag{99.11}$$

Смысл этих неравенств становится более ясным, если следить не за изменением величин вдоль оси x (при заданном t), а за их изменением с течением времени у данного передвигающегося в пространстве элемента газа. Эти изменения определяются полными производными по времени; так, для плотности имеем, воспользовавшись уравнением непрерывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Согласно третьему из неравенств (99.11) эта величина отрицательна; вместе с ней, разумеется, отрицательна и производная $\frac{dp}{dt}$:

$$\frac{d\rho}{dx} < 0, \quad \frac{dp}{dx} < 0. \tag{99.12}$$

Аналогичным образом (используя уравнение Эйлера (99.2)) можно убедиться, что $dv/dt < 0$; это, однако, не означает, что абсолютная величина скорости падает со временем, так как v может быть отрицательной.

Неравенства (99.12) показывают, что плотность и давление каждого элемента газа падают по мере его передвижения в пространстве. Другими словами, передвижение газа сопровождается его монотонным разрежением. Поэтому рассматриваемое движение можно назвать *нестационарной волной разрежения* [1]).

Волна разрежения может простираться лишь на конечное расстояние вдоль оси x; это видно уже из того, что формула (99.5) привела бы при $x \to \pm\infty$ к бессмысленному результату — бесконечной скорости.

Применим формулу (99.5) к плоскости, ограничивающей занимаемую волной разрежения область пространства. При этом x/t будет представлять собой скорость движения этой границы относительно выбранной неподвижной системы координат. Скорость же ее относительно самого газа есть разность $x/t - v$ и согласно (99.5) равна как раз местной скорости звука. Это значит, что границы волны разрежения представляют собой слабые разрывы. Картина автомодельного движения в различных конкретных случаях складывается, следовательно, из волн разрежения и областей постоянного течения, разделенных между собой поверхностями слабых разрывов (кроме того, конечно, могут иметься и различные области постоянного течения, разделенные между собой ударными волнами).

Сделанный нами выбор знака в формуле (99.5) соответствует, как теперь видно, тому, что эти слабые разрывы предполагаются движущимися относительно газа в положительном направлении оси x. Неравенства (99.11) связаны именно с таким выбором; неравенства же (99.12), разумеется, от выбора направления оси x вообще не зависят.

Обычно приходится иметь дело с такой постановкой конкретных задач, при которой волна разрежения с одной стороны граничит с областью неподвижного газа. Пусть эта область (I на

---

[1]) Это движение может возникнуть лишь в результате наличия некоторой особенности в начальных условиях (так, в примере с поршнем в момент $t = 0$ скачком меняется скорость поршня). Обратное движение могло бы происходить лишь под действием сжимающего поршня, движущегося по вполне определенному закону.

рис. 74) находится справа от волны разрежения. Область II есть волна разрежения, а III — газ, движущийся с постоянной скоростью; стрелками на рисунке показаны направления движения газа и перемещения ограничивающих волну разрежения слабых разрывов (разрыв a движется непременно в сторону покоящегося газа, а разрыв b может двигаться в обоих направлениях в зависимости от величины достигаемой в волне разрежения скорости; ср. задачу 2). Выпишем в явном виде соотношения между различными величинами в такой волне разрежения, предполагая газ политропным. При адиабатическом процессе $\rho T^{1/(1-\gamma)} = \text{const}$. Поскольку скорость звука пропорциональна $\sqrt{T}$, то можно написать это соотношение в виде

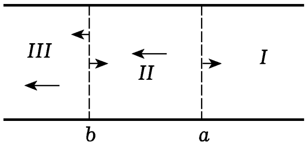


Рис. 74

$$\rho = \rho_0\left(\frac{c}{c_0}\right)^{2/(\gamma-1)}. \tag{99.13}$$

Подставляя это выражение в интеграл (99.6), получаем

$$v = \frac{2}{\gamma-1}\int dc = \frac{2}{1-\gamma}(c-c_0);$$

постоянная интегрирования выбрана так, что $c = c_0$ при $v = 0$ (индексом нуль отличаем значения величин в точке, в которой газ покоится). Будем выражать все величины через v, причем надо иметь в виду, что при условленном расположении областей скорость газа направлена в отрицательную сторону оси x, так что $v < 0$. Таким образом

$$c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2}|v|, \tag{99.14}$$

чем определяется местная скорость звука через скорость газа. Подставляя в (99.13), находим для плотности:

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{|v|}{c_0}\right)^{2/(\gamma-1)} \tag{99.15}$$

и аналогично для давления

$$p = p_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{|v|}{c_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \tag{99.16}$$

Наконец, подставляя (99.14) в формулу (99.5), получаем

$$|v| = \frac{2}{\gamma+1}\left(c_0 - \frac{x}{t}\right), \tag{99.17}$$

чем определяется зависимость v от x и t.

Величина c не может быть, по самому своему существу, отрицательной. Поэтому из формулы (99.14) можно сделать существенное заключение, что скорость должна удовлетворять неравенству

$$|v| \leqslant \frac{2c_0}{\gamma - 1}; \qquad (99.18)$$

при достижении скоростью этого предельного значения плотность газа (а также p и c) обращается в нуль. Таким образом, первоначально покоившийся газ при нестационарном расширении в волне разрежения может ускориться лишь до скорости, не превышающей $2c_0/(\gamma - 1)$.

Мы уже упомянули в начале параграфа простой пример автомодельного движения, возникающего в цилиндрической трубе, когда поршень начинает двигаться с постоянной скоростью. Если поршень выдвигается из трубы, он создает за собой разрежение, и возникает описанная выше волна разрежения. Если же поршень вдвигается в трубу, он производит перед собой сжатие газа, а переход к более низкому первоначальному давлению может произойти лишь в ударной волне, которая и возникает перед поршнем, распространяясь вперед по трубе (см. задачи к этому параграфу) [1].

Задачи

1. Газ находится в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой. В начальный момент времени поршень начинает вдвигаться в трубу с постоянной скоростью U. Определить возникающее движение газа, считая газ политропным.

Р е ш е н и е. Перед поршнем возникает ударная волна, передвигающаяся вперед по трубе. В начальный момент времени положения этой волны и поршня совпадают, а в дальнейшем волна «обгоняет» поршень и возникает область газа между ней и поршнем (область *2*). В области впереди от ударной волны (область *1*) давление газа равно его первоначальному значению p_1, а скорость (относительно трубы) равна нулю. В области же *2* газ движется с постоянной скоростью, равной скорости поршня U (рис. 75). Разность скоростей газов *1* и *2* равна, следовательно, тому же U и согласно

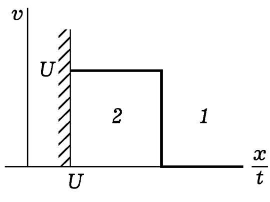


Рис. 75

[1]) Упомянем об аналогичной трехмерной автомодельной задаче: центрально-симметрическом движении газа, создаваемом равномерно расширяющейся сферой (*Л.И. Седов*, 1945; *G. Taylor*, 1946). Перед сферой возникает сферическая же ударная волна, распространяющаяся с постоянной скоростью. В отличие от одномерного случая скорость движения газа между сферой и ударной волной не постоянна; уравнение, определяющее ее как функцию отношения r/t (а вместе с тем и скорость распространения ударной волны), не может быть проинтегрировано в аналитическом виде. См. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1981, гл. IV, § 6; *Taylor G.I.* // Proc. Roy. Soc. 1946. V. A186. P. 273.

формулам (85.7) и (89.1) можно написать:

$$U = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)} = (p_2 - p_1)\sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}}.$$

Отсюда получаем для давления p_2 газа между поршнем и ударной волной

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)U^2}{4c_1^2} + \frac{\gamma U}{c_1}\sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2 U^2}{16c_1^2}}.$$

Зная p_2, можно вычислить согласно формулам (89.4) скорость ударной волны относительно газов впереди и позади нее. Поскольку газ *1* покоится, то скорость волны относительно него есть скорость ее распространения по трубе. Если координата x вдоль длины трубы отсчитывается от начального места нахождения поршня (причем газ находится со стороны $x > 0$), то для положения ударной волны в момент t получим

$$x = t\left\{\frac{\gamma + 1}{4}U + \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2}{16}U^2 + c_1^2}\right\}$$

(положение же поршня есть $x = Ut$).

2. То же, если поршень выдвигается из трубы со скоростью U.

Р е ш е н и е. К поршню примыкает область газа (*1* на рис. 76 *а*), движущегося в отрицательном направлении оси x с постоянной скоростью $-U$, равной скорости поршня. Далее следует волна разрежения *2*, в которой газ движется в отрицательном направлении оси x со скоростью, меняющейся от значения $-U$ до нуля по линейному закону (99.17). Давление же меняется по закону (99.16) от значения

$$p_1 = p_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{U}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}$$

в газе *1* до p_0 в неподвижном газе *3*. Граница области *2* с областью *1* определяется условием $v = -U$; согласно (99.17) получим

$$x = \left(c_0 - \frac{\gamma + 1}{2}U\right)t = (c - U)t$$

(c — скорость звука в газе *1*). На границе же с областью *3* $v = 0$, откуда $x = c_0t$. Обе эти границы представляют собой слабые разрывы, из которых второй всегда распространяется вправо (т. е. в сторону от поршня); первый же (граница *1*—*2*) может распространяться как вправо (как это изображено на рис. 76 *а*), так и влево — если скорость поршня $U > 2c_0/(\gamma + 1)$.

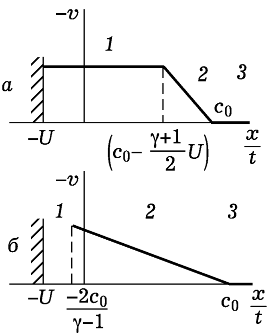


Рис. 76

Описанная картина может иметь место только при условии $U < 2c_0/(\gamma - 1)$. Если же $U > 2c_0/(\gamma - 1)$, то перед поршнем образуется область вакуума (газ как бы не успевает двигаться за поршнем), простирающаяся от поршня до точки с координатой $x = -2c_0t/(\gamma - 1)$ (*1* на рис. 76 *б*). В этой точке $v = -2c_0/(\gamma - 1)$; за ней следует область *2*, в которой скорость падает до нуля (в точке $x = c_0t$), а дальше область *3* неподвижного газа.

3. Газ находится в цилиндрической трубе, не ограниченной с одной стороны ($x > 0$) и закрытой заслонкой с другой ($x = 0$). В момент времени $t = 0$ заслонка открывается, и газ выпускается в наружную среду, давление p_e которой меньше первоначального давления p_0 в трубе. Определить возникающее движение газа.

Р е ш е н и е. Пусть $-v_e$ есть скорость газа, соответствующая по формуле (99.16) внешнему давлению p_e; при $x = 0$, $t > 0$ должно быть $v = -v_e$. Если $v_e < 2c_0/(\gamma + 1)$, то получается картина распределения скорости, изображенная на рис. 77 *а*. При $v_e = = 2c_0/(\gamma + 1)$ (что соответствует скорости вытекания, равной местной скорости звука на выходе трубы, — в этом легко убедиться, положив $v = c$ в формуле (99.14)) область постоянной скорости исчезает и получается картина, изображенная на рис. 77 *б*. Величина $\dfrac{2c_0}{\gamma + 1}$ представляет собой наибольшую возможную скорость вытекания газа из трубы в рассматриваемых условиях. Если внешнее давление

$$p_e < p_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}, \tag{1}$$

то соответствующая ему скорость v_e сделалась бы больше, чем $2c_0/(\gamma + 1)$. В действительности при этом давление на выходе трубы будет продолжать оставаться равным предельному значению (1), а скорость вытекания — равной $2c_0/(\gamma+1)$; остальное падение давления (до p_e) происходит во внешней среде.

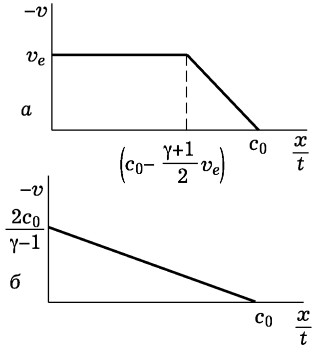


Рис. 77

4. Бесконечная труба перегорожена поршнем, по одну сторону от которого ($x < 0$) в начальный момент времени находится газ под давлением p_0, а по другую сторону ($x > 0$) — вакуум. Определить движение поршня под влиянием расширяющегося газа.

Р е ш е н и е. В газе возникает волна разрежения, одна из границ которой перемещается вместе с поршнем вправо, а другая — влево. Уравнение движения поршня

$$m \frac{dU}{dt} = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}$$

(U — скорость поршня, m — масса, приходящаяся на единицу его площади). Интегрируя, получим

$$U(t) = \frac{2c_0}{\gamma - 1} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{(\gamma + 1)p_0}{2mc_0} t \right]^{-\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right\}.$$

5. Определить движение в изотермической автомодельной волне разрежения.

Р е ш е н и е. Изотермическая скорость звука

$$c_T = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

и при постоянной температуре $c_T = \mathrm{const} = c_{T_0}$. Согласно (99.5), (99.6) находим поэтому:

$$v = c_{T_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = c_{T_0} \ln \frac{p}{p_0} = \frac{x}{t} - c_{T_0}.$$

6. С помощью уравнения Бюргерса (§ 93) определить связанную с диссипацией структуру слабого разрыва между волной разрежения и неподвижным газом.

Р е ш е н и е. Пусть неподвижный газ находится слева, а волна разрежения — справа от слабого разрыва (тогда последний движется влево). Без учета диссипации, в первой из этих областей имеем $v = 0$, а во второй движение описывается уравнениями (99.5), (99.6) (с обратным знаком перед c), причем вблизи разрыва скорость v мала; с точностью до членов первого порядка по v имеем

$$\frac{x}{t} = v - c \approx -c_0 + \left(1 + \frac{\rho_0}{c_0}\frac{dc_0}{d\rho_0}\right) = -c_0 + \alpha_0 v,$$

где α определено в (102.2), а индекс 0 указывает значения величин при $v = 0$ (ниже этот индекс опускаем).

С точностью до величин второго порядка малости скорость в волне, распространяющейся влево, подчиняется полученному в задаче 1 § 93 уравнению (6), или уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},$$

где $\mu = ac^3$, а неизвестная $u = \alpha v$ выражена в функции от t и $\zeta = x + ct$; переменная ζ измеряет расстояние от слабого разрыва в каждый момент времени t. Требуется найти непрерывное решение этого уравнения с граничными условиями

$$u = \zeta/t \quad \text{при} \quad \zeta \to \infty, \qquad u = 0 \quad \text{при} \quad \zeta \to -\infty,$$

отвечающими движению без учета диссипации. В соответствии с законом расширения слабого разрыва (96.1), переменная t должна входить в решение в комбинации $z = \zeta/\sqrt{t}$ с переменной ζ. Такое решение может удовлетворять поставленным граничным условиям, если

$$u(t, \zeta) = \frac{1}{\zeta}\,\psi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{t}}\right).$$

Функция ψ связана с введенной в задаче 2 § 93 функцией φ соотношением

$$-2\mu\,\ln\varphi = \int \psi(z)\frac{d\zeta}{\zeta} = \int \psi(z)\frac{dz}{z},$$

так что φ зависит только от z, причем

$$\psi(z) = -2\mu z\frac{d}{dz}\ln\varphi(z).$$

Уравнение (3) указанной задачи принимает вид $2\mu\varphi'' = -z\varphi'$, откуда

$$\varphi(z) = \int e^{-z^2/4\mu}\,dz.$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(z, \zeta) = \frac{2\mu z}{\zeta}\left[e^{z^2/4\mu}\int\limits_z^\infty e^{-z^2/4\mu}\,dz\right]^{-1},$$

или окончательно для скорости $v(\zeta, t)$:

$$v(\zeta, t) = \frac{\mu^{1/2}}{\alpha t^{1/2}}\left[e^{\zeta^2/(4\mu t)}\int\limits_{\zeta/(2\sqrt{\mu t})}^{\infty} e^{-z^2}\,dz\right]^{-1},$$

чем и определяется структура слабого разрыва.

§ 100. Разрывы в начальных условиях

Одной из важнейших причин возникновения поверхностей разрыва в газе могут являться разрывы в начальных условиях движения. Начальные условия (т. е. начальные распределения скорости, давления и т. п.) могут быть заданы, вообще говоря, произвольным образом. В частности, эти начальные распределения отнюдь не должны быть непременно везде непрерывными функциями и могут испытывать разрывы на некоторых поверхностях. Так, если в некоторый момент времени привести в соприкосновение две массы газа, сжатые до различных давлений, то поверхность их соприкосновения будет поверхностью разрыва в начальном распределении давления.

Существенно, что скачки различных величин в разрывах начальных условий (или, как мы будем говорить, в начальных разрывах) могут быть совершенно произвольными; между ними не должно существовать никаких соотношений. Между тем, мы знаем, что на поверхности разрывов, которые могут существовать в газе в качестве устойчивых образований, должны соблюдаться определенные условия; так, скачки плотности и давления в ударной волне связаны друг с другом ударной адиабатой. Поэтому ясно, что если в начальном разрыве эти необходимые условия не соблюдаются, то в дальнейшем он во всяком случае не сможет продолжать существовать как таковой. Вместо этого начальный разрыв, вообще говоря, распадается на несколько разрывов, каждый из которых является каким-нибудь из возможных типов разрывов (ударная волна, тангенциальный разрыв, слабый разрыв); с течением времени эти возникшие разрывы будут отходить друг от друга [1]) .

В течение малого промежутка времени, начиная от начального момента $t = 0$, разрывы, на которые распадается начальный разрыв, еще не успеют разойтись на большие расстояния друг от друга, и потому вся исследуемая картина движения будет ограничена сравнительно узким объемом, прилегающим к поверхности начального разрыва. Как обычно, достаточно рассматривать в общем случае отдельные участки поверхности начального разрыва, каждый из которых можно считать плоским. Поэтому можно ограничиться рассмотрением плоской поверхности разрыва. Мы выберем эту плоскость в качестве плоскости yz. Из соображений симметрии очевидно, что разрывы, на которые распадется начальный разрыв при $t > 0$, будут тоже плоскими и перпендикулярными к оси x. Вся картина движения будет зависеть только от одной координаты x (и времени), так что задача сводится к одномерной. Благодаря отсутствию каких бы то ни было характеристических параметров длины и времени, задача

[1]) Общее исследование этого вопроса дано *Н.Е. Кочиным* (1926).

автомодельна, и мы можем воспользоваться полученными в предыдущем параграфе результатами.

Разрывы, возникающие при распаде начального разрыва, должны, очевидно, двигаться от места их образования, т. е. от места нахождения начального разрыва. Легко видеть, что при этом в каждую из двух сторон (в положительном и отрицательном направлениях оси x) может двигаться либо одна ударная волна, либо одна пара слабых разрывов, ограничивающих волну разрежения. Действительно, если бы, скажем, в положительном направлении оси x распространялись две образовавшиеся в одном и том же месте в момент $t = 0$ ударные волны, то передняя из них должна была бы двигаться со скоростью большей, чем скорость задней волны. Между тем согласно общим свойствам ударных волн первая должна двигаться относительно остающегося за ней газа со скоростью, меньшей скорости звука c в этом газе, а вторая должна двигаться относительно того же газа со скоростью, превышающей ту же величину c (в области между двумя ударными волнами $c = \text{const}$), т. е. должна догонять первую. По такой же причине не могут следовать друг за другом в одну и ту же сторону ударная волна и волна разрежения (достаточно заметить, что слабые разрывы движутся относительно газов впереди и позади них со звуковой скоростью). Наконец, две одновременно возникшие волны разрежения не могут разойтись, так как скорость заднего фронта первой равна скорости заднего фронта второй.

Наряду с ударными волнами и волнами разрежения при распаде начального разрыва должен, вообще говоря, возникнуть так же и тангенциальный разрыв. Такой разрыв во всяком случае необходим, если в начальном разрыве испытывали скачок поперечные компоненты скорости v_y, v_z. Поскольку эти компоненты скорости не меняются ни в ударной волне, ни в волне разрежения, то их скачок будет всегда происходить на тангенциальном разрыве, остающемся на том же месте, где находился начальный разрыв; с каждой стороны от этого разрыва v_y, v_z будут оставаться постоянными (в действительности, конечно, благодаря неустойчивости тангенциального разрыва со скачком скорости он, как всегда, с течением времени размоется в турбулентную область).

Тангенциальный разрыв, однако, должен возникнуть даже и в том случае, когда v_y, v_z не имеют скачка в начальном разрыве (не ограничивая общности, можно считать в этом случае, что постоянные v_y и v_z равны нулю, что и будет подразумеваться ниже). Это показывают следующие соображения. Возникающие в результате распада разрывы должны дать возможность перейти от заданного состояния *1* газа с одной стороны начального разрыва к заданному состоянию *2* с другой стороны. Состояние газа

определяется тремя независимыми величинами, например, p, ρ и $v_x = v$. Поэтому необходимо иметь в распоряжении три произвольных параметра для того, чтобы посредством некоторого набора разрывов перейти, скажем, от состояния *1* к произвольно заданному состоянию *2*. Но мы знаем, что ударная волна (перпендикулярная к направлению потока), распространяющаяся по газу, термодинамическое состояние которого задано, полностью определяется одним параметром (§ 85). То же самое относится к волне разрежения (как видно из формул (99.14)–(99.16), при заданном состоянии входящего в волну разрежения газа состояние выходящего газа полностью определится заданием одной из величин в нем). С другой стороны, мы видели, что в результате распада в каждую сторону может пойти не более одной волны — ударной или разрежения. Таким образом, мы будем иметь в нашем распоряжении всего два параметра, что недостаточно.

Возникающий на месте начального разрыва тангенциальный разрыв как раз и представляет этот недостающий третий параметр. На этом разрыве остается непрерывным давление; плотность же (а с ней и температура, энтропия) испытывает скачок. Тангенциальный разрыв неподвижен относительного газа по обеим его сторонам, и потому к нему не относятся использованные выше соображения о взаимном обгоне двух распространяющихся в одном направлении волн.

Газы, находящиеся по обе стороны тангенциального разрыва, не перемешиваются друг с другом, так как движения газа через тангенциальный разрыв нет; во всех перечисленных ниже вариантах эти газы могут быть даже газами различных веществ.

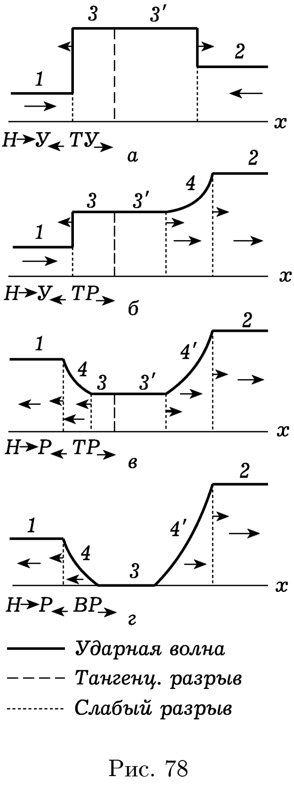


Рис. 78

На рис. 78 схематически изображены все возможные типы распада начального разрыва. Сплошной линией изображен ход изменения давления вдоль оси x (изменение плотности изобразилось бы линией такого же характера, с той лишь разницей, что имелся бы скачок также и на тангенциальном разрыве). Вертикальные отрезки изображают образовавшиеся разрывы, а стрелками указаны направления их распространения и направления движения газа. Система координат выбрана везде та, в которой

тангенциальный разрыв покоится; вместе с ним покоится также и газ в прилегающих к нему областях *3*, *3'*. Давления, плотности и скорости газов в крайних слева и справа областях *1* и *2* — это те значения соответствующих величин, которые они имеют в момент времени $t = 0$ на обеих сторонах начального разрыва.

В первом случае (который мы условно записываем в виде $H \to У_{\leftarrow} ТУ_{\to}$, рис. 78 *а*) из начального разрыва H возникают две ударные волны $У$, распространяющиеся в противоположные стороны, и расположенный между ними тангенциальный разрыв T. Этот случай осуществляется при столкновении двух масс газа, движущихся с большой скоростью навстречу друг другу.

В случае $H \to У_{\leftarrow} TP_{\to}$ (рис. 78 *б*) по одну сторону от тангенциального разрыва распространяется ударная волна, а по другую — волна разрежения P. Этот случай осуществляется, например, если в начальный момент времени приводятся в соприкосновение две неподвижные друг относительно друга массы газа ($v_2 - v_1 = 0$), сжатые до различных давлений. Действительно, из всех четырех случаев, изображенных на рис. 78, только во втором из них газы *1* и *2* движутся в одинаковом направлении и потому может быть $v_1 = v_2$.

Далее, в третьем случае ($H \to P_{\leftarrow} TP_{\to}$) в обе стороны от тангенциального разрыва распространяются по волне разрежения. Если газы *1* и *2* разлетаются друг от друга с достаточно большой скоростью $v_2 - v_1$, то в волнах разрежения давление может достичь при своем падении значения нуль. Тогда возникает картина, изображенная на рис. 78 *г*; между областями *4* и *4'* образуется область вакуума *3*.

Выведем аналитические условия, определяющие характер распада начального разрыва в зависимости от его параметров. Будем считать во всех случаях, что $p_2 > p_1$, а положительное направление оси x выбираем везде в направлении от области *1* к области *2* (в соответствии с рис. 78).

Имея в виду, что газы по обеим сторонам начального разрыва могут быть газами различных веществ, будем различать их, называя соответственно газами *1* и *2*.

1. Распад $H \to У_{\leftarrow} ТУ_{\to}$. Если $p_3 = p'_3$, $v_3 = v'_3$, V_3, V'_3 — давление, скорость и удельные объемы в образовавшихся после распада областях *3* и *3'*, то имеем $p_3 > p_2 > p_1$, а объемы V_3 и V'_3 определяются как абсциссы точек с ординатами p_3 на ударных адиабатах, проведенных соответственно через точки p_1, V_1 и p_2, V_2 в качестве исходных. Поскольку газы в областях *3* и *3'* в выбранной системе координат неподвижны, то согласно формуле (85.7) можно написать для скоростей v_1 и v_2, направленных соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси x:

$$v_1 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)}, \quad v_2 = -\sqrt{(p_3 - p_2)(V_3 - V'_3)}.$$

Наименьшее значение, которое может иметь давление p_3 при заданных p_1 и p_2 так, чтобы не противоречить исходному предположению ($p_3 > p_2 > p_1$), есть $p_3 = p_2$. Имея также в виду, что разность $v_1 - v_2$ есть монотонно возрастающая функция p_3, находим искомое неравенство

$$v_1 - v_2 > \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V')}, \tag{100.1}$$

где символом V' обозначен объем, являющийся абсциссой точки с ординатой p_2 на ударной адиабате газа *1*, проведенной через точку p_1, V_1 в качестве начальной. Вычислив V' по формуле (89.1) (написав в ней V' вместо V_2), получим для политропного газа условие (100.1) в виде

$$v_1 - v_2 > (p_2 - p_1)\sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2}}. \tag{100.2}$$

Отметим, что условия (100.1), (100.2), устанавливающие границу возможных значений разности скоростей $v_1 - v_2$, не зависят, очевидно, от выбора системы координат.

2. Распад $H \to У_{\leftarrow} TP_{\rightarrow}$. Здесь $p_1 < p_3 = p'_3 < p_2$. Для скорости газа в области *1* имеем опять

$$v_1 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)},$$

а полное изменение скорости в волне разрежения *4* равно согласно (99.7)

$$v_2 = \int\limits_{p_3}^{p_2} \sqrt{-dp\, dV}.$$

При заданных p_1 и p_2 значения p_3 могут лежать в пределах от p_1 до p_2. Заменяя p_3 в разности $v_2 - v_1$ один раз на p_1, а другой — на p_2, получим условие

$$-\int\limits_{p_1}^{p_2} \sqrt{-dp\, dV} < v_1 - v_2 < \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V')}. \tag{100.3}$$

Здесь V' имеет тот же смысл, что и в предыдущем случае; выражение, определяющее верхний предел разности $v_1 - v_2$, должно вычисляться для газа *1*, а нижний предел — для газа *2*. Для политропного газа получим

$$-\frac{2c_2}{\gamma_2 - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}}\right] < v_1 - v_2 <$$

$$< (p_2 - p_1)\sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2}}, \tag{100.4}$$

где $c_2 = \sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}$ — скорость звука в газе *2* в состоянии p_2, V_2.

3. Распад $H\to P\leftarrow TP\to$. Здесь $p_2 > p_1 > p_3 = p_3' > 0$. Тем же путем найдем следующее условие осуществления этого случая:

$$-\int\limits_0^{p_1}\sqrt{-dp\,dV}-\int\limits_0^{p_2}\sqrt{-dp\,dV}<v_1-v_2<-\int\limits_{p_1}^{p_2}\sqrt{-dp\,dV}. \tag{100.5}$$

Интеграл в правой части неравенства вычисляется для газа *2*, а в левой части первый интеграл — для газа *1*, а второй — для газа *2*. Для политропного газа получим

$$-\frac{2c_1}{\gamma_1-1}-\frac{2c_2}{\gamma_2-1}<v_1-v_2<-\frac{2c_2}{\gamma_2-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma_2-1}{2\gamma_2}}\right], \tag{100.6}$$

где $c_1=\sqrt{\gamma_1 p_1 V_1}$, $c_2=\sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}$. Если

$$v_1-v_2<-\frac{2c_1}{\gamma_1-1}-\frac{2c_2}{\gamma_2-1}, \tag{100.7}$$

то между волнами разрежения возникает область вакуума (распад $H\to P\leftarrow BP\to$).

К задаче о разрыве в начальных условиях сводятся, в частности, задачи о различных столкновениях плоских поверхностей разрывов. В момент столкновения обе плоскости совпадают и представляют собой некоторый «начальный разрыв», в дальнейшем распадающийся одним из описанных выше способов. Так, в результате столкновения двух ударных волн снова возникают две ударные же волны, расходящиеся от остающегося между ними тангенциального разрыва:

$$У_\to У_\leftarrow \to У_\leftarrow T У_\to.$$

Когда одна ударная волна догоняет другую, возможны два случая

$$У_\to У_\to \to У_\leftarrow T У_\to, \qquad У_\to У_\to \to P_\leftarrow T У_\to.$$

В обоих случаях вперед продолжает распространяться ударная же волна.

К этой же категории относится задача об отражении и прохождении ударной волны через тангенциальный разрыв (границу двух сред). Здесь возможны два случая:

$$У_\to T \to У_\leftarrow T У_\to, \qquad У_\to T \to P_\leftarrow T У_\to.$$

Прошедшая во вторую среду волна всегда является ударной (см. также задачи к этому параграфу) [1].

[1]) Для полноты упомянем, что при столкновении ударной волны со слабым разрывом (эта задача не относится к рассматриваемому здесь автомодельному типу) ударная волна продолжает распространяться в прежнем направлении, а в пространстве позади нее остается один слабый разрыв первоначального типа и один «тангенциальный» (см. конец § 96) слабый разрыв.

З а д а ч и

1. Плоская ударная волна отражается от плоской поверхности абсолютно твердого тела. Определить давление газа позади отраженной волны. (*H. Hugoniot*, 1885).

Р е ш е н и е. В результате падения ударной волны на твердую стенку возникает отраженная ударная волна, распространяющаяся от стенки. Будем отмечать индексами 1, 2, 3 соответственно невозмущенный газ перед падающей ударной волной, газ позади падающей волны (он же является газом впереди отраженной волны) и газ позади отраженной волны (рис. 79; стрелками показано направление движения ударных волн и самого газа). Газ в граничащих с твердой стенкой областях *1* и *3* покоится (относительно неподвижной стенки). Поэтому относительная скорость газов по обе стороны разрыва друг относительно друга в обоих случаях — в падающей и отраженной ударных волнах — одинакова (равна одной и той же величине — скорости газа *2*). Воспользовавшись формулой (85.7) для относительной скорости, получим поэтому:

$$(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3).$$

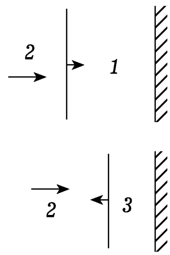


Рис. 79

Уравнение же ударной адиабаты (89.1) для каждой из ударных волн дает

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2},$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_3}{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_3}.$$

Из этих трех уравнений можно исключить удельные объемы, в результате чего получим

$$(p_3 - p_2)^2[(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2] = (p_2 - p_1)^2[(\gamma+1)p_3 + (\gamma-1)p_2].$$

Это есть квадратное уравнение для p_3, имеющее тривиальный корень $p_3 = p_1$; после сокращения на $(p_3 - p_1)$ получим искомую формулу

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3\gamma-1)p_2 - (\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_1},$$

определяющую p_3 по p_1 и p_2. В предельном случае большой интенсивности падающей волны «досжатие» газа отраженной ударной волной определяется формулами

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3\gamma-1)}{\gamma-1}, \quad \frac{V_3}{V_1} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma}.$$

В обратном предельном случае малой интенсивности: $p_3 - p_2 = p_2 - p_1$, что соответствует звуковому приближению.

2. Найти условие, определяющее результат отражения ударной волны от плоской границы между двумя газами.

Р е ш е н и е. Пусть $p_1 = p_2'$, V_1, V_2' — давления и удельные объемы обеих сред до падения ударной волны (распространяющейся в газе *2*) на их поверхность раздела, а p_2, V_2 — давление и удельный объем позади ударной волны. Условие того, чтобы отраженная волна была ударной, определяется неравенством (100.2), в котором надо в данном случае положить

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_2')(V_2' - V_2)}.$$

Выражая все величины через отношение давлений p_2/p_1 и начальные удельные объемы V_1 и V_2', получим следующее условие:

$$\frac{V_1}{(\gamma_1+1)p_2/p_1+(\gamma_1-1)} < \frac{V_2'}{(\gamma_2+1)p_2/p_1+(\gamma_2-1)}.$$

§ 101. Одномерные бегущие волны

При изучении звуковых волн в § 64 амплитуда колебаний в волне предполагалась малой. В результате уравнения движения оказывались линейными и могли быть легко решены. Решением этих уравнений является, в частности, функция от $x \pm ct$ (плоская волна), что соответствует бегущей волне с профилем, перемещающимся со скоростью c без изменения своей формы (под профилем волны понимают распределение различных величин — плотности, скорости и т. п. — вдоль направления ее распространения). Поскольку скорость v, плотность ρ и давление p (как и другие величины) в такой волне являются функциями от одной и той же комбинации $x \pm ct$, то они могут быть выражены как функции друг от друга в виде соотношений, не содержащих явно ни координаты, ни времени (например, $p = p(\rho)$, $v = v(p)$ и т. д.).

В случае произвольной, не малой, амплитуды волны эти простые соотношения уже не имеют места. Оказывается, однако, возможным найти общее решение точных уравнений движения, представляющее собой бегущую плоскую волну и являющееся обобщением решения $f(x \pm ct)$ приближенных уравнений, применимых в случае малых амплитуд. Для отыскания этого решения будем исходить из требования, чтобы в общем случае волны с произвольной амплитудой плотность и скорость могли быть выражены в виде функции друг от друга.

При отсутствии ударных волн движение адиабатично. Если в некоторый начальный момент времени газ был однороден (так что, в частности, было $s = \mathrm{const}$), то и в дальнейшем будет все время $s = \mathrm{const}$, что и предполагается ниже; тогда и давление будет функцией только от плотности.

В плоской звуковой волне, распространяющейся вдоль оси x, все величины зависят только от x и t, а для скорости имеем $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Уравнение непрерывности гласит:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0,$$

а уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Воспользовавшись тем, что v может быть представлено в виде

функции только от ρ, напишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{d(\rho v)}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0, \qquad (101.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (101.2)$$

Замечая, что

$$\frac{\partial\rho/\partial t}{\partial\rho/\partial x} = -\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho,$$

получаем из (101.1)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = \frac{d(\rho v)}{d\rho} = v + \rho\frac{dv}{d\rho},$$

а из (101.2) аналогично

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v = v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}. \qquad (101.3)$$

Но поскольку значение ρ определяет однозначным образом значение v, то безразлично, берется ли производная при постоянном ρ или v, так что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v,$$

откуда

$$\rho\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv} = \frac{c^2}{\rho}\frac{d\rho}{dv}.$$

Таким образом, $dv/d\rho = \pm c/\rho$, откуда

$$v = \pm\int\frac{c}{\rho}\,d\rho = \pm\int\frac{dp}{\rho c}. \qquad (101.4)$$

Этим определяется общая связь между скоростью и плотностью или давлением в волне [1].

Далее, комбинируя (101.3) с (101.4), пишем:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v = v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv} = v \pm c(v),$$

или, интегрируя,

$$x = t[v \pm c(v)] + f(v), \qquad (101.5)$$

где $f(v)$ — произвольная функция скорости, а функция $c(v)$ определяется равенством (101.4).

[1]) В волне с малой амплитудой имеем $\rho = \rho_0 + \rho'$, и (101.4) дает в первом приближении $v = c_0\rho'/\rho_0$ (где $c_0 = c(\rho_0)$), т. е. обычную формулу (64.12).

Формулы (101.4), (101.5) представляют собой искомое общее решение (впервые найденное *Риманом — B. Riemann*, 1860). Указанные формулы определяют неявным образом скорость (а с нею и остальные величины) как функцию от x и t, т. е. профиль волны в каждый момент времени. Для каждого определенного значения v имеем $x = at + b$, т. е. точка, в которой скорость имеет определенное значение, передвигается в пространстве с постоянной скоростью; в этом смысле найденное решение представляет собой бегущую волну. Два знака в (101.5) соответствуют волнам, распространяющимся (относительно газа) в положительном и отрицательном направлениях оси x.

Движение, описываемое решением (101.4), (101.5) часто называют *простой волной*; ниже мы будем пользоваться этим термином. Изученное в § 99 автомодельное движение является частным случаем простой волны, соответствующим равной нулю функции $f(v)$ в (101.5).

Выпишем в явном виде соотношения для простой волны в политропном газе; для определенности будем считать, что в волне есть точка, в которой $v = 0$, как это обычно бывает в различных конкретных задачах. Поскольку формула (101.6) совпадает с формулой (99.6), то аналогично формулам (99.14)–(99.16) имеем

$$c = c_0 \pm \frac{\gamma - 1}{2} v, \tag{101.6}$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma - 1}}, \quad p = p_0 \left(1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}. \tag{101.7}$$

Подставляя (101.6) в (101.5), получим

$$x = t\left(\pm c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v\right) + f(v). \tag{101.8}$$

Иногда бывает удобным писать это решение в виде

$$x = F\left[x - \left(\pm c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v\right) t\right], \tag{101.9}$$

где F — опять произвольная функция.

Из формул (101.6), (101.7) снова (как и в § 99) видно, что скорость, направленная в сторону, противоположную направлению распространения волны (относительно самого газа), ограничена по своей абсолютной величине; для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, имеем

$$-v \leqslant \frac{2c_0}{\gamma - 1}. \tag{101.10}$$

Бегущая волна, описываемая формулами (101.4), (101.5), существенно отличается от волны, получающейся в предельном

случае малых амплитуд. Скорость, с которой перемещаются точки профиля волны, равна

$$u = v \pm c; \qquad (101.11)$$

ее можно рассматривать наглядно как результат наложения распространения возмущения относительно газа со звуковой скоростью и перемещения самого газа со скоростью v. Скорость u является теперь функцией плотности и поэтому различна для разных точек профиля. Таким образом, в общем случае плоской волны произвольной амплитуды не существует определенной постоянной скорости волны. Благодаря различию в скоростях точек профиля волны последний не остается неизменным и меняет со временем свою форму.

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x; для нее $u = v + c$. В § 99 была вычислена производная от $v + c$ по плотности (см. (99.10)). Мы видели, что $du/d\rho > 0$. Таким образом, скорость распространения заданной точки профиля волны тем больше, чем больше плотность. Если обозначить через c_0 скорость звука для плотности, равной равновесной плотности ρ_0, то в местах, где имеется сжатие, $\rho > \rho_0$ и $c > c_0$; в точках разрежения, напротив, $\rho < \rho_0$ и $c < c_0$.

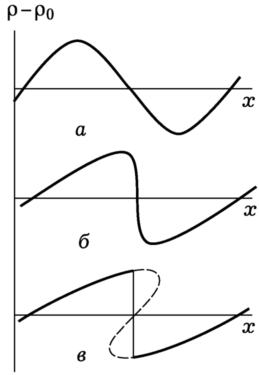


Рис. 80

Неодинаковость скорости перемещения точек профиля приводит к изменению его формы со временем: точки сжатия выдвигаются вперед, а точки разрежения оказываются отставшими (рис. 80 *б*). В конце концов профиль волны может настолько выгнуться, что кривая $\rho(x)$ (при заданном t) оказывается неоднозначной — некоторым x соответствует по три различных значения ρ (рис. 80 *в*, штриховая линия) [1]. Физически, разумеется, такое положение невозможно. В действительности, в местах неоднозначности ρ возникают разрывы, в результате чего ρ оказывается везде (за исключением самих точек разрыва) однозначной функцией. Профиль волны приобретает при этом вид, изображенный на рис. 80 *в* сплошной линией. Поверхности разрыва возникают, таким образом, на протяжении каждой длины волны.

После возникновения разрывов волна перестает быть простой. Наглядная причина этого заключается в том, что при наличии поверхностей разрыва происходит отражение волны от этих поверхностей, в результате чего волна перестает быть бегущей в

---

[1]) О такой деформации профиля волны часто говорят как о его *опрокидывании*.

одном направлении, а потому и лежащее в основе всего вывода предположение об однозначной зависимости между различными величинами не имеет, вообще говоря, места.

Наличие разрывов (ударных волн) приводит, как было указано в § 85, к диссипации энергии. Поэтому возникновение разрывов приводит к сильному затуханию волны. Наличие такого затухания видно уже непосредственно из рис. 80. При возникновении разрыва как бы отсекается наиболее высокая часть профиля волны. С течением времени, по мере продолжающегося выгибания профиля, его вышина все более уменьшается. Происходит сглаживание профиля с уменьшением его амплитуды, что и означает постепенное затухание волны.

Из сказанного выше ясно, что образование в конце концов разрывов должно произойти во всякой простой волне, в которой имеются участки, на которых плотность убывает в направлении распространения волны. Единственный случай, когда разрывы вообще не образуются, — волна, в которой плотность монотонно возрастает в направлении распространения на всем ее протяжении (такова, например, волна, возникающая при выдвигании поршня из заполненной газом бесконечной трубы; см. задачи к этому параграфу).

Хотя после образования разрыва волна и перестает быть простой, но самые момент и место образования разрыва могут быть определены аналитически. Мы видели, что с математической точки зрения возникновение разрывов связано с тем, что в простой волне величины p, ρ, v как функции x (при заданном t) становятся многозначными для моментов времени, превышающих некоторое определенное значение t_0, между тем как при $t < t_0$ эти функции однозначны. Момент t_0 есть момент образования разрыва. Уже из чисто геометрических соображений ясно, что в самый момент t_0 кривая зависимости, скажем, v от x, должна сделаться в некоторой точке $x = x_0$ вертикальной — как раз в той точке, вблизи которой функция стала бы затем многозначной. Аналитически это означает обращение производной $(\partial v/\partial x)_t$ в бесконечность, т. е. производной $(\partial x/\partial v)_t$ в нуль. Ясно также, что в момент t_0 кривая $v = v(x)$ должна лежать по обе стороны от вертикальной касательной, в противном случае зависимость $v(x)$ была бы многозначной уже и в этот момент времени. Другими словами, точка $x = x_0$ должна быть не точкой экстремума функции $x(v)$, а точкой перегиба, и следовательно, должна обратиться в нуль также и вторая производная $(\partial^2 x/\partial v^2)_t$. Таким образом, место и момент образования ударной волны определяются совместным решением двух уравнений:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_t = 0. \qquad (101.12)$$

Для политропного газа эти уравнения гласят:

$$t = -\frac{2}{\gamma+1} f'(v), \qquad f''(v) = 0, \tag{101.13}$$

где $f(v)$ — функция, входящая в общее решение (101.8).

Эти условия должны быть видоизменены, если простая волна граничит с неподвижным газом и ударная волна возникает как раз на этой границе. И здесь в момент возникновения разрыва кривая $v = v(x)$ должна стать вертикальной, т. е. производная $(\partial x/\partial v)_t$ должна обратиться в нуль. Обращение же в нуль второй производной не обязательно; вторым условием здесь является просто равенство нулю скорости на границе с неподвижным газом, так что имеем условие

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t\bigg|_{v=0} = 0.$$

Из этого условия время и место образования разрыва могут быть найдены в явном виде. Дифференцируя выражение (101.5), получим

$$t = -\frac{f'(0)}{\alpha_0}, \quad x = \pm c_0 t + f(0), \tag{101.14}$$

где α_0 — значение при $v = 0$ величины α, определяемой формулой (102.2). Для политропного газа

$$t = -\frac{2f'(0)}{\gamma+1}. \tag{101.15}$$

Задачи

1. Газ находится в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны ($x > 0$) и закрытой поршнем с другой ($x = 0$). В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться равноускоренно со скоростью $U = \pm at$. Определить возникающее движение газа (считая газ политропным).

Р е ш е н и е. Если поршень выдвигается из трубы ($U = -at$), то возникнет простая волна разрежения, передний фронт которой распространяется вправо по неподвижному газу со скоростью c_0; в области $x > c_0 t$ газ неподвижен. На поверхности поршня скорость газа должна совпадать со скоростью поршня, т. е. должно быть $v = -at$ при $x = -at^2/2$, $t > 0$. Это условие дает для функции $f(v)$ в (101.8):

$$f(-at) = -c_0 t + \frac{\gamma a t^2}{2}.$$

Поэтому имеем

$$x - \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v\right)t = f(v) = \frac{c_0}{a} v + \frac{\gamma}{2a} v^2,$$

откуда

$$-v = \frac{1}{\gamma}\left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} at\right) - \frac{1}{\gamma}\left[\left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} at\right)^2 - 2a\gamma(c_0 t - x)\right]^{1/2}. \tag{1}$$

Эта формула определяет изменение скорости в области от поршня до переднего фронта волны $x = c_0 t$ (рис. 81 a) в течение времени от $t = 0$ до

$t = 2c_0/(\gamma - 1)a$. Скорость газа направлена везде влево, в сторону движения поршня, и монотонно убывает по абсолютной величине в положительном направлении оси x; в этом же направлении монотонно возрастают плотность и давление. При $t > 2c_0/(\gamma - 1)a$ для скорости поршня не выполняется неравенство (101.10), а потому газ не может двигаться вместе с ним. Между поршнем и газом возникнет область вакуума, а дальше скорость газа будет меняться по формуле (1) от значения $-2c_0/(\gamma - 1)$ до нуля.

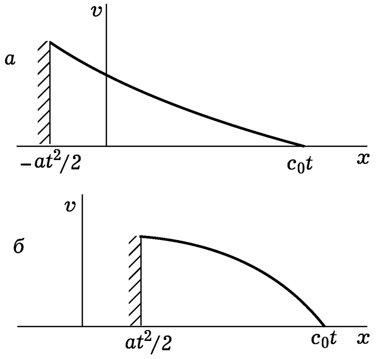


Рис. 81

Если поршень вдвигается в трубу ($U = at$), то возникает простая волна сжатия; соответствующее решение получается просто изменением знака у a в формуле (1) (рис. 81 *б*). Оно применимо, однако, лишь до момента образования ударной волны; этот момент определяется по формуле (101.15) и равен

$$t = \frac{2c_0}{a(\gamma + 1)}.$$

2. То же при произвольном законе движения поршня.

Р е ш е н и е. Пусть поршень в момент $t = 0$ начинает двигаться по закону $x = X(t)$ (причем $X(0) = 0$); его скорость $U = X'(t)$. Граничное условие на поршне ($v = U$ при $x = X$) дает

$$v = X'(t), \quad f(v) = X(t) - t\left[c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}X'(t)\right].$$

Если рассматривать теперь t как параметр, то эти два уравнения определяют в параметрическом виде функцию $f(v)$. Обозначая ниже этот параметр буквой τ, можем написать окончательное решение в виде

$$v = X'(t),$$
$$x = X(\tau) + (t - \tau)\left[c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}X'(\tau)\right], \tag{2}$$

чем и определяется в параметрическом виде искомая функция $v(t, x)$ в возникающей при движении поршня простой волне.

3. Определить время и место образования ударной волны при движении поршня по закону $U = at^n$, $n > 0$.

Р е ш е н и е. Если $a < 0$, т. е. поршень выдвигается из трубы, то возникает простая волна разрежения, в которой ударные волны вообще не образуются. Ниже предполагается $a > 0$, т. е. поршень вдвигается в трубу, создавая простую волну сжатия.

При параметрическом задании функции $v(x, t)$ формулами (2) с

$$X = \frac{a}{n + 1}\tau^{n+1},$$

момент и место образования ударной волны определяются уравнениями:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_t = -c_0 + t\tau^{n-1}an\frac{\gamma + 1}{2} - \frac{a\tau^n}{2}[\gamma - 1 + n(\gamma + 1)] = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2}\right)_t = t\tau^{n-2}an(n - 1)\frac{\gamma + 1}{2} - \frac{an}{2}\tau^{n-1}[\gamma - 1 + n(\gamma + 1)] = 0, \tag{3}$$

причем второе уравнение надо заменить просто равенством $\tau = 0$, если речь идет об образовании разрыва на переднем фронте простой волны.

При $n = 1$ находим

$$\tau = 0, \quad t = \frac{2c_0}{a(\gamma+1)},$$

т. е. ударная волна образуется на переднем фронте через конечное время после начала движения, в согласии с результатом задачи 1.

При $n < 1$ производная $(\partial x/\partial\tau)_t$ как функция от τ оказывается знакопеременной (а потому функция $v(x)$ при заданном t — многозначной) при всяком $t > 0$. Это значит, что ударная волна образуется на поршне в самый момент начала его движения.

При $n > 1$ ударная волна возникает не на переднем фронте простой волны, а в некоторой промежуточной точке, определяемой уравнениями (3). Определив из (3) значения τ и t, можно затем по (2) найти и место образования разрыва. Вычисление дает

$$t = \left(\frac{2c_0}{a}\right)^{1/n} \frac{1}{\gamma+1}\left[\frac{n+1}{n-1}\gamma + 1\right]^{(n-1)/n},$$

$$x = 2c_0\left(\frac{2c_0}{a}\right)^{1/n}\left[\frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{n-1}{n+1}\right]\frac{1}{(n-1)^{(n-1)/n}[\gamma - 1 + n(\gamma+1)]^{1/n}}.$$

4. Для плоской волны малой амплитуды (звук) определить средние по времени значения величин в квадратичном по амплитуде приближении. Волна излучается поршнем, колеблющимся по некоторому закону $x = X(t)$, $U = X'(t)$, причем $X(0) = 0$, $\overline{X} = 0$, $\overline{U} = 0$ [1]).

Р е ш е н и е. Исходим из точного решения (101.9), записав его в эквивалентном виде, с другим выбором аргумента:

$$v = F\left(t - \frac{x}{u}\right), \quad u = c_0 + \alpha_0 v \tag{4}$$

(где $\alpha_0 = (\gamma+1)/2$), или $v = F(\xi)$, где переменная ξ определяется в неявном виде уравнением [2])

$$\xi = t - x/u(\xi). \tag{5}$$

Покажем, что при вычислении с точностью до величин второго порядка усреднение по t эквивалентно усреднению по ξ. При заданном x имеем

$$dt = d\xi\left(1 - \frac{x}{u^2}\frac{du}{d\xi}\right) \approx d\xi\left(1 - \frac{x\alpha_0}{c_0^2}\frac{dv}{d\xi}\right)$$

(в знаменателе u^2 можно пренебречь малой величиной $v \ll c_0$; искомый эффект, связанный с накапливающимися нелинейными искажениями профиля, получается в результате разрешения уравнения (4) относительно v). Поэтому

$$\int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left\{F - \frac{x\alpha_0}{c_0^2}F\frac{dF}{d\xi}\right\}d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F\,d\xi - \frac{x\alpha_0}{c_0^2}[F^2(\xi_2) - F^2(\xi_1)].$$

[1]) В решении этой задачи мы следуем *Л.А. Островскому* (1968).

[2]) Для волн малой амплитуды решение (4) справедливо и для произвольного (не политропного) газа, если определить α_0 согласно (102.2).

Второй член всегда конечен и не дает вклада при усреднении по большому интервалу времени. Заметив также, что

$$\xi_2 - \xi_1 \approx t_2 - t_1 + \frac{\alpha_0 x}{c_0^2}(v_2 - v_1) \approx t_2 - t_1,$$

приходим к требуемому результату $\overline{v}^t = \overline{v}^\xi$, где индекс у черты указывает переменную, по которой производится усреднение (ниже этот индекс опускаем); отметим, что среднее (по t) значение оказывается тем самым независящим от x.

Для задачи о колеблющемся поршне функция $F(\xi)$ определяется уравнением (2), которое можно переписать в виде

$$v(\tau) = X'(\tau), \quad \tau = \xi + X(\tau)/u(\tau)$$

или, ввиду малости амплитуды колебаний:

$$\tau \approx \xi + \frac{1}{c_0}X(\xi), \quad v(\tau) \approx U(\xi) + \frac{1}{c_0}X(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}.$$

Усредняя последнее выражение, пишем

$$\overline{v} = \frac{1}{c_0}\overline{X\frac{dU}{d\xi}} = \frac{1}{c_0}\overline{\frac{d(XU)}{d\xi}} - \frac{1}{c_0}\overline{U^2}$$

и поскольку среднее значение от полной производной обращается в нуль, окончательно:

$$\overline{v} = -\overline{U^2}/c_0. \tag{6}$$

С той же точностью средняя по времени плотность потока вещества:

$$\overline{\rho v} = \rho_0\overline{v} + \overline{\rho' v} = \rho_0\overline{v} + \frac{\rho_0}{c_0}\overline{v^2}.$$

Используя (6) и равенство (в том же приближении) $\overline{v^2} = \overline{U^2}$, находим, что $\overline{\rho v} = 0$; так и должно быть (в силу закона сохранения вещества) в чисто одномерном случае, когда нет подтекания вещества «сбоку». Для средней плотности потока энергии имеем

$$\overline{q} = \overline{\rho w v} = w_0\overline{\rho v} + \rho_0\overline{w' v} = \overline{p' v} = \rho_0 c_0 \overline{v^2}$$

(ср. § 65) и окончательно $\overline{q} = \rho_0 c_0 \overline{U^2}$.

Для вычисления $\overline{p'}$ и $\overline{\rho'}$ надо выразить p' и ρ' через v с точностью до членов $\sim v^2$. Из (101.7) (или из (101.4) и (101.6) для не политропного газа) получим

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{v}{c_0} + \frac{2-\alpha}{2c_0^2}v^2, \quad p' = c^2\rho' + (\alpha - 1)\rho_0 v^2$$

и после усреднения [1]:

$$\overline{\rho'} = -\frac{\alpha\rho_0}{2c_0^2}\overline{U^2}, \quad \overline{p'} = -\frac{2-\alpha}{2}\rho_0\overline{U^2}. \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что $\overline{p'}$ оказывается здесь отличным от нуля уже в квадратичном приближении — ср. конец § 65.

[1]) В более ограничительных предположениях формулы (7) были получены *А. Эйхенвальдом* (1932).

§ 102. Образование разрывов в звуковой волне

Плоская бегущая звуковая волна как точное решение уравнений движения тоже представляет собой простую волну. Мы можем воспользоваться полученными в предыдущем параграфе общими результатами для того, чтобы выяснить некоторые свойства звуковых волн малой амплитуды во втором приближении (понимая под первым приближением то, которое соответствует обычному линейному волновому уравнению).

Прежде всего отметим, что по истечении достаточно долгого времени в звуковой волне на протяжении каждого ее периода должен возникнуть разрыв. Этот эффект приведет затем к весьма сильному затуханию волны, как это было объяснено в § 101. Фактически это может относиться, разумеется, лишь к достаточно сильному звуку; в противном случае звуковая волна успеет поглотиться благодаря обычному эффекту вязкости и теплопроводности газа раньше, чем в ней успеют развиться эффекты высших порядков по амплитуде.

Эффект искажения профиля волны проявляется и в другом отношении. Если в некоторый момент времени волна была чисто гармонической, то с течением времени соответственно изменению формы ее профиля она перестанет быть таковой. Движение, однако, останется периодическим с прежним периодом. В разложение этой волны в ряд Фурье войдут теперь наряду с членом с основной частотой ω также и члены с кратными частотами $n\omega$ (n — целые числа). Таким образом, искажение профиля по мере распространения звуковой волны можно воспринимать как появление в ней наряду с основным тоном также и обертонов.

Скорость u перемещения точек профиля волны (распространяющейся в положительном направлении оси x) в первом приближении получается, если положить в (101.11) $v = 0$, т. е. $u = c_0$, что соответствует распространению волны без изменения формы профиля. В следующем приближении имеем

$$u = c_0 + \frac{\partial u}{\partial \rho_0}\rho' = c_0 + \frac{\partial u}{\partial \rho_0}\frac{\rho_0}{c_0}v,$$

или с помощью выражения (99.10) для производной $\partial u/\partial \rho$:

$$u = c_0 + \alpha_0 v, \tag{102.1}$$

где для краткости введено обозначение [1])

$$\alpha = \frac{c^4}{2V^3}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s. \tag{102.2}$$

Для политропных газов $\alpha = (\gamma + 1)/2$, и формула (102.1) совпадает с точной формулой (см. (101.8)) для скорости u.

[1]) В задаче 1 к § 93 эта величина была обозначена как α_v.

В общем случае произвольной амплитуды волна перестает быть простой после появления в ней разрывов. Существенно, однако, что волна малой амплитуды во втором приближении остается простой и при наличии разрывов. Убедиться в этом можно следующим образом. Изменения скорости, давления и удельного объема в ударной волне связаны друг с другом соотношением

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}.$$

Изменение же скорости v вдоль некоторого участка длины оси x в простой волне равно интегралу

$$v_1 - v_2 = \int\limits_{p_1}^{p_2} \sqrt{-\frac{\partial V}{\partial p}}\, dp.$$

Простое вычисление с помощью разложения в ряд показывает, что оба написанных выражения отличаются друг от друга только в членах третьего порядка (при вычислении следует иметь в виду, что изменение энтропии в разрыве есть величина третьего порядка малости, а в простой волне энтропия вообще постоянна). Отсюда следует, что с точностью до членов второго порядка звуковая волна с каждой стороны от образовавшегося в ней разрыва остается простой, причем на самом разрыве будет выполнено надлежащее граничное условие. В следующих же приближениях это уже не будет иметь места, что связано с появлением отраженных от поверхности разрыва волн.

Выведем теперь условие, с помощью которого можно определить местонахождение разрывов в бегущей звуковой волне (все в том же втором приближении). Пусть u есть скорость движения разрыва (относительно неподвижной системы координат), а v_1, v_2 — скорости газа по обеим его сторонам. Тогда условие непрерывности потока вещества запишется:

$$\rho_1(v_1 - u) = \rho_2(v_2 - u),$$

откуда

$$u = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

С точностью до членов первых двух порядков эта величина равна значению производной $d(\rho v)/d\rho$, взятому в точке, где аргумент v равен полусумме $v = (v_1 + v_2)/2$. Поскольку же в простой волне $d(\rho v)/d\rho = v + c$, то согласно (102.1) имеем

$$u = c_0 + \alpha_0 \frac{v_1 + v_2}{2}. \tag{102.3}$$

Отсюда можно получить следующее простое геометрическое условие, определяющее место ударной волны. На рис. 82 кривой

линией изображен профиль распределения скоростей, соответствующий простой волне, и пусть отрезок ae есть возникающий в волне разрыв (x_s — его координата). Разность заштрихованных на рисунке площадей abc и cde определяется интегралом

$$\int_{v_1}^{v_2} (x - x_s)\, dv,$$

взятым по кривой $abcde$. С течением времени профиль волны смещается; вычислим производную по времени от написанного интеграла. Поскольку скорость dx/dt точек профиля волны определяется формулой (102.1), а скорость dx/dt разрыва — формулой (102.3), то мы получим

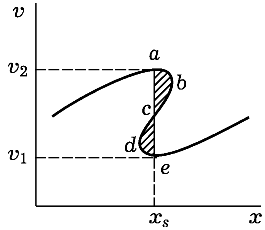


Рис. 82

$$\frac{d}{dt}\int_{v_1}^{v_2} (x - x_s)\, dv = \alpha\left\{\int_{v_1}^{v_2} v\, dv - \frac{v_1 + v_2}{2}\int_{v_1}^{v_2} dv\right\} = 0$$

(при дифференцировании интеграла надо иметь в виду, что хотя сами пределы интегрирования v_1 и v_2 тоже меняются со временем, но значение $x - x_s$ на них всегда есть нуль и поэтому достаточно дифференцировать только под знаком интеграла).

Таким образом, интеграл $\int (x - x_s)\, dv$ остается с течением времени постоянным. Поскольку же в начальный момент возникновения ударной волны он равен нулю (точки a и e совпадают), то и всегда

$$\int_{abcde} (x - x_s)\, dv = 0. \tag{102.4}$$

Геометрически это означает, что площадь abc равна площади cde. Этим условием определяется положение разрыва.

Образование разрывов в звуковой волне представляет собой пример самопроизвольного возникновения ударных волн в отсутствие каких бы то ни было особенностей во внешних условиях движения. Следует подчеркнуть, что хотя ударная волна может самопроизвольно возникнуть в некоторый дискретный момент времени, она не может столь же дискретным образом исчезнуть. Раз возникнув, ударная волна затухает в дальнейшем лишь асимптотически при неограниченном увеличении времени.

Рассмотрим одиночный одномерный звуковой импульс сжатия газа, в котором уже успела образоваться ударная волна, и выясним, по какому закону будет происходить окончательное затухание этой волны. На поздних стадиях своего распространения

звуковой импульс с ударной волной будет иметь треугольный профиль скоростей, — линейный профиль при своем дальнейшем деформировании остается линейным [1]).

Пусть в некоторый момент времени (который примем за момент $t = 0$) профиль изображается треугольником ABC на рис. 83 *а* (значения величин, относящиеся к этому моменту времени, будем отличать индексом 1) [2]). Перемещая точки этого профиля со скоростями (102.1), мы получили бы по истечении времени t профиль $A'B'C'$ (рис. 83 *б*). В действительности разрыв переходит в точку E и истинный профиль будет $A'DE$. Площади $DB'F$ и $C'FE$ равны друг другу в силу условия (102.4); поэтому площадь $A'DE$ нового профиля равна площади ABC исходного профиля. Пусть l — длина звукового импульса в момент времени t, а Δv — скачок скорости в ударной волне. За время t точка B смещается относительно точки C на расстояние $\alpha t(\Delta v)_1$; поэтому тангенс угла $B'AC'$ равен $(\Delta v_1)/[l_1 + \alpha t(\Delta v)_1]$, и мы получаем условие равенства площадей ABC и $A'DE$ в виде

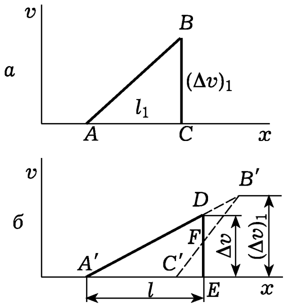


Рис. 83

$$l_1(\Delta v)_1 = \frac{l^2(\Delta v)_1}{l_1 + \alpha t(\Delta v)_1},$$

откуда

$$l = l_1\left[1 + \frac{\alpha(\Delta v)_1}{l_1}t\right]^{1/2}, \quad \Delta v = (\Delta v)_1\left[1 + \frac{\alpha(\Delta v)_1}{l_1}t\right]^{-1/2}. \quad (102.5)$$

Полная энергия бегущего звукового импульса (отнесенная к единице площади ее фронта) равна

$$E = \rho \int v^2\, dx = E_1\left[1 + \frac{\alpha(\Delta v)_1}{l_1}t\right]^{-1/2}. \qquad (102.6)$$

[1]) Здесь и ниже мы говорим о профиле распределения скорости v — имея в виду лишь простоту записи формул. Фактически более интересной величиной является избыточное давление p', отличающееся от v лишь постоянным множителем: $p' = v/(\rho_0 c_0)$; к нему относятся такие же результаты. Отметим, что знак v совпадает со знаком p', так что $v > 0$ отвечает сжатию, а $v < 0$ — разрежению. Скорость перемещения точек профиля выражается через p' формулой

$$u = c_0(1 + \nu_0 p'/p_0), \quad \nu = \alpha p/(\rho c^2)$$

(для политропного газа $\nu = (\gamma + 1)/(2\gamma)$).

[2]) Индекс же 0, отличающий равновесные значения величин, будем ниже опускать.

При $t \to \infty$ величина скачка в ударной волне и ее энергия затухают асимптотически как $t^{-1/2}$ (или, что то же, как $x^{-1/2}$ — с расстоянием $x = ct$). Длина же импульса возрастает как $t^{1/2}$. Обратим внимание также на то, что предельное значение угла наклона профиля $\Delta v/l \to 1/(\alpha t)$ не зависит ни от величины скачка, ни от длины импульса.

Рассмотрим теперь предельные (на больших расстояниях от источника) свойства ударных волн, образующихся в цилиндрических и сферических звуковых волнах (*Л.Д. Ландау*, 1945), Начнем с цилиндрического случая.

На достаточно больших расстояниях r от оси такую волну в каждом небольшом ее участке можно рассматривать как плоскую. Скорость перемещения каждой точки профиля волны будет тогда определяться формулой (102.1). Однако если мы хотим проследить с помощью этой формулы за смещением точки профиля на протяжении больших промежутков времени, то необходимо учесть, что амплитуда цилиндрической волны уже в первом приближении падает с расстоянием как $r^{-1/2}$. Это значит, что для каждой точки профиля v будет не постоянной (как для плоской волны), а будет убывать как $r^{-1/2}$. Если v_1 есть значение v (для заданной точки профиля) на расстоянии (большом) r_1, то можно написать $v = v_1(r_1/r)^{1/2}$. Таким образом, для скорости u точек профиля волны будем иметь

$$u = c + \alpha v_1\sqrt{\frac{r_1}{r}}. \tag{102.7}$$

Первый член представляет собой обычную скорость звука и соответствует перемещению волны «без изменения формы профиля» (отвлекаясь от общего уменьшения амплитуды как $r^{-1/2}$, т. е. понимая под профилем распределение величины $v\sqrt{r}$). Второй же член приводит к искажению профиля. Величина δr этого дополнительного смещения точек профиля в течение времени $(r-r_1)/c$ получится интегрированием по dr/c:

$$\delta r = 2\alpha\frac{v_1}{c}\sqrt{r_1}\left(\sqrt{r} - \sqrt{r_1}\right). \tag{102.8}$$

Искажение профиля цилиндрической волны растет медленнее, чем у плоской волны (где смещение δx растет пропорционально самому проходимому расстоянию x). Но и здесь оно, разумеется, приводит в конце концов к образованию разрывов. Рассмотрим ударные волны, образующиеся в достаточно далеко удалившемся от источника (оси) одиночном цилиндрическом звуковом импульсе.

Цилиндрический случай существенно отличается от плоского прежде всего тем, что одиночный импульс не может состоять

из одного только сжатия или только разрежения; если за передним фронтом звукового импульса имеется область сжатия, то за ней должна следовать область расширения (см. § 71) [1]. Точка максимального разрежения будет отставать от всех расположенных сзади нее, в результате чего и здесь возникнет опрокидывание профиля и появится разрыв. Таким образом, в цилиндрическом звуковом импульсе образуются две ударные волны. В переднем разрыве скорость скачком возрастает от нуля, затем следует область постепенного уменьшения сжатия, сменяющегося разрежением, после чего давление вновь возрастает скачком во втором разрыве. Но цилиндрический звуковой импульс специфичен (по сравнению как с плоским, так и сферическим случаями) еще и в том отношении, что он не сможет иметь заднего фронта — стремление v к нулю происходит лишь асимптотически. Это приводит к тому, что в заднем разрыве v возрастает не до нуля, а лишь до некоторого конечного (отрицательного) значения, и лишь затем асимптотически стремится к нулю. В результате возникает профиль изображенного на рис. 84 вида.

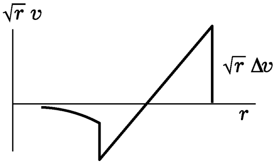


Рис. 84

Предельный закон, по которому будет происходить окончательное затухание ударных волн со временем (или, что то же, с расстоянием r от оси), можно найти аналогично тому, как это было сделано выше для плоского случая. Из приведенного там вывода видно, что предельный закон отвечает времени, когда смещение δr верхней точки профиля становится уже большим но сравнению с «первоначальной» шириной импульса l_1 (под которой будем понимать, например, расстояние от переднего разрыва до точки с $v = 0$). Это смещение на пути от r_1 до $r \ll r_1$ есть

$$\delta r \approx \frac{2\alpha}{c}(\Delta v)_1\sqrt{r_1 r},$$

где $(\Delta v)_1$ «первоначальный» (на расстоянии r_1) скачок на переднем разрыве. Тогда «конечный» тангенс угла наклона линейной части профиля между разрывами будет $\approx\sqrt{r_1}(\Delta v)_1/\delta r \approx \approx c/(2\alpha\sqrt{r})$. Условие постоянства площади профиля дает

$$l_1\sqrt{r_1}(\Delta v)_1 = l^2 c/(\alpha\sqrt{r}),$$

откуда $l \propto r^{1/4}$ (вместо закона $l \propto x^{1/2}$ в плоском случае). Предельный закон убывания скачка Δv в переднем разрыве получается затем из $l\sqrt{r}\Delta v = \text{const}$, т. е.

$$\Delta v \propto r^{-3/4}. \tag{102.9}$$

[1]) Мы будем иметь в виду именно такое расположение. Оно отвечает, в частности, применению излагаемых результатов к ударным волнам, возникающим при сверхзвуковом движении конечного тела (§ 122).

Наконец, рассмотрим сферический случай [1]. Общее убывание амплитуды расходящейся звуковой волны происходит как $1/r$ (где r — теперь расстояние от центра). Повторяя все изложенные выше для цилиндрического случая рассуждения, получим для скорости перемещения точек профиля волны

$$u = c + \frac{\alpha v_1 r_1}{r}, \tag{102.10}$$

после чего найдем смещение δr точки профиля на пути от r_1 до r:

$$\delta r = \frac{\alpha v_1 r_1}{c} \ln \frac{r}{r_1}. \tag{102.11}$$

Мы видим, что искажение профиля сферической волны растет с расстоянием лишь логарифмически — гораздо медленнее, чем в плоском и даже цилиндрическом случаях.

Сферическое распространение звукового импульса сжатия должно сопровождаться, как и в цилиндрическом случае, следующим за сжатием разрежением (см. § 70). Поэтому и здесь должны образоваться два разрыва (сферический одиночный импульс может, однако, иметь задний фронт и тогда во втором разрыве v возрастает скачком сразу до нуля) [2]. Тем же способом найдем предельные законы возрастания длины импульса и убывания интенсивности ударной волны:

$$l \propto \sqrt{\ln \frac{r}{a}}, \quad \Delta v \propto \frac{1}{r\sqrt{\ln(r/a)}}, \tag{102.12}$$

где a — некоторая постоянная размерности длины [3].

Задачи

1. В начальный момент профиль волны состоит из неограниченного ряда зубцов, изображенных на рис. 85 [4]. Определить изменение профиля и энергии волны со временем.

Решение. Заранее очевидно, что в последующие моменты времени t профиль волны будет состоять из зубцов такого же вида, с той же длиной l_0, но меньшей высотой v_t. Рассмотрим один из зубцов: в момент $t = 0$ абсцисса

[1]) Речь может идти, например, об ударной волне, возникающей при взрыве, и рассматриваемой на больших расстояниях от источника.

[2]) Поскольку фактически в газе всегда имеет место обычное поглощение звука, связанное с теплопроводностью и вязкостью, то ввиду медленности искажения сферической волны она может поглотиться прежде, чем успеют образоваться разрывы.

[3]) Эта постоянная не совпадает, вообще говоря, с r_1. Дело в том, что аргумент логарифма должен быть безразмерным и потому при $r \gg r_1$ нельзя просто пренебречь $\ln r_1$ в (102.11). Определение же коэффициента при r в большом логарифме требует более точного учета первоначальной формы профиля.

[4]) Такой профиль — асимптотическая форма профиля любой периодической волны.

точки профиля с $v = v_t$ отсекает часть $v_t l_1/v_1$ от основания треугольника. В течение же времени t эта точка выдвигается вперед на расстояние $\alpha v_t t$. Условие неизменности длины основания треугольника дает $l_1 v_t/v_1 + \alpha t v_t = l_1$, откуда

$$v_t = v_1/(1 + \alpha v_1 t/l_1).$$

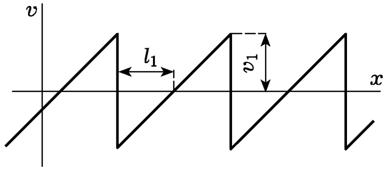


Рис. 85

При $t \to \infty$ амплитуда волны затухает как $1/t$. Для энергии находим

$$E = E_0(1 + \alpha v_1 t/l_1)^{-2};$$

она затухает при $t \to \infty$ как t^{-2}.

2. Определить интенсивность второй гармоники, возникающей в монохроматической сферической волне благодаря искажению ее профиля.

Р е ш е н и е. Написав волну в виде $rv = A\cos(kr - \omega t)$, мы можем учесть искажение в первом приближении, прибавив δr к r в правой части равенства и разлагая по степеням δr. Это дает с помощью (102.11):

$$rv = A\cos(kr - \omega t) - \frac{\alpha k}{2c} A^2 \ln\frac{r}{r_1} \sin[2(kr - \omega t)]$$

(под r_1 надо понимать здесь расстояние, на котором волну можно еще рассматривать с достаточной точностью как строго монохроматическую). Второй член в этой формуле определяет вторую гармонику спектрального разложения волны. Ее полная (средняя по времени) интенсивность I_2 равна

$$I_2 = \frac{\alpha^2 k^2}{8\pi c^3 \rho}\left(\ln\frac{r}{r_1}\right)^2 I_1^2,$$

где $I_1 = 2\pi c\rho A^2$ есть интенсивность основной, первой, гармоники.

§ 103. Характеристики

Данное в § 82 определение характеристик как линий, вдоль которых распространяются (в приближении геометрической акустики) малые возмущения, имеет общее значение, и не ограничено применением к плоскому стационарному сверхзвуковому течению, о котором речь шла в § 82.

Для одномерного нестационарного движения можно ввести характеристики как линии в плоскости xt, угловой коэффициент которых dx/dt равен скорости распространения малых возмущений относительно неподвижной системы координат. Возмущения, распространяющиеся относительно газа со скоростью звука в положительном или отрицательном направлении оси x, перемещаются относительно неподвижной системы со скоростью $v + c$ или $v - c$. Соответственно дифференциальные уравнения двух семейств характеристик, которые мы будем условно называть характеристиками C_+ и C_-, гласят:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = v + c, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_- = v - c. \tag{103.1}$$

Возмущения же, переносящиеся вместе с веществом газа, «распространяются» в плоскости xt по характеристикам третьего

семейства C_0, для которых

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v. \tag{103.2}$$

Это — просто «линии тока» в плоскости xt (ср. конец § 82) [1]. Подчеркнем, что для существования характеристик здесь отнюдь не требуется, чтобы движение газа было сверхзвуковым. Выражаемая характеристиками направленность распространения возмущений соответствует здесь просто причинной связи движения в последующие моменты времени с предыдущим движением.

В качестве примера рассмотрим характеристики простой волны. Для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, имеем согласно (101.5): $x = t(v + c) + f(v)$. Дифференцируя это соотношение, получаем

$$dx = (v + c)dt + dv[t + tc'(v) + f'(v)].$$

С другой стороны, вдоль характеристики C_+ имеем $dx = (v + c)dt$; сравнивая оба равенства, найдем, что вдоль характеристики $dv[t + tc'(v) + f'(v)] = 0$. Выражение в квадратных скобках не может быть равно нулю тождественно. Поэтому должно быть $dv = 0$, т. е. $v = \text{const}$. Таким образом, мы приходим к выводу, что вдоль каждой из характеристик C_+ остается постоянной скорость, а с нею и все остальные величины (в волне, распространяющейся влево, таким же свойством обладают характеристики C_-). Мы увидим в следующем параграфе, что это обстоятельство не случайно, а органически связано с математической природой простых волн.

Из этого свойства характеристик C_+ простой волны можно в свою очередь заключить, что они представляют собой семейство прямых линий в плоскости xt; скорость имеет постоянные значения вдоль прямых $x = f[v + c(v)] + f(v)$ (101.5). В частности, в автомодельной волне разрежения (простая волна с $f(v) = 0$) эти прямые образуют пучок с общей точкой пересечения — началом координат плоскости xt. Ввиду этого свойства автомодельную простую волну называют *центрированной*.

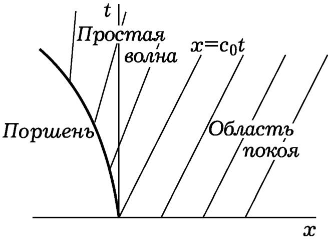


Рис. 86

На рис. 86 изображено семейство характеристик C_+ для простой волны разрежения, образующейся при ускоренном выдви-

[1]) Точно такими же уравнениями (103.1), (103.2) определяются характеристики и для нестационарного сферически симметричного движения, причем надо только заменить x на сферическую координату r (характеристики будут теперь линиями в плоскости rt).

гании поршня из трубы. Это есть семейство расходящихся прямых, начинающихся на кривой $x = X(t)$, изображающей движение поршня. Справа от характеристики $x = c_0 t$ простирается область покоящегося газа, в которой все характеристики параллельны друг другу.

На рис. 87 дан аналогичный чертеж для простой волны сжатия, образующейся при ускоренном вдвигании поршня в трубу. В этом случае характеристики представляют собой сходящийся пучок прямых, которые в конце концов должны пересечься друг с другом. Поскольку каждая характеристика несет свое постоянное значение v, их пересечение друг с другом означает физически бессмысленную многозначность функции $v(x, t)$.Это — геометрическая интерпретация результата о невозможности неограниченного существования простой волны сжатия и неизбежности возникновения в ней ударной волны, к которому мы пришли уже аналогичным путем в § 101. Геометрическое же истолкование условий (101.12), определяющих время и место образования ударной волны, заключается в следующем. Пересекающееся семейство прямолинейных характеристик имеет огибающую, заканчивающуюся со стороны малых t угловой точкой, которая и определяет первый момент возникновения многозначности. Если уравнения характеристик заданы в параметрическом виде $x = x(v)$, $t = t(v)$, то положение угловой точки как раз и определяется уравнениями (101.12) [1].

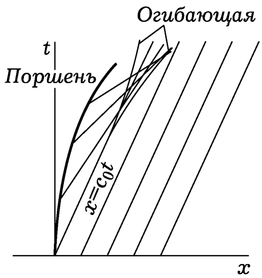


Рис. 87

Покажем теперь коротко, каким образом данное нами физическое определение характеристик как линий распространения возмущений соответствует известному из теории дифференциальных уравнений в частных производных чисто математическому аспекту этого понятия. Рассмотрим уравнение в частных производных вида

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + D = 0, \tag{103.3}$$

линейное по вторым производным (коэффициенты же A, B, C, D могут быть любыми функциями как от независимых переменных x, t, так и от неизвестной функции φ и ее первых произ-

[1]) Вся область между двумя ветвями огибающей трижды покрыта характеристиками — в соответствии с трехзначностью величин, возникающей при опрокидывании профиля волны.

Особому случаю, когда ударная волна возникает на границе с областью покоя, соответствует вырождение одной из ветвей огибающей в отрезок характеристики $x = c_0 t$.

водных) [1]. Уравнение (103.3) относится к эллиптическому типу, если везде $B^2 - AC < 0$, и к гиперболическому, если $B^2 - AC > 0$. В последнем случае уравнение

$$A\,dt^2 - 2B\,dx\,dt + C\,dx^2 = 0, \tag{103.4}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}, \tag{103.5}$$

определяет в плоскости xt два семейства кривых — характеристик (для заданного решения $\varphi(x,\,y)$ уравнения (103.3)). Укажем, что если коэффициенты A, B, C в уравнении являются функциями только от x, t, то характеристики не зависят от конкретного решения уравнения.

Пусть данное течение описывается некоторым решением $\varphi = \varphi(x,\,t)$ уравнения (103.3), и наложим на него малое возмущение φ_1. Это возмущение предполагаем удовлетворяющим условиям, соответствующим геометрической акустике: оно слабо меняет движение (φ_1 мало вместе со своими первыми производными), но сильно меняется на протяжении малых расстояний (вторые производные от φ_1 относительно велики). Полагая в уравнении (103.3) $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, получим тогда для φ_1 уравнение

$$A\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial t} + C\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = 0,$$

причем в коэффициентах A, B, C положено $\varphi = \varphi_0$. Следуя методу, принятому для перехода от волновой к геометрической оптике, пишем φ_1 в виде $\varphi_1 = ae^{i\psi}$, где функция ψ (эйконал) — большая величина, и получаем для последней уравнение

$$A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t} + C\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{103.6}$$

Уравнение распространения лучей в геометрической акустике получается приравниванием dx/dt групповой скорости:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk},$$

где

$$k = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Дифференцируя соотношение

$$Ak^2 - 2Bk\omega + C\omega^2 = 0,$$

[1]) Для одномерного нестационарного движения уравнению такого вида удовлетворяет потенциал скорости.

получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B\omega - Ak}{C\omega - Bk},$$

а исключая отсюда с помощью того же соотношения k/ω, мы снова придем к уравнению (103.5).

З а д а ч а

Найти уравнение второго семейства характеристик в центрированной простой волне в политропном газе.

Р е ш е н и е. В центрированной простой волне, распространяющейся в сторону находящегося справа от нее неподвижного газа, имеем

$$\frac{x}{t} = v + c = c_0 + \frac{\gamma+1}{2}v.$$

Характеристики C_+ изображаются пучком прямых $x = \text{const}\cdot t$. Характеристики же C_- определяются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v - c = \frac{3-\gamma}{\gamma+1}\frac{x}{t} - \frac{4}{\gamma+1}c_0.$$

Интегрируя, находим

$$x = -\frac{2}{\gamma-1}c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_0 t_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}},$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы характеристика C_- проходила через точку $x = c_0 t_0$, $t = t_0$ на характеристике C_+ $(x = c_0 t)$, граничной между простой волной и областью покоя.

«Линии тока» в плоскости xt даются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t} - c_0\right),$$

откуда для характеристик C_0:

$$x = -\frac{2}{\gamma-1}c_0 t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_0 t_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

§ 104. Инварианты Римана

Произвольное малое возмущение распространяется, вообще говоря, по всем трем характеристикам (C_+, C_-, C_0), исходящим из данной точки плоскости xt. Можно, однако, разложить произвольное возмущение на такие части, каждая из которых распространяется лишь по одной из характеристик.

Рассмотрим сначала изэнтропическое движение газа. Напишем уравнение непрерывности и уравнение Эйлера в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

в уравнении непрерывности мы заменили производные от плотности на производные от давления согласно

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Разделив первое уравнение на $\pm\rho c$ и сложив его со вторым, получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\right)(v \pm c) = 0. \qquad (104.1)$$

Далее, введем в качестве новых неизвестных функций величины

$$J_+ = v + \int \frac{dp}{\rho c}, \quad J_- = v - \int \frac{dp}{\rho c}, \qquad (104.2)$$

называемые *инвариантами Римана*. Напомним, что при изэнтропическом движении ρ и c являются определенными функциями от p, и потому стоящие здесь интегралы имеют определенный смысл. Для политропного газа

$$J_+ = v + \frac{2}{\gamma - 1}c, \quad J_- = v - \frac{2}{\gamma - 1}c. \qquad (104.3)$$

После введения этих величин уравнения движения приобретают простой вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v + c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_+ = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (v - c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_- = 0. \qquad (104.4)$$

Дифференциальные операторы, действующие на J_+ и J_-, представляют собой не что иное, как операторы дифференцирования в плоскости xt вдоль характеристик C_+ и C_-. Таким образом, мы видим, что вдоль каждой из характеристик C_+ и C_- остается постоянной соответственно величина J_+ или J_-. Мы можем также сказать, что малые возмущения величины J_+ распространяются только вдоль характеристик C_+, а возмущения J_- — вдоль C_-.

В общем случае неизэнтропического движения уравнения (104.1) не могут быть написаны в виде (104.4), так как $dp/(\rho c)$ не является полным дифференциалом. Эти уравнения, однако, по-прежнему позволяют выделить возмущения, распространяющиеся по характеристикам лишь одного семейства. Таковыми являются возмущения вида $\delta v \pm \delta p/(\rho c)$, где δv и δp — произвольные малые возмущения скорости и давления. Распространение этих возмущений описывается линеаризованными уравнениями

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v \pm c)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(\delta v \pm \frac{\delta p}{\rho c}\right) = 0. \qquad (104.5)$$

Полная система уравнений движения малых возмущений получается добавлением сюда еще и уравнения адиабатичности

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right]\delta s = 0, \qquad (104.6)$$

показывающего, что возмущения δs распространяются вдоль характеристик C_0. Произвольное малое возмущение всегда можно разложить на независимые части указанных трех видов.

Сравнение с формулой (101.4) показывает, что инварианты Римана (104.2) совпадают с теми величинами, которые в простых волнах постоянны вдоль всей области движения в течение всего времени: в простой волне, распространяющейся вправо, постоянно J_-, а в волне, бегущей влево, постоянно J_+. С математической точки зрения это есть основное свойство простых волн. Из него следует, в частности, и указанное в предыдущем параграфе свойство — прямолинейность одного из семейств характеристик. Пусть, например, волна распространяется вправо. Каждая из характеристик C_+ несет свое постоянное значение J_+ и, кроме того, на ней постоянна являющаяся постоянной во всей области величина J_-. Но из постоянства двух величин J_+ и J_- следует, что постоянны также и v и p (а с ними и все остальные величины), и мы приходим к найденному в § 103 свойству характеристик C_+, непосредственно ведущему к их прямолинейности.

Если в двух смежных областях плоскости xt течение описывается двумя аналитически различными решениями уравнений движения, то граница между этими областями есть характеристика. Действительно, эта граница представляет собой разрыв производных каких-либо величин, т. е. некоторый слабый разрыв; последние же непременно совпадают с какой-либо характеристикой.

Весьма существенное значение в теории изэнтропического одномерного движения имеет следующее свойство простых волн: течение в области, граничащей с областью постоянного течения (течения с $v = \text{const}$, $p = \text{const}$), есть непременно простая волна.

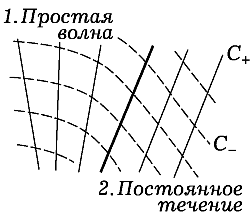


Рис. 88

Доказательство этого утверждения очень просто. Пусть интересующая нас область *1* плоскости xt граничит справа с областью *2* постоянного течения (рис. 88). В последней, очевидно, постоянны оба инварианта J_+ и J_-, а оба семейства характеристик прямолинейны. Граница между обеими областями есть одна из характеристик C_+, и линии C_+ одной области не переходят в другую область. Характеристики же C_- непрерывно продолжаются из одной области в другую и, покрывая область *1*, приносят в нее из области *2* постоянное значение J_-. Таким образом, величина J_- будет постоянна и вдоль всей области *1*, так что последняя есть простая волна.

Свойство характеристик переносить вдоль себя постоянные значения определенных величин проливает свет на общую постановку вопроса о задании начальных и граничных условий к

уравнениям гидродинамики. В различных конкретных физических задачах выбор этих условий обычно не вызывает сомнений и диктуется непосредственно физическими соображениями. В более сложных случаях могут, однако, оказаться полезными и чисто математические соображения, основанные на общих свойствах характеристик.

Будем для определенности говорить об изэнтропическом одномерном движении газа. С чисто математической точки зрения постановка газодинамической задачи сводится обычно к определению двух искомых функций (например, v и p) в области плоскости xt, лежащей между двумя заданными кривыми (OA и OB на рис. 89 *а*), на которых задаются граничные значения. Вопрос заключается в том, значения скольких величин должны быть заданы на этих кривых. В этом смысле существенно, как расположена каждая кривая по отношению к направлениям исходящих [1]) из каждой ее точки двух ветвей характеристик C_+ и C_- (показанным на рис. 89 стрелками). Могут представиться два случая: либо оба направления характеристик лежат по одну сторону от кривой, либо кривая расположена между ними. На рис. 89 *а* кривая OA относится к первому, а OB — ко второму случаю. Ясно, что для полного определения искомых функций в области AOB на кривой OA должны быть заданы значения двух величин (например, обоих инвариантов J_+ и J_-), а на кривой OB — всего одной. Действительно, значения второй величины будут перенесены на кривую OB с кривой OA характеристиками соответствующего семейства и потому не могут быть заданы произвольным образом [2]). Аналогично, на рис. 89 *б*, *в* изображены случаи, когда на обеих граничных кривых должны быть заданы по одной или по две величины.

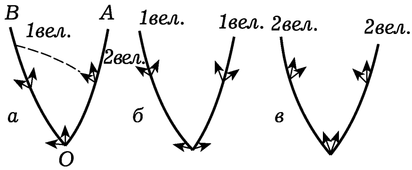


Рис. 89

Следует также указать, что если граничная кривая совпадает с какой-либо характеристикой, то на ней вообще невозможно произвольное задание двух независимых величин, так как их

[1]) В плоскости xt «исходящими» из заданной точки ветвями характеристик являются ветви, направленные в сторону возрастания t.

[2]) Для иллюстрации укажем пример такого случая: задача о движении газа при вдвигании или выдвигании поршня из бесконечной трубы. Здесь речь идет о нахождении решения газодинамических уравнений в области плоскости xt между двумя линиями: правой полуосью x и линией $x = X(t)$, изображающей движение поршня (см. рисунки 86, 87). На первой линии задаются значения двух величин (начальные условия $v = 0$, $p = p_0$ при $t = 0$), а на второй — всего одной величины ($v = u$, где $u(t)$ — скорость поршня).

значения связаны друг с другом одним условием — условием постоянства соответствующего инварианта Римана.

Аналогичным образом может быть разобран вопрос о задании граничных условий в общем случае неизэнтропического движения.

Выше мы говорили везде о характеристиках одномерного движения как о линиях в плоскости xt. Характеристики могут, однако, быть определены и в плоскости любых других двух переменных, описывающих движение. Можно, например, рассматривать характеристики в плоскости переменных vc. Для изэнтропического движения уравнения этих характеристик даются просто равенствами $J_+ = \text{const}$, $J_- = \text{const}$ с произвольными постоянными в их правых частях (будем называть их условно характеристиками Γ_+ и Γ_-). Так, для политропного газа это есть согласно (104.3) два семейства параллельных прямых (рис. 90).

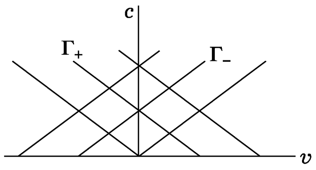


Рис. 90

Замечательно, что эти характеристики всецело определяются свойствами движущейся среды (газа) как таковой и не зависят от конкретного решения уравнений движения. Это связано с тем, что уравнение изэнтропического движения в переменных v, c есть (как мы увидим в следующем параграфе) линейное уравнение в частных производных второго порядка с коэффициентами, зависящими только от независимых переменных.

Характеристики в плоскостях xt и vc являются отображениями друг друга с помощью заданного решения уравнений движения. Это отображение, однако, отнюдь не должно быть взаимно однозначным. В частности, заданной простой волне соответствует всего одна характеристика в плоскости vc, на которую отображаются все характеристики плоскости xt. Так, для волны, бегущей вправо, это есть одна из характеристик Γ_-; характеристики C_- отображаются на всю линию Γ_-, а характеристики C_+ — на отдельные ее точки.

§ 105. Произвольное одномерное движение сжимаемого газа

Рассмотрим теперь общую задачу о произвольном одномерном изэнтропическом движении сжимаемого газа (без ударных волн) и покажем прежде всего, что эта задача может быть сведена к решению некоторого линейного дифференциального уравнения.

Всякое одномерное движение (движение, зависящее всего от одной пространственной координаты) непременно потенциально,

так как всякую функцию $v(x,\,t)$ можно представить в виде производной $v(x,\,t) = \partial\varphi(x,\,t)/\partial x$. Поэтому мы можем воспользоваться в качестве первого интеграла уравнения Эйлера уравнением Бернулли (9.3):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = 0.$$

С помощью этого равенства получаем для дифференциала $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt = v\,dx - \left(\frac{v^2}{2} + w\right)dt.$$

Независимыми переменными являются здесь x и t; произведем теперь переход к новым независимым переменным, выбрав в качестве таковых v и w. Для этого производим преобразование Лежандра; написав

$$d\varphi = d(xv) - x\,dv - d\left[t\left(w + \frac{v^2}{2}\right)\right] + t\,d\left(w + \frac{v^2}{2}\right)$$

и введя вместо потенциала φ новую вспомогательную функцию

$$\chi = \varphi - xv + t\left(w + \frac{v^2}{2}\right),$$

получаем

$$d\chi = -x\,dv + t\,d\left(w + \frac{v^2}{2}\right) = t\,dw + (vt - x)\,dv,$$

где χ рассматривается как функция от v и w. Сравнив это соотношение с равенством $d\chi = \dfrac{\partial\chi}{\partial w}\,dw + \dfrac{\partial\chi}{\partial v}\,dv$, имеем

$$t = \frac{\partial\chi}{\partial w}, \quad vt - x = \frac{\partial\chi}{\partial v},$$

или

$$t = \frac{\partial\chi}{\partial w}, \quad x = v\frac{\partial\chi}{\partial w} - \frac{\partial\chi}{\partial v}. \tag{105.1}$$

Если функция $\chi(v,\,w)$ известна, то по этим формулам определится зависимость v и w от координаты x и времени t.

Выведем теперь уравнение, определяющее χ. Для этого исходим из неиспользованного еще уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Преобразуем это уравнение к переменным v, w. Написав частные производные в виде якобианов, имеем

$$\frac{\partial(\rho,\,x)}{\partial(t,\,x)} + v\frac{\partial(t,\,\rho)}{\partial(t,\,x)} + \rho\frac{\partial(t,\,v)}{\partial(t,\,x)} = 0,$$

или, умножая на $\partial(t, x)/\partial(w, v)$:

$$\frac{\partial(\rho, x)}{\partial(w, v)} + v\frac{\partial(t, \rho)}{\partial(w, v)} + \rho\frac{\partial(t, v)}{\partial(w, v)} = 0.$$

При раскрытии этих якобианов надо иметь в виду следующее. Согласно уравнению состояния газа плотность ρ есть функция каких-либо двух других независимых термодинамических величин; например, можно рассматривать ρ как функцию от w и s. При $s = \text{const}$ тогда будет просто $\rho = \rho(w)$; существенно при этом, что в переменных v, w плотность оказывается не зависящей от v. Раскрывая якобианы, получаем поэтому

$$\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial x}{\partial v} - v\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial t}{\partial v} + \rho\frac{\partial t}{\partial w} = 0.$$

Подставляя сюда для t и x выражения (105.1), получаем после сокращений:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dw}\left(\frac{\partial\chi}{\partial w} - \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\chi}{\partial w^2} = 0.$$

При $s = \text{const}$ имеем $dw = dp/\rho$. Поэтому можно написать

$$\frac{d\rho}{dw} = \frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dw} = \frac{\rho}{c^2}.$$

Окончательно получаем для χ следующее уравнение:

$$c^2\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2} + \frac{\partial\chi}{\partial w} = 0 \qquad (105.2)$$

(скорость звука c надо рассматривать здесь как функцию от w). Задача об интегрировании нелинейных уравнений движения приведена, таким образом, к решению линейного уравнения.

Применим полученное уравнение к политропному газу. Здесь $c^2 = (\gamma - 1)w$, и основное уравнение (105.2) принимает вид

$$(\gamma - 1)w\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2} + \frac{\partial\chi}{\partial w} = 0. \qquad (105.3)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано в общем виде элементарным образом, если число $\dfrac{3-\gamma}{\gamma-1}$ является целым четным числом:

$$\frac{3-\gamma}{\gamma-1} = 2n, \qquad \gamma = \frac{3+2n}{2n+1}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (105.4)$$

Этому условию как раз удовлетворяют одноатомный ($\gamma = 5/3$, $n = 1$) и двухатомный ($\gamma = 7/5$, $n = 2$) газы. Вводя n вместо γ, переписываем (105.3) в виде

$$\frac{2}{2n+1}w\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2} + \frac{\partial\chi}{\partial w} = 0. \qquad (105.5)$$

Будем обозначать функцию, удовлетворяющую этому уравнению при заданном n, посредством χ_n. Для функции χ_0 имеем

$$2w\frac{\partial^2\chi_0}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi_0}{\partial v^2} + \frac{\partial\chi_0}{\partial w} = 0.$$

Введя вместо w переменную $u = \sqrt{2w}$, получаем

$$\frac{\partial^2\chi_0}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\chi_0}{\partial v^2} = 0.$$

Но это есть обычное волновое уравнение, общее решение которого есть: $\chi_0 = f_1(u+v) + f_2(u-v)$, где f_1, f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$\chi_0 = f_1(\sqrt{2w}+v) + f_2(\sqrt{2w}-v). \tag{105.6}$$

Покажем теперь, что если известна функция χ_n, то функцию χ_{n+1} можно получить простым дифференцированием. В самом деле, дифференцируя уравнение (105.5) по w, получаем после перегруппировки членов:

$$\frac{2}{2n+1}w\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right) + \frac{2n+3}{2n+1}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right) - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right) = 0.$$

Если ввести вместо v переменную

$$v' = v\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}},$$

то получим для $\partial\chi_n/\partial w$ уравнение

$$\frac{2}{2(n+1)+1}w\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right) - \frac{\partial^2}{\partial v'^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right) = 0,$$

совпадающее с уравнением (105.5) для функции $\chi_{n+1}(w,\, v')$. Таким образом, мы приходим к результату, что

$$\chi_{n+1}(w,\, v') = \frac{\partial}{\partial w}\chi_n(w,\, v) = \frac{\partial}{\partial w}\chi_n\left(w,\, \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}v'\right). \tag{105.7}$$

Применяя эту формулу n раз к функции χ_0 (105.6), получаем искомое общее решение уравнения (105.5):

$$\chi = \frac{\partial^n}{\partial w^n}\left[f_1\left(\sqrt{2(2n+1)w}+v\right) + f_2\left(\sqrt{2(2n+1)w}-v\right)\right],$$

или

$$\chi = \frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}}\left[\frac{F_1(\sqrt{2(2n+1)w}+v) + F_2(\sqrt{2(2n+1)w}-v)}{\sqrt{w}}\right], \tag{105.8}$$

где F_1, F_2 — снова две произвольные функции.

Если ввести вместо w скорость звука согласно

$$w = \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{2n+1}{2}c^2,$$

то решение (105.8) примет вид

$$\chi = \left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{c}F_1\left(c + \frac{v}{2n+1}\right) + \frac{1}{c}F_2\left(c - \frac{v}{2n+1}\right)\right]. \qquad (105.9)$$

Выражения

$$c \pm \frac{v}{2n+1} = c \pm \frac{\gamma - 1}{2}v,$$

стоящие в качестве аргумента в произвольных функциях, представляют собой не что иное, как инварианты Римана (104.3), постоянные на характеристиках.

В применениях часто возникает необходимость в вычислении значений функции $\chi(v,\, c)$ на характеристике. Для этой цели служит следующая формула [1]:

$$\left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{c}F\left(c \pm \frac{v}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}}{\partial c^{n-1}}\frac{F(2c+a)}{c^n}, \qquad (105.10)$$

при

$$\pm\frac{v}{2n+1} = c + a$$

(a — произвольная постоянная).

Выясним теперь, в каком взаимоотношении с найденным здесь общим решением газодинамических уравнений находится решение, описывающее простую волну. Последнее отличается тем свойством, что в нем v и w являются определенной функцией

[1]) Проще всего эту формулу можно вывести с помощью теории функций комплексного переменного, используя теорему Коши. Для произвольной функции $F(c+u)$ имеем

$$\left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c} = \\ = 2^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial c^2}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c} = 2^{n-1}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F\left(\sqrt{z}+u\right)}{\sqrt{z}(z-c^2)^n}\,dz,$$

где интеграл берется в плоскости комплексного переменного z по контуру, охватывающему точку $z = c^2$. Положив теперь $u = c + a$ и произведя в интеграле подстановку $\sqrt{z} = 2\zeta - c$, получим

$$\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F(2\zeta + a)}{\zeta^n(\zeta - c)^n}\,d\zeta,$$

где теперь контур интегрирования по ζ, охватывает точку $\zeta = c$; снова применяя теорему Коши, находим, что этот интеграл совпадает с написанным в тексте выражением.

друг от друга, $v = v(w)$, и поэтому обращается тождественно в нуль якобиан

$$\Delta = \frac{\partial(v,\, w)}{\partial(x,\, t)}.$$

Между тем при преобразовании к переменным v, w нам пришлось разделить уравнение движения на этот якобиан, в результате чего решение, для которого $\Delta \equiv 0$, оказалось потерянным.

Таким образом, простая волна не содержится непосредственно в общем интеграле уравнений движения, а является их особым интегралом.

Для понимания природы этого особого интеграла существенно, однако, что он может быть получен из общего интеграла путем своеобразного предельного перехода, тесно связанного с физическим смыслом характеристик как линий распространения малых возмущений. Представим себе, что область плоскости vw, в которой функция $\chi(v,\, w)$ отлична от нуля, стягивается к очень узкой в (пределе — к бесконечно узкой) полосе вдоль одной из характеристик. Производные от χ в поперечных к характеристике направлениях пробегают при этом значения в очень широком (в пределе — бесконечном) интервале, поскольку χ очень быстро убывает в этих направлениях. Такого рода решения $\chi(v,\, w)$ уравнений движения заведомо должны существовать. Действительно, рассматриваемые как «возмущение» в плоскости vw они удовлетворяют условиям геометрической акустики и, как должно быть для таких возмущений, расположены вдоль характеристики.

Из сказанного ясно, что при такой функции χ время $t = \partial\chi/\partial w$ будет пробегать сколь угодно большой интервал значений. Производная же от χ вдоль характеристики будет некоторой конечной величиной. Но вдоль характеристики (например, одной из характеристик Γ_-) имеем

$$\frac{dJ_-}{dv} = 1 - \frac{1}{\rho c}\frac{dp}{dw}\frac{dw}{dv} = 1 - \frac{1}{c}\frac{dw}{dv} = 0.$$

Поэтому производная от χ по v вдоль характеристики (обозначим ее как $-f(v)$) есть

$$\frac{d\chi}{dv} = \frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial\chi}{\partial v} + c\frac{\partial\chi}{\partial w} = -f(v).$$

Выражая частные производные от χ через x и t согласно (105.1), получим отсюда соотношение $x = (v + c)t + f(v)$, т. е. как раз уравнение (101.5) простой волны. Соотношение же (101.4), устанавливающее связь между v и c в простой волне, автоматически выполняется в силу постоянства J_- вдоль характеристики Γ_-.

В § 104 было показано, что если в некоторой части плоскости xt решение уравнений движения сводится к постоянному те-

чению, то в граничащих с нею областях должна иметься простая волна. Поэтому движение, описывающееся общим решением (105.8), может следовать за постоянным движением (в частности, за областью покоя), лишь через промежуточную стадию простой волны. Граница между простой волной и общим решением, как и всякая граница между областями двух аналитически различных решений, есть характеристика. При решении различных конкретных задач возникает необходимость в определении значения функции $\chi(w, v)$ на этой граничной характеристике.

Условие сшивания простой волны с общим решением на граничной характеристике получается подстановкой выражений (105.1) для x и t в уравнение простой волны $x = (v \pm c)t + f(v)$; это дает

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} \pm \frac{\partial\chi}{\partial w} + f(v) = 0.$$

Кроме того, в простой волне (и на граничной характеристике) имеем

$$dv = \pm\frac{dp}{\rho c} = \pm\frac{dw}{c},$$

или $\pm c = dw/dv$. Подставив это в написанное условие, получим

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{dw}{dv} + f(v) = \frac{d\chi}{dv} + f(v) = 0,$$

откуда окончательно

$$\chi = -\int f(v)\,dv, \qquad (105.11)$$

чем и определяется искомое граничное значение χ. В частности, если простая волна центрирована в начале координат, т. е. $f(v) \equiv 0$, то $\chi = \text{const}$; поскольку функция χ вообще определена лишь с точностью до аддитивной постоянной, то в этом случае можно, не уменьшая общности, положить на граничной характеристике $\chi = 0$.

Задачи

1. Определить движение, возникающее при отражении центрированной волны разрежения от твердой стенки.

Р е ш е н и е. Пусть волна разрежения возникает в момент $t = 0$ в точке $x = 0$ и распространяется в положительном направлении оси x; она дойдет до стенки через промежуток времени $t = l/c_0$, где l — расстояние до стенки. На рис. 91 изображена диаграмма характеристик для процесса отражения волны. В областях *1* и *1'* газ неподвижен, в области *3* движется с постоянной скоростью $v = -U$ [1]. Область *2* есть падающая волна разрежения (с прямолинейными характеристиками C_+), а *5* — отраженная волна (с прямолинейными характеристиками C_-). Область *4* есть «область взаимодействия», в которой должно быть найдено решение; попадая в эту область,

[1]) Если волна разрежения возникает от поршня, который начинает выдвигаться из трубы с постоянной скоростью, то U есть скорость поршня.

прямолинейные характеристики искривляются. Это решение вполне определяется граничными условиями на отрезках ab и ac. На ab (т. е. на стенке) должно быть $v = 0$ при $x = l$; ввиду (105.1) имеем отсюда условие

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} = -l \quad \text{при} \quad v = 0.$$

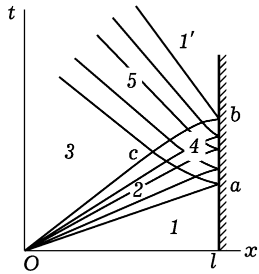


Рис. 91

Граница же ac с волной разрежения есть отрезок характеристики C_-; поэтому на нем

$$c - \frac{\gamma-1}{2}v = c - \frac{v}{2n+1} = \text{const},$$

а поскольку в точке a имеем $v = 0$, $c = c_0$, то const $=$ $= c_0$. На этой границе должно быть $\chi = 0$, так что имеем условие

$$\chi = 0 \quad \text{при} \quad c - \frac{v}{2n+1} = c_0.$$

Легко убедиться в том, что функция вида (105.9), удовлетворяющая этим условиям, есть

$$\chi = \frac{l(2n+1)}{2^n n!}\left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}\left(\left(c - \frac{v}{2n+1}\right)^2 - c_0^2\right)^n\right\}, \tag{1}$$

чем и определяется искомое решение.

Уравнение характеристики ac есть (см. задачу § 103)

$$x = -(2n+1)c_0 t + 2(n+1)l\left(\frac{tc_0}{l}\right)^{\frac{2n+1}{2(n+1)}}.$$

Ее пересечение с характеристикой Oc

$$\frac{x}{t} = c_0 - \frac{\gamma+1}{2}U = c_0 - \frac{2(n+1)}{2n+1}U$$

определяет момент исчезновения падающей волны:

$$t_c = \frac{l(2n+1)^{n+1}c_0^n}{[(2n+1)c_0 - U]^{n+1}}.$$

На рис. 91 предполагается, что $U < 2c_0/(\gamma+1)$; в противном случае характеристика Oc направлена в сторону отрицательных x (рис. 92). Процесс

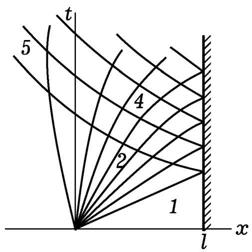


Рис. 92

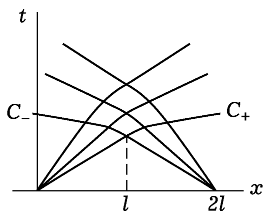


Рис. 93

взаимодействия падающей и отраженной волн длится при этом бесконечное (а не конечное, как на рис. 91) время.

Функция (1) описывает также и взаимодействие двух одинаковых центрированных волн разрежения, вышедших в момент времени $t = 0$ из точек

$x = 0$ и $x = 2l$ и распространяющихся навстречу друг другу, как это очевидно из соображений симметрии (рис. 93).

2. Вывести уравнение, аналогичное уравнению (105.3), для одномерного изотермического движения идеального газа.

Р е ш е н и е. Для изотермического движения в уравнении Бернулли вместо тепловой функции w стоит величина

$$\mu = \int \frac{dp}{\rho} = c_T^2 \int \frac{d\rho}{\rho} = c_T^2 \ln \rho,$$

где $c_T^2 = (\partial p/\partial \rho)_T$ — квадрат изотермической скорости звука; у идеального газа в изотермическом случае $c_T = \mathrm{const}$. Выбрав эту величину (вместо w) в качестве независимой переменной, получим тем же способом, что и в тексте, для функции χ следующее линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$c_T^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} = 0.$$

§ 106. Задача о сильном взрыве

Рассмотрим распространение сферической ударной волны большой мощности, возникшей в результате сильного взрыва, т. е. мгновенного выделения в некотором небольшом объеме большого количества энергии (которую обозначим буквой E); газ, в котором волна распространяется, будем считать политропным [1]).

Мы будем рассматривать волну на расстояниях, не слишком далеких от источника, в той области, где волна обладает еще большой интенсивностью. В то же время эти расстояния предполагаются большими по сравнению с размерами источника: это дает возможность считать, что выделение энергии E произошло в одной точке (в начале координат).

Большая интенсивность ударной волны означает, что скачок давления в ней очень велик. Мы будем считать, что давление p_2 позади разрыва настолько велико по сравнению с давлением p_1 невозмущенного газа впереди него, что

$$\frac{p_2}{p_1} \gg \frac{\gamma+1}{\gamma-1}.$$

Это дает возможность везде пренебрегать p_1 по сравнению с p_2, причем отношение плотностей ρ_2/ρ_1 будет равно своему предельному значению $(\gamma+1)/(\gamma-1)$ (см. § 89).

Таким образом, вся картина движения газа будет определяться всего двумя параметрами: начальной плотностью газа ρ_1 и вы-

[1]) Излагаемое ниже решение этой задачи получено независимо *Л.И. Седовым* (1946) и *Нейманом* (*J. von Neumann*, 1947). С меньшей полнотой (без построения аналитического решения уравнений) задача была рассмотрена *Тейлором* (*G.I. Taylor*, 1941, опубликовано в 1950).

деляющейся при взрыве энергией E. Из этих параметров и двух независимых переменных — времени t и координаты (расстояния от центра) r — можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию, которую мы напишем в виде

$$r(\rho_1/(Et^2))^{1/5}.$$

В результате все движение будет обладать определенной автомодельностью.

Прежде всего можно утверждать, что положение самой ударной волны в каждый момент времени должно соответствовать определенному постоянному значению указанной безразмерной комбинации. Тем самым сразу определяется закон перемещения ударной волны со временем; обозначив расстояние волны от центра буквой R, имеем

$$R = \beta\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{1/5}, \tag{106.1}$$

где β — числовая постоянная (зависящая от γ), которая сама определится в результате решения уравнений движения. Скорость распространения ударной волны (скорость относительно невозмущенного газа, т. е. относительно неподвижной системы координат):

$$u_1 = \frac{dR}{dt} = \frac{2R}{5t} = \frac{2\beta E^{1/5}}{5\rho_1^{1/5}t^{3/5}}. \tag{106.2}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче закон движения ударной волны определяется (с точностью до постоянного множителя) уже из простых соображений размерности.

Давление p_2, плотность ρ_2 и скорость $v_2 = u_2 - u_1$ газа (относительно неподвижной системы координат) на «задней» стороне разрыва могут быть выражены через u_1 по полученным в § 89 формулам. Согласно (89.10), (89.11) имеем [1])

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1}u_1, \quad \rho_2 = \rho_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 u_1^2. \tag{106.3}$$

Плотность остается постоянной во времени, а v_2 и p_2 убывают соответственно как $t^{-3/5}$ и $t^{-6/5}$. Отметим также, что создаваемое ударной волной давление p_2 растет с увеличением полной энергии взрыва как $E^{2/5}$.

Перейдем, далее, к определению движения газа во всей области за ударной волной. Введем вместо скорости v, плотности ρ

[1]) Определяемые формулами (89.11) скорости ударной волны относительно газа мы обозначаем здесь как u_1 и u_2.

газа и квадрата $c^2 = \gamma p/\rho$ скорости звука в нем (который заменит собой переменную p — давление) безразмерные переменные V, G, Z, определив их следующими соотношениями [1]:

$$v = \frac{2r}{5t}V, \quad \rho = \rho_1 G, \quad c^2 = \frac{4r^2}{25t^2}Z. \tag{106.4}$$

Величины V, G, Z могут быть функциями только одной безразмерной независимой «автомодельной» переменной, которую определим как

$$\xi = \frac{r}{R(t)} = \frac{r}{\beta}\left(\frac{\rho_1}{Et^2}\right)^{1/5}. \tag{106.5}$$

В соответствии с (106.3), на поверхности разрыва (т. е. при $\xi = 1$) они должны принимать значения

$$V(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \quad G(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad Z(1) = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}. \tag{106.6}$$

Уравнения центрально-симметричного адиабатического движения газа гласят:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial r}\right)\ln\frac{p}{\rho^\gamma} = 0.\end{gathered} \tag{106.7}$$

Последнее уравнение есть уравнение сохранения энтропии, в которое подставлено выражение (83.12) для энтропии политропного газа. После подстановки выражений (106.4) получается система уравнений в полных производных для функций V, G, Z. Интегрирование этой системы облегчается тем, что один из ее интегралов может быть написан непосредственно из следующих соображений.

Тот факт, что мы пренебрегаем давлением p_1 невозмущенного газа, означает, другими словами, что мы пренебрегаем первоначальной энергией газа по сравнению с энергией E, приобретаемой им в результате взрыва. Поэтому ясно, что полная энергия газа внутри ограниченной ударной волной сферы постоянна (и равна E). Более того, ввиду автомодельности движения очевидно, что должна оставаться неизменной энергия газа и внутри любой сферы меньшего радиуса, расширяющейся со временем по закону $\xi = \mathrm{const}$ с любым (а не только равным 1) значением const; радиальная скорость перемещения точек этой сферы равна $v_n = 2r/(5t)$ (ср. (106.2)).

[1]) Не смешивать обозначение V в этом и следующем параграфах с обозначением удельного объема в других местах!

Легко написать уравнение, выражающее это постоянство энергии. С одной стороны, в течение времени dt через поверхность сферы (площади $4\pi r^2$) уходит энергия

$$dt\cdot 4\pi r^2\rho v\Bigl(w+\frac{v^2}{2}\Bigr).$$

С другой стороны, за это же время объем сферы увеличивается на элемент $dt\cdot 4\pi r^2 v_n$, внутри которого заключен газ с энергией

$$dt\cdot 4\pi r^2 v_n\rho\Bigl(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\Bigr).$$

Приравняв эти два выражения друг другу, подставив ε и w из (83.10), (83.11) и введя безразмерные функции согласно (106.4), получим соотношение

$$Z=\frac{\gamma(\gamma-1)(1-V)V^2}{2(\gamma V-1)}, \tag{106.8}$$

которое и является искомым интегралом системы уравнений, автоматически удовлетворящим граничным условиям (106.6).

После установления интеграла (106.8) интегрирование системы уравнений элементарно, хотя и громоздко. Второе и третье из уравнений (106.7) дают

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\ln\xi}-(1-V)\frac{d\ln G}{d\ln\xi}&=-3V,\\ \frac{d\ln Z}{d\ln\xi}-(\gamma-1)\frac{d\ln G}{d\ln\xi}&=-\frac{5-2V}{1-V}.\end{aligned} \tag{106.9}$$

Из этих двух уравнений с помощью соотношения (106.8) выражаем производные $dV/d\ln\xi$ и $d\ln G/dV$ в виде функций только от V, после чего интегрирование с учетом граничных условий (106.6) приводит к следующим результатам:

$$\xi^5=\Bigl[\frac{\gamma+1}{2}V\Bigr]^{-2}\Bigl\{\frac{\gamma+1}{7-\gamma}[5-(3\gamma-1)V]\Bigr\}^{\nu_1}\Bigl[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\gamma V-1)\Bigr]^{\nu_2},$$

$$G=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\Bigl[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\gamma V-1)\Bigr]^{\nu_3}\Bigl\{\frac{\gamma+1}{7-\gamma}[5-(3\gamma-1)V]\Bigr\}^{\nu_4}\times$$
$$\times\Bigl[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(1-V)\Bigr]^{\nu_5}, \tag{106.10}$$

$$\nu_1=-\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)},\quad \nu_2=\frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1},\quad \nu_3=\frac{3}{2\gamma+1},$$

$$\nu_4=-\frac{\nu_1}{2-\gamma},\quad \nu_5=-\frac{2}{2-\gamma}.$$

Формулы (106.8), (106.10) дают полное решение поставленной задачи. Постоянная β, входящая в определение независимой переменной ξ, определяется условием

$$E = \int_0^R \rho\Big(\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)}\Big) \cdot 4\pi r^2\, dr,$$

выражающим равенство полной энергии газа энергии взрыва E. После введения безразмерных величин это условие принимает вид

$$\frac{16\pi}{25}\beta^5 \int_0^1 G\Big[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)}\Big]\xi^4\, d\xi = 1. \qquad (106.11)$$

Так, для воздуха ($\gamma = 7/5$) оказывается $\beta = 1{,}033$.

Из формул (106.10) легко видеть, что при $\xi \to 0$ функция V стремится к постоянному пределу, а функция G — к нулю по законам

$$V - \frac{1}{\gamma} \propto \xi^{5/\nu_2}, \quad G \propto \xi^{5\nu_3/\nu_2}.$$

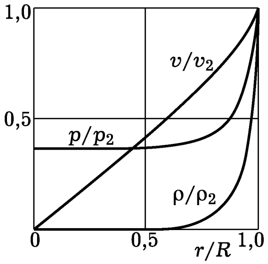


Рис. 94

Отсюда следует, что отношения v/v_2 и ρ/ρ_2 как функции отношения $r/R = \xi$ стремятся при $\xi \to 0$ к нулю по законам

$$v/v_2 \propto r/R, \quad \rho/\rho_2 \propto (r/R)^{3/(\gamma-1)}; \qquad (106.12)$$

отношение же давлений p/p_2 стремится к постоянному пределу, а отношение температур — соответственно к бесконечности [1]).

На рис. 94 изображены графически величины v/v_2, p/p_2 и ρ/ρ_2 как функции r/R для воздуха ($\gamma = 1{,}4$). Обращает на себя внимание очень быстрое убывание плотности по направлению внутрь сферы: почти все вещество сконцентрировано в сравнительно узком слое позади фронта ударной волны. Это обстоя-

[1]) Эти утверждения относятся к значениям $\gamma < 7$ (при этом функция $V(\xi)$ меняется от значения $V(1) = 2/(\gamma+1)$ до $V(0) = 1/\gamma$). Для реальных газов, термодинамические функции которых можно было бы аппроксимировать формулами для политропного газа, это неравенство заведомо выполняется (фактически верхним пределом γ является в этом смысле значение 5/3, отвечающее одноатомному газу). Укажем, однако, для формальной полноты, что при $\gamma > 7$ функция $V(\xi)$ меняется от значения $2/(\gamma+1)$ при $\xi = 1$ до предельного значения 1, достигаемого при определенном (зависящем от γ) значении $\xi = \xi_0 < 1$; в этой точке функция G обращается в нуль, т. е. возникает расширяющаяся сферическая область пустоты.

тельство является естественным следствием того, что по поверхности наибольшего, равного R, радиуса должно быть распределено вещество с шестикратной по сравнению с нормальной плотностью [1]).

§ 107. Сходящаяся сферическая ударная волна

Рядом поучительных особенностей обладает задача о сходящейся к центру ударной волне большой интенсивности [2]). Вопрос о конкретном механизме возникновения такой волны нас не будет интересовать; достаточно представлять себе, что волна создана каким-то «сферическим поршнем», сообщающим газу начальный толчок; по мере схождения к центру волна усиливается.

Мы будем рассматривать движение газа на той стадии процесса, когда радиус R сферической поверхности разрыва уже мал по сравнению с ее начальным радиусом — радиусом «поршня» R_0. На этой стадии характер движения в значительной степени (ниже будет видно — какой) не зависит от конкретных начальных условий. Ударную волну будем считать уже настолько сильной, что давлением p_1 газа перед ней можно (как и в предыдущем параграфе) пренебречь по сравнению с давлением p_2 позади нее. Что касается полной энергии газа, заключенной в рассматриваемой (переменной!) области $r \sim R \ll R_0$, то она отнюдь не постоянна (как будет видно ниже — убывает со временем).

Пространственный масштаб рассматриваемого движения может определяться лишь самим, меняющимся со временем, радиусом ударной волны $R(t)$, а масштаб скорости — производной dR/dt. В этих условиях естественно предположить, что движение будет автомодельным, с независимой «автомодельной переменной» $\xi = r/R(t)$. Однако зависимость $R(t)$ нельзя определить из одних только соображений размерности.

Примем момент фокусировки ударной волны (т. е. момент, когда R обращается в нуль) в качестве $t = 0$. Тогда времени до фокусировки отвечают значения $t < 0$. Будем искать функцию $R(t)$ в виде

$$R(t) = A(-t)^{\alpha} \tag{107.1}$$

с неизвестным заранее *показателем автомодельности* α. Оказывается, что этот показатель определяется условием существо-

[1]) Результаты вычислений для других значений γ, а также аналогичное решение задачи о сильном взрыве в случае цилиндрической симметрии приведены *Л.И. Седовым* в кн.: «Методы подобия и размерности в механике», изд. 9. — М.: Наука, 1981, гл. IV, § 11.

[2]) Эта задача была рассмотрена независимо *Гудерлеем* (*G. Guderley*, 1942) и *Л.Д. Ландау* и *К.П. Станюковичем* (1944, опубликовано в 1955).

вания самого решения уравнений движения (в области $r \ll R_0$) с надлежащими граничными условиями. Тем самым определяется и размерность постоянного параметра A. Величина же этого параметра остается неопределенной и может быть, в принципе, найдена лишь путем решения задачи о движении газа в целом, т. е. путем сшивки автомодельного решения с решением на расстояниях $r \sim R_0$, зависящим от конкретных начальных условий. Именно через этот параметр, и только через него, зависит движение при $R \ll R_0$ от способа начального создания ударной волны.

Покажем, как осуществляется решение поставленной таким образом задачи.

Подобно тому, как это было сделано в § 106, введем безразмерные неизвестные функции согласно определениям

$$v = \frac{\alpha r}{t} V(\xi), \quad \rho = \rho_1 G(\xi), \quad c^2 = \frac{\alpha^2 r^2}{t^2} Z(\xi), \tag{107.2}$$

где

$$\xi = \frac{r}{R(t)} = \frac{r}{A(-t)^{\alpha}} \tag{107.3}$$

(при $\alpha = 2/5$ определения (107.2) совпадают с (106.4)). Напомним, что v — радиальная скорость газа относительно неподвижной системы координат, связанной с неподвижным газом внутри сферы $r = R_0$; газ движется вместе с ударной волной по направлению к центру, чему отвечает $v < 0$ (так что $V(\xi) > 0$).

Фактически искомое решение уравнений движения относится лишь к области $r \sim R$ позади ударной волны, и к достаточно малым временам t (при которых $R \ll R_0$). Но формально получаемое решение охватывает все пространство $r \geqslant R$ — от поверхности разрыва до бесконечности, и все времена $t \leqslant 0$; при этом переменная ξ пробегает все значения от 1 до ∞. Соответственно, граничные условия для функций G, V, Z должны быть поставлены при $\xi = 1$ и $\xi = \infty$.

Значение $\xi = 1$ отвечает поверхности ударной волны; граничные условия на ней совпадают с (106.6).

Для установления условий на бесконечности (по ξ) замечаем, что при $t = 0$ (в момент фокусировки волны) все величины v, ρ, c^2 на всех конечных расстояниях от центра должны оставаться конечными. Но при $t = 0$, $r \neq 0$ переменная $\xi = \infty$.

Для того чтобы функции $v(r, t)$ и $c^2(r, t)$ при этом оставались конечными, функции $V(\xi)$ и $Z(\xi)$ должны обращаться в нуль,

$$V(\infty) = 0, \quad Z(\infty) = 0. \tag{107.4}$$

После подстановки (107.2), (107.3), система уравнений (106.7) принимает вид

$$(1-V)\frac{dV}{d\ln\xi}-\frac{Z}{\gamma}\frac{d\ln G}{d\ln\xi}-\frac{1}{\gamma}\frac{dZ}{d\ln\xi}=\frac{2}{\gamma}Z-V\left(\frac{1}{\alpha}-V\right),$$

$$\frac{dV}{d\ln\xi}-(1-V)\frac{d\ln G}{d\ln\xi}=-3V, \qquad (107.5)$$

$$(\gamma-1)Z\frac{d\ln G}{d\ln\xi}-\frac{dZ}{d\ln\xi}=\frac{2Z(1/\alpha-V)}{1-V}$$

(последние два уравнения — ср. с (106.9)). Отметим, что независимая переменная ξ входит в эти уравнения только в виде дифференциала $d\ln\xi$; постоянная $\ln A$ при этом выпадает из уравнений вовсе и, следовательно, остается неопределенной — в соответствии со сказанным выше.

Коэффициенты при производных в уравнениях (107.5) и их правые части содержат только V и Z (но не G) [1]). Решив эти уравнения относительно производных, мы выразим последние через эти две функции. Таким образом, получим уравнения

$$\frac{d\ln\xi}{dV}=-\frac{Z-(1-V)^2}{(3V-\varkappa)Z-V(1-V)(1/\alpha-V)}, \qquad (107.6)$$

$$(1-V)\frac{d\ln G}{d\xi}=3V-\frac{(3V-\varkappa)Z-V(1-V)(1/\alpha-V)}{Z-(1-V)^2} \qquad (107.7)$$

(где $\varkappa=2(l-\alpha)/(\alpha\gamma)$). В качестве же третьего напишем уравнение, получающееся делением производной $dZ/d\ln\xi$ на $dV/d\ln\xi$; оно гласит:

$$\frac{dZ}{dV}=\frac{Z}{1-V}\left\{\frac{[Z-(1-V)^2][2/\alpha-(3\gamma-1)V]}{(3V-\varkappa)Z-V(1-V)(1/\alpha-V)}+\gamma-1\right\}. \qquad (107.8)$$

Если найдено нужное решение уравнения (107.8), т. е. функциональная зависимость $Z(V)$, то после этого решение уравнений (107.6), (107. 7) (нахождение зависимости $\xi(V)$ и затем $G(\xi)$) сводится к квадратурам.

Таким образом, вся задача сводится прежде всего к решению уравнения (107.8). Интегральная кривая на плоскости VZ должна выходить из точки (назовем ее точкой Y) с координатами $V(1)$, $Z(1)$ — «образа» ударной волны на плоскости VZ. Указанием этой точки уже определяется решение уравнения (107.8) (при заданном α): интегральная кривая уравнения первого порядка однозначно определяется заданием одной (не особой) ее

[1]) Именно в этом состоит преимущество введения в качестве основных переменных v, ρ, c^2 вместо v, ρ, p.

точки. Выясним условие, позволяющее установить значение α, приводящее к «правильной» интегральной кривой.

Это условие возникает из очевидного физического требования: зависимости всех величин от ξ должны быть однозначными — каждому значению ξ должны отвечать единственные значения V, G, Z. Это значит, что во всей области изменения переменной ξ ($1 \leqslant \xi \leqslant \infty$, т. е. $0 \leqslant \ln\xi \leqslant \infty$) функции $\xi(V)$, $\xi(G)$, $\xi(Z)$ не должны иметь экстремумов. Другими словами, производные $d\ln\xi/dV$, ... должны нигде не обращаться в нуль. На рис. 95 кривая *1* — парабола

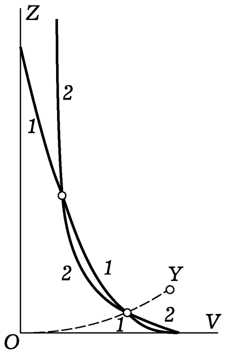


Рис. 95

$$Z = (1 - V)^2. \qquad (107.9)$$

Легко видеть, что точка Y лежит над ней [1]. Между тем, интегральная кривая, отвечающая решению поставленной задачи, должна прийти в начало координат — в соответствии с предельным условием (107.4); поэтому она непременно пересекает параболу (107.9). Но все указанные производные выражаются, согласно (107.6)–(107.8), дробными выражениями, в числителе которых стоит разность $Z-(1-V)^2$. Для того чтобы эти выражения не обращались в нуль в точке пересечения интегральной кривой с параболой (107.9), должно одновременно быть

$$(3V - \varkappa)Z = V(1 - V)(1/\alpha - V). \qquad (107.10)$$

Другими словами, интегральная кривая должна проходить через точку пересечения параболы (107.9) с кривой (107.10) (кривая *2* на рис. 95); эта точка — особая точка уравнения (107.8) (производная $dZ/dV = 0/0$). Этим условием и определяется значение показателя автомодельности α; приведем два значения, получающиеся в результате численных расчетов:

$$\alpha = 0{,}6884 \text{ при } \gamma = 5/3; \quad \alpha = 0{,}7172 \text{ при } \gamma = 7/5. \qquad (107.11)$$

Пройдя через особую точку, интегральная кривая устремляется в начало координат (точка O), отвечающее предельным значениям (107.4). Для уяснения математической ситуации, опишем кратко картину распределения интегральных кривых уравнения (107.8) на плоскости VZ (при «правильном» значении α), не проводя соответствующих вычислений [2].

[1] Это обстоятельство выражает собой просто тот факт, что скорость газа на задней стороне поверхности разрыва меньше скорости звука в нем.

[2] Исследование производится общими методами качественной теории дифференциальных уравнений. Классификацию типов особых точек уравнения первого порядка можно найти в кн.: *В.В. Степанов.* Курс дифференциальных уравнений, гл. II.

Кривые (107.9) и (107.10) пересекаются, вообще говоря, в двух точках — кружки на рис. 95 (помимо несущественной точки $V = 1$, $Z = 0$ на оси абсцисс). Кроме того, уравнение имеет особую точку c в пересечении кривой (107.10) с прямой $(3\gamma - 1)V = 2/\alpha$ (обращение в нуль второго множителя в числителе в (107.8)). Точка a, через которую проходит «правильная» интегральная кривая — точка типа седла; точки b и c — узлы. Узловой особой точкой является также и начало координат O. Вблизи последнего уравнение (107.8) принимает вид

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{2Z}{V + \varkappa Z}.$$

Элементарное интегрирование этого однородного уравнения показывает, что при $V \to 0$ функция $Z(V)$ стремится к нулю быстрее, чем V, а именно

$$Z \approx \text{const} \cdot V^2. \tag{107.12}$$

Таким образом, из начала координат выходит бесконечное множество интегральных кривых (отличающихся значением const в (107.12)). Все эти кривые входят затем в узел b или узел c — за исключением лишь одной, входящей в седловую точку a (одна из двух сепаратрис — единственных интегральных кривых, проходящих через седло) [1].

Началу координат отвечает $\xi = \infty$, т. е. момент фокусировки ударной волны в центре. Определим предельные распределения всех величин по радиальным расстояниям в этот момент. С учетом (107.12) из уравнений (107.6), (107.7) найдем, что

$$V = \text{const} \cdot \xi^{-1/\alpha}, \quad Z = \text{const} \cdot \xi^{-2/\alpha}, \quad G = \text{const} \;\; \text{при} \;\; \xi \to \infty \tag{107.13}$$

(значения постоянных коэффициентов могут быть найдены только путем фактического численного определения интегральной кривой на всем ее протяжении). Подставив эти выражения в определения (107.2), получим [2]

$$|v| \propto c \propto r^{-(1/\alpha - 1)}, \quad \rho = \text{const}, \quad p \propto r^{-2(1/\alpha - 1)}. \tag{107.14}$$

Эти законы можно было бы найти и прямо из соображений размерности (после того, как стала известной размерность A).

---

[1]) Описанная картина, как оказывается, имеет место лишь при $\gamma < \gamma_1 = 1{,}87\ldots$ При $\gamma = \gamma_1$ и «правильном» α точки a и b сливаются, а при $\gamma > \gamma_1$ картина распределения интегральных кривых меняется и требуется более глубокое исследование. Напомним, однако, что в физически реальных случаях $\gamma \leqslant 5/3$ (ср. примеч. на с. 560).

[2]) Предельное значение отношения ρ/ρ_1 в момент фокусировки равно 20,1 для $\gamma = 7/5$ и 9,55 для $\gamma = 5/3$.

В нашем распоряжении имеется два параметра, ρ_1 и A, и одна переменная r; из них можно составить всего одну комбинацию размерности скорости: $A^{1/\alpha}r^{1-1/\alpha}$; величиной же с размерностью плотности является лишь само ρ_1.

Найдем еще закон, по которому меняется со временем полная энергия газа в области автомодельного движения. Размеры (по радиусу) этой области — порядка величины радиуса R ударной волны и уменьшаются вместе с ним. Примем условно за границу автомодельной области некоторое определенное значение $r/R = \xi_1$. Полная энергия газа в сферическом слое между радиусами R и $\xi_1 R$ после введения безразмерных переменных выражается интегралом

$$E_{\text{авт}} = \frac{\alpha^2\rho_1 R^5}{t^2}\int\limits_1^{\xi_1} G\left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)}\right]\cdot 4\pi\xi^2\,d\xi$$

(ср. (106.11)). Интеграл здесь — постоянное число [1]). Поэтому находим, что

$$E_{\text{авт}} \propto R^{5-2/\alpha} \propto (-t)^{5\alpha-2}. \qquad (107.15)$$

Для всех реальных значений γ, показатель степени здесь положителен. Хотя интенсивность самой ударной волны растет по мере ее приближения к центру, но в то же время уменьшается объем области автомодельного движения и это приводит к уменьшению полной заключенной в ней энергии.

После фокусировки в центре возникает «отраженная» ударная волна, расширяющаяся (при $t > 0$) навстречу движущемуся к центру газу. Движение в этой стадии тоже автомодельно, с тем же показателем автомодельности α, так что закон расширения $R \propto t^\alpha$. Более подробным исследованием этого движения мы здесь заниматься не будем [2]).

Таким образом, рассмотренная задача дает пример автомодельного движения, в котором, однако, показатель автомодельности (т. е. вид автомодельной переменной ξ) не может быть определен из соображений размерности; он определяется лишь в результате решения самих уравнений движения, с учетом условий, диктуемых физической постановкой задачи. С математической точки зрения характерно, что эти условия формулируются как требование прохождения интегральной кривой дифференциального уравнения первого порядка через его особую точку. При

[1]) Интеграл расходится при $\xi_1 \to \infty$. Это обстоятельство — следствие неприменимости автомодельного режима на расстояниях $r \gg R$.

[2]) Укажем лишь, что отражение ударной волны сопровождается дальнейшим сжатием вещества, достигающим 145 для $\gamma = 7/5$ и 32,7 для $\gamma = 5/3$.

этом показатель автомодельности оказывается, вообще говоря, иррациональным числом [1]).

§ 108. Теория «мелкой воды»

Замечательную аналогию движению сжимаемого газа представляет движение в поле тяжести несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, если глубина слоя жидкости достаточно мала (мала по сравнению с характеристическими размерами задачи, например, по сравнению с размерами неровностей дна водоема). В этом случае поперечной компонентой скорости жидкости можно пренебречь по сравнению с продольной (вдоль слоя) скоростью, а последнюю можно считать постоянной вдоль толщины слоя. В этом приближении (называемом гидравлическим) жидкость можно рассматривать как «двумерную» среду, обладающую в каждой точке определенной скоростью $\mathbf{v}$ и, кроме того, характеризующуюся в каждой точке значением величины h — толщины слоя.

Соответствующие общие уравнения движения отличаются от уравнений, полученных в § 12, лишь тем, что изменения величин при движении не должны предполагаться малыми, как это делалось в § 12 при изучении длинных гравитационных волн малой амплитуды; в связи с этим в уравнении Эйлера должны быть сохранены члены второго порядка по скорости. В частности, для одномерного движения жидкости в канале, зависящего только от одной координаты x (и времени), эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x} \tag{108.1}$$

(глубина h предполагается здесь постоянной вдоль ширины канала).

Длинные гравитационные волны представляют собой, с общей точки зрения, малые возмущения движения рассматриваемой системы. Результаты § 12 показывают, что такие возмущения распространяются относительно жидкости с конечной скоростью, равной

$$c = \sqrt{gh}. \tag{108.2}$$

Эта скорость играет здесь роль скорости звука в газодинамике. Так же, как это было сделано в § 82, мы можем заключить, что

[1]) Другой пример автомодельного движения такого рода представляет задача о распространении ударной волны, создаваемой в результате короткого сильного удара по полупространству, заполненному газом (*Зельдович Я.Б.* // Акустич. журнал. 1956. Т. 2. С. 29). Изложение этой задачи можно найти также в указанной на с. 459 книге *Я.Б. Зельдовича* и *Ю.П. Райнера* (гл. XII) и в книге *Баренблатта Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — М.: Гидрометеоиздат, 1982, гл. 4.

если жидкость движется со скоростями $v < c$ (так называемое *спокойное течение*), то влияние возмущений распространяется на весь поток как вниз, так и вверх по течению. При движении же со скоростями $v > c$ (*стремительное течение*) влияние возмущений распространяется лишь на определенные области потока вниз по течению.

Давление p (отсчитываемое от атмосферного давления на свободной поверхности) меняется по глубине жидкости согласно гидростатическому закону $p = \rho g(h-z)$, где z — высота точки над дном. Полезно заметить, что если ввести величины

$$\overline{\rho} = gh, \quad \overline{p} = \int_0^h p\,dz = \frac{1}{2}\rho g h^2 = \frac{g}{2\rho}\overline{\rho}^2, \tag{108.3}$$

то уравнения (108.1) примут вид

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}v\overline{\rho} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}, \tag{108.4}$$

формально совпадающий с видом уравнений адиабатического течения политропного газа с $\gamma = 2(\overline{p} \propto \rho^2)$. Это обстоятельство позволяет непосредственно переносить в теорию «мелкой воды» все газодинамические результаты, относящиеся к движению без образования ударных волн. Два последних соотношения в теории мелкой воды отличаются от газодинамических соотношений для идеального газа.

«Ударная волна» в текущей по каналу жидкости представляет собой резкий скачок высоты жидкости h, а с нею и ее скорости v (так называемый *прыжок воды*). Соотношения между значениями этих величин по обе стороны разрыва можно получить с помощью условий непрерывности потоков массы и импульса жидкости. Плотность потока массы (отнесенная к 1 см ширины канала) есть $j = \rho v h$. Плотность же потока импульса получается интегрированием $p + \rho v^2$ по глубине жидкости и равна

$$\int_0^h (p + \rho v^2)\,dz = \frac{\rho g h^2}{2} + \rho v^2 h.$$

Поэтому условия их непрерывности дают два уравнения:

$$v_1 h_1 = v_2 h_2, \quad v_1^2 h_1 + \frac{g h_1^2}{2} = v_2^2 h_2 + \frac{g h_2^2}{2}. \tag{108.5}$$

Эти соотношения устанавливают связь между четырьмя величинами: v_1, v_2, h_1, h_2, две из которых могут быть заданы произвольно. Выражая скорости v_1, v_2 через высоты h_1, h_2, получим

$$v_1^2 = \frac{g}{2}\frac{h_2}{h_1}\big(h_1 + h_2\big), \quad v_2^2 = \frac{g}{2}\frac{h_1}{h_2}\big(h_1 + h_2\big). \tag{108.6}$$

Потоки же энергии по обе стороны разрыва неодинаковы; их разность определяет количество энергии, диссипируемой (в 1 с) в разрыве. Плотность потока энергии вдоль канала равна

$$q = \int\limits_0^h \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right)\rho v\, dz = \frac{1}{2} j(gh + v^2).$$

Воспользовавшись выражениями (108.6), получим для искомой разности

$$q_1 - q_2 = \frac{gj}{4h_1h_2}\left(h_1^2 + h_2^2\right)\left(h_2 - h_1\right).$$

Пусть жидкость движется через разрыв со стороны *1* на сторону *2*. Тогда тот факт, что энергия диссипируется, означает, что должно быть $q_1 - q_2 > 0$, и мы приходим к выводу, что

$$h_2 > h_1, \tag{108.7}$$

т. е. жидкость движется со стороны меньшей на сторону большей высоты. Из (108.6) можно теперь заключить, что

$$v_1 > c_1 = \sqrt{gh_1}, \quad v_2 < c_2 = \sqrt{gh_2} \tag{108.8}$$

в полной аналогии с газодинамическими ударными волнами. Неравенства (108.8) можно было бы найти и как необходимое условие устойчивости разрыва, подобно тому как это было сделано в § 88.

Задача

Найти условие устойчивости тангенциального разрыва на мелкой воде — линии, вдоль которой жидкость по обе стороны от нее движется с различными скоростями (*С.В. Безденков, О.П. Погуце*, 1983).

Решение. Ввиду указанной в тексте аналогии между гидродинамикой мелкой воды и динамикой сжимаемого политропного газа, поставленная задача эквивалентна задаче об устойчивости тангенциального разрыва в сжимаемом газе (задача 1 к § 84). Отличие состоит, однако, в том, что в случае мелкой воды должны рассматриваться возмущения, зависящие лишь от координат в плоскости жидкого слоя (вдоль скорости $\mathbf{v}$ и перпендикулярно к ней), но не от координаты z вдоль глубины слоя [1]): приближению мелкой воды отвечают возмущения с длиной волны $\lambda \gg h$. Поэтому найденная в задаче к § 84 скорость v_k оказывается теперь границей неустойчивости: разрыв устойчив при $v > v_k$ (v — скачок скорости на разрыве). Поскольку плотность и глубина жидкости по обе стороны разрыва одинаковы, то роль звуковой скорости по обе стороны от него играет одна и та же величина $c_1 = c_2 = \sqrt{gh}$, так что разрыв устойчив при

$$v > 2\sqrt{2gh}.$$

[1]) В задаче к § 84 ей соответствовала координата y.

ГЛАВА XI

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА

§ 109. Волна разрежения

Линия пересечения двух ударных волн является в математическом отношении особой линией двух функций, описывающих движение газа. Такой же особой линией является край всякого острого угла на поверхности обтекаемых газом тел. Оказывается возможным исследовать движение газа вблизи особой линии в самом общем виде (*L. Prandtl*, *Th. Meyer*, 1908).

Рассматривая область вблизи небольшого участка особой линии, мы можем считать последнюю прямой, которую мы выберем в качестве оси z цилиндрической системы координат r, φ, z. Вблизи особой линии все величины существенным образом зависят от угла φ. Напротив, от координаты r они зависят лишь слабо, и при достаточно малых r зависимостью от r можно вообще пренебречь. Несущественна также зависимость величин от координаты z, — изменением картины течения вдоль небольшого участка особой линии можно пренебречь.

Таким образом, мы должны исследовать стационарное движение, при котором все величины являются функциями только φ. Уравнение сохранения энтропии $\mathbf{v}\nabla s = 0$ дает $v_\varphi \dfrac{ds}{d\varphi} = 0$, откуда $s = \mathrm{const}$ [1]), т. е. движение изэнтропично. Поэтому в уравнении Эйлера можно писать ∇w вместо $\nabla p/\rho$: $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla w$. В цилиндрических координатах получаем три уравнения:

$$\frac{v_\varphi}{r}\frac{dv_r}{d\varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} = 0, \quad \frac{v_\varphi}{r}\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r}\frac{dw}{d\varphi}, \quad v_\varphi \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = 0.$$

Из последнего имеем $v_z = \mathrm{const}$; без ограничения общности можно положить $v_z = 0$ и рассматривать движение как плоское, — это сводится просто к соответствующему выбору скорости движения системы координат вдоль оси z. Первые два уравнения

[1]) Если положить $v_\varphi = 0$ (вместо $ds/d\varphi = 0$), то, как легко заключить из написанных ниже уравнений движения, получится $v_r = 0$, $v_z \neq 0$. Такое движение соответствовало бы пересечению поверхностей тангенциальных разрывов (со скачком скорости v_z) и ввиду неустойчивости таких разрывов не представляет интереса.

переписываем в виде

$$v_\varphi = \frac{dv_r}{d\varphi}, \tag{109.1}$$

$$v_\varphi\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{dw}{d\varphi}. \tag{109.2}$$

Подставляя (109.1) в (109.2), получаем

$$v_\varphi \frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \frac{dv_r}{d\varphi} = -\frac{dw}{d\varphi},$$

или, интегрируя

$$w + \frac{v_\varphi^2 + v_r^2}{2} = \text{const}. \tag{109.3}$$

Заметим, что равенство (109.1) означает, что $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, т. е. движение потенциально; в связи с этим и имеет место уравнение Бернулли (109.3).

Далее, уравнение непрерывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ дает

$$\rho v_r + \frac{d}{d\varphi}(\rho v_\varphi) = \rho\left(v_r + \frac{dv_\varphi}{d\varphi}\right) + v_\varphi\frac{d\rho}{d\varphi} = 0. \tag{109.4}$$

Используя (109.2), получим отсюда

$$\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r\right)\left(1 - v_\varphi^2\frac{d\rho}{dp}\right) = 0.$$

Но производная $dp/d\rho$, которую правильнее писать в виде $(\partial p/\partial\rho)_s$, есть квадрат скорости звука. Таким образом,

$$\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r\right)\left(1 - \frac{v_\varphi^2}{c^2}\right) = 0. \tag{109.5}$$

Этому уравнению можно удовлетворить двумя способами. Во-первых, может быть

$$\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r = 0.$$

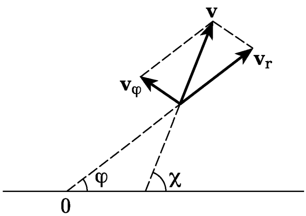


Рис. 96

Тогда из (109.2) имеем $p = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, а из (109.3) получаем, что и $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \text{const}$, т. е. скорость постоянна по абсолютной величине. Легко видеть, что и направление скорости в этом случае постоянно. Угол χ, образуемый скоростью с некоторым заданным направлением в плоскости движения, равен (рис. 96)

$$\chi = \varphi + \operatorname{arctg}\frac{v_\varphi}{v_r}. \tag{109.6}$$

Дифференцируя это выражение по φ и используя (109.1), (109.2),

получаем после простого преобразования:

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = -\frac{v_r}{\rho v_\varphi v^2}\frac{dp}{d\varphi}. \tag{109.7}$$

При $p = \mathrm{const}$ имеем, действительно, $\chi = \mathrm{const}$. Таким образом, приравнивая нулю первый множитель в (109.5), мы получаем просто тривиальное решение — однородный поток.

Во-вторых, уравнению (109.5) можно удовлетворить, положив $1 = v_\varphi^2/c^2$, т. е. $v_\varphi = \pm c$. Радиальная же скорость определится из (109.3). Обозначая в этом уравнении const символом w_0, получаем

$$v_\varphi = \pm c, \quad v_r = \pm\sqrt{2(w_0 - w) - c^2}.$$

В этом решении перпендикулярная к радиус-вектору составляющая v_φ скорости в каждой точке равна по величине местной скорости звука. Полная же скорость $v = \sqrt{v_\varphi^2 + v_r^2}$, следовательно, больше скорости звука. Как абсолютная величина скорости, так и ее направление меняются от точки к точке. Поскольку скорость звука не может пройти через нуль, то ясно, что непрерывная функция $v_\varphi(\varphi)$ должна быть равна везде $+c$ или же везде $-c$. Выбирая соответствующим образом направление отсчета угла φ, мы можем условиться считать, что $v_\varphi = c$. Что касается выбора знака у v_r, то мы увидим ниже, что он диктуется физическими соображениями и должен быть положительным. Таким образом,

$$v_\varphi = c, \quad v_r = \sqrt{2(w_0 - w) - c^2}. \tag{109.8}$$

Из уравнения непрерывности (109.4) имеем $d\varphi = -d(\rho v_\varphi)/(\rho v_r)$. Подставив сюда (109.8) и интегрируя, получим

$$\varphi = -\int \frac{d(\rho c)}{\rho\sqrt{2(w_0 - w) - c^2}}. \tag{109.9}$$

Если известно уравнение состояния газа и уравнение адиабаты (напомним, что $s = \mathrm{const}$), то с помощью этой формулы можно определить зависимость всех величин от угла φ. Таким образом, формулы (109.8), (109.9) полностью определяют движение газа.

Займемся теперь более подробным изучением полученного решения. Прежде всего заметим, что прямые $\varphi = \mathrm{const}$ пересекают в каждой точке линии тока под углом Маха (его синус равен $v_\varphi/v = c/v$), т. е. являются характеристиками. Таким образом, одно из двух семейств характеристик (в плоскости xy) представляет собой пучок выходящих из особой точки прямых и обладает в данном случае важным свойством — вдоль каждой из них все величины остаются постоянными. В этом смысле рассматриваемое решение играет в теории плоского стационарного

движения такую же роль, какую играет изученное в § 99 автомодельное движение в теории нестационарных одномерных течений. Мы вернемся еще к этому вопросу в § 115.

Из (109.9) видно, что $(\rho c)' < 0$ (штрих обозначает дифференцирование по φ). Написав

$$(\rho c)' = \frac{d(\rho c)}{d\rho}\rho'$$

и замечая, что производная $d(\rho c)/d\rho$ положительна (см. (99.9)), мы находим, что производная $\rho' < 0$; вместе с нею отрицательны и производные $p' = c^2\rho'$, $w' = p'/\rho$. Далее, из того, что производная w' отрицательна, следует, что абсолютная величина скорости $v = \sqrt{2(w_0 - w)}$ — возрастающая функция φ. Наконец, из (109.7) следует, что $\chi' > 0$. Таким образом, получаем следующие неравенства:

$$\frac{dp}{d\varphi} < 0, \quad \frac{d\rho}{d\varphi} < 0, \quad \frac{dv}{d\varphi} > 0, \quad \frac{d\chi}{d\varphi} > 0. \qquad (109.10)$$

Другими словами, в направлении обхода вокруг особой точки, совпадающем с направлением обтекания, плотность и давление падают, а вектор скорости возрастает по абсолютной величине и поворачивается в направлении обхода.

Описанное движение часто называют *волной разрежения*; ниже мы будем пользоваться этим термином.

Легко видеть, что волна разрежения не может иметь места во всей области вокруг особой линии. Действительно, поскольку v есть монотонно возрастающая функция φ, то при полном обходе вокруг начала координат (т. е. при изменении φ на 2π) мы получили бы для v значение, отличное от исходного, что нелепо. Ввиду этого истинная картина движения вокруг особой линии должна представлять собой совокупность секториальных областей, разделенных плоскостями $\varphi = \text{const}$, являющимися поверхностями разрывов. В каждой из таких областей происходит либо движение, описываемое волной разрежения, либо движение с постоянной скоростью. Число и характер этих областей для различных конкретных случаев будут установлены в следующих параграфах. Сейчас укажем лишь, что граница между волной разрежения и областью однородного течения должна быть непременно слабым разрывом. Действительно, эта граница не может быть тангенциальным разрывом (разрывом скорости v_r), так как на ней не обращается в нуль нормальная к ней компонента скорости $v_\varphi = c$. Она не может также быть ударной волной, так как нормальная компонента скорости (v_φ) по одну сторону от такого разрыва должна была бы быть больше, а по другую — меньше скорости звука, между тем как в данном случае с одной из сторон границы мы во всяком случае имеем $v_\varphi = c$.

Из сказанного можно вывести важное следствие. Возмущения, вызывающие образование слабых разрывов, исходят от особой линии (оси z) и распространяются по направлению от нее. Это значит, что ограничивающие волну разрежения слабые разрывы должны быть «исходящими» по отношению к этой линии, т. е. компонента скорости v_r, касательная к слабому разрыву, должка быть положительна. Таким образом, мы оправдали сделанный в (109.8) выбор знака у v_r.

Применим теперь полученные формулы к политропному газу. В таком газе $w = c^2/(\gamma - 1)$; уравнение же адиабаты Пуассона можно написать в виде

$$\rho c^{-2/(\gamma-1)} = \text{const}, \quad p c^{-2\gamma/(\gamma-1)} = \text{const} \tag{109.11}$$

(ср. (99.13)). Пользуясь этими формулами, представим интеграл (109.9) в виде

$$\varphi = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \int \frac{dc}{\sqrt{c_*^2 - c^2}},$$

где c_* — критическая скорость (см. (83.14)). Отсюда

$$\varphi = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c}{c_*} + \text{const},$$

или, выбирая начало отсчета φ так, чтобы $\text{const} = 0$, имеем

$$v_\varphi = c = c_* \cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi. \tag{109.12}$$

Согласно формуле (109.8) получаем отсюда

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} c_* \sin \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi. \tag{109.13}$$

Далее, воспользовавшись уравнением адиабаты Пуассона в виде (109.11), находим зависимость давления от угла φ:

$$p = p_* \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{109.14}$$

Наконец, для угла χ (109.6) имеем

$$\chi = \varphi + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right) \tag{109.15}$$

(угол χ отсчитывается от того же направления, от которого отсчитывается φ).

Поскольку должно быть $v_r > 0$, $c > 0$, то угол φ в этих формулах может меняться только в пределах между $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_{\max}$, где

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \tag{109.16}$$

Это значит, что волна разрежения может занимать сектор с углом раствора, не превышающим $\varphi_{\max}$; так, для двухатомного газа (воздух) этот угол равен 219,3°. При изменении φ от 0 до $\varphi_{\max}$ угол χ меняется от $\pi/2$ до $\varphi_{\max}$. Таким образом, направление скорости в волне разрежения может повернуться на угол, не превышающий $\varphi_{\max} - \pi/2$ (для воздуха 129,3°).

При $\varphi = \varphi_{\max}$ давление обращается в нуль. Другими словами, если волна разрежения простирается вплоть до этого угла, то ограничивающий ее с этой стороны слабый разрыв представляет собой границу с вакуумом. При этом он, естественно, совпадает с одной из линии тока; имеем здесь:

$$v_\varphi = c = 0,$$

$$v_r = v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,c_* = v_{\max},$$

т. е. скорость направлена по радиусу и достигает своего предельного значения $v_{\max}$ (см. § 83).

На рис. 97 даны графики величин p/p_*, c_*/v и χ как функции угла φ для воздуха ($\gamma = 1{,}4$).

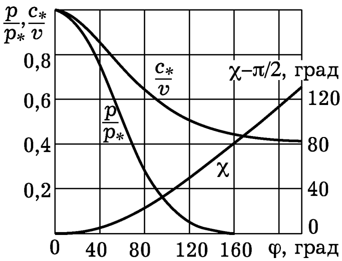


Рис. 97

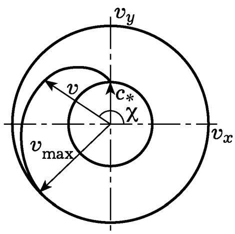


Рис. 98

Полезно заметить форму, которую имеет определяемая формулами (109.12), ((109.13) кривая в плоскости $v_x v_y$ (так называемый годограф скоростей). Это — дуга эпициклоиды, построенной между окружностями радиусов $v = c_*$ и $v = v_{\max}$ (рис. 98).

З а д а ч и

1. Определить форму линий тока в волне разрежения.

Р е ш е н и е. Уравнение линий тока для двумерного движения в полярных координатах есть $dr/v_r = r\,d\varphi/v_\varphi$. Подставляя сюда (109.12), (109.13) и

интегрируя, получаем

$$r = r_0 \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \varphi \right)^{-\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}.$$

Эти линии тока представляют собой семейство подобных кривых, обращенных своей вогнутостью в сторону начала координат, являющегося центром подобия.

2. Определить наибольший возможный угол между слабыми разрывами, ограничивающими волну разрежения, при заданных значениях v_1, c_1 — скорости газа и скорости звука на первом из них.

Р е ш е н и е. Для соответствующего первому разрыву значения угла φ находим из (109.12):

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arccos \frac{c_1}{c_*}.$$

Значения же $\varphi_2 = \varphi_{\max}$, так что искомый угол равен

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arcsin \frac{c_1}{c_*}.$$

Критическая скорость c_* выражается через v_1, c_1 уравнением Бернулли

$$w_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma - 1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} c_*^2.$$

Наибольший возможный угол поворота скорости газа в волне разрежения получится соответственно с помощью (109.15) как разность $\chi_{\max} = \chi(\varphi_1) - \chi(\varphi_2)$:

$$\chi_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arcsin \frac{c_1}{c_*} - \arcsin \frac{c_1}{v_1}.$$

Как функция от v_1/c_1, $\chi_{\max}$ имеет наибольшее значение при $v_1/c_1 = 1$

$$\chi_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} - 1 \right).$$

При $v_1/c_1 \to \infty$ $\chi_{\max}$ стремится к нулю, как

$$\chi_{\max} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{c_1}{v_1}.$$

§ 110. Типы пересечений поверхностей разрыва

Ударные волны могут пересекаться друг с другом; это пересечение происходит вдоль некоторой линии. Рассматривая движение в окрестности небольших участков этой линии, мы можем считать ее прямой, а поверхности разрывов — плоскими. Таким образом, достаточно рассмотреть пересечение плоских ударных волн.

Линия пересечения разрывов представляет собой в математическом отношении особую линию (как уже указывалось в начале § 109). Вся картина движения вокруг нее складывается из ряда секториальных областей, в каждой из которых имеется либо однородный поток, либо описанная в § 109 волна разрежения. Ниже излагается общая классификация возможных типов пересечения поверхностей разрывов [1]).

Прежде всего необходимо сделать следующее замечание. Если по обе стороны ударной волны движение газа является сверхзвуковым, то (как было указано в начале § 92) можно говорить о «направлении» ударной волны и соответственно этому различать ударные волны, «исходящие» от линии пересечения, и волны, «приходящие» к ней. В первом случае касательная составляющая скорости направлена от линии пересечения, и можно сказать, что возмущения, вызывающие образование разрыва, исходят от этой линии. Во втором же случае возмущения исходят из какого-то места, постороннего по отношению к линии пересечения.

Если по одну из сторон от ударной волны движение является дозвуковым, то возмущения распространяются в обе стороны вдоль ее поверхности и понятие о направлении волны теряет, строго говоря, смысл. Для нижеследующих рассуждений существенно, однако, что вдоль такого разрыва могут распространяться исходящие от места пересечения возмущения. В этом смысле подобные ударные волны в излагаемых ниже рассуждениях играют ту же роль, что и чисто сверхзвуковые исходящие волны, и под исходящими ударными волнами ниже подразумеваются обе эти категории волн.

На следующих ниже рисунках изображаются картины течения в плоскости, перпендикулярной к линии пересечения. Без ограничения общности можно считать, что движение происходит в этой плоскости. Параллельная линии пересечения (а потому и всем плоскостям разрывов) компонента скорости должна быть одинакова во всех областях вокруг линии пересечения и поэтому надлежащим выбором системы координат может быть всегда обращена в нуль.

Укажем, прежде всего, некоторые заведомо невозможные конфигурации.

Легко видеть, что не может быть такого пересечения ударных волн, при котором нет хотя бы одной приходящей волны. Так, при изображенном на рис. 99 *а* пересечении двух уходящих ударных волн линии тока натекающего слева потока отклонились бы в разные стороны, между тем как во всей области *2*

[1]) Она была дана *Л.Д. Ландау* (1944), а в некоторых пунктах (относящихся к взаимодействию ударных волн с тангенциальными и слабыми разрывами) дополнена *С.П. Дьяковым* (1954).

скорость должна быть постоянной; это затруднение не может быть преодолено введением в область *2* еще каких-либо других разрывов [1]). Аналогичным образом убеждаемся в невозможности изображенного на рис. 99 *б* пересечения уходящей ударной волны с уходящей же волной разрежения; хотя в такой картине и можно добиться постоянства направления скорости в области *2*, но при этом не может быть выполнено условие постоянства давления, так как в ударной волне давление возрастает, а в волне разрежения — падает.

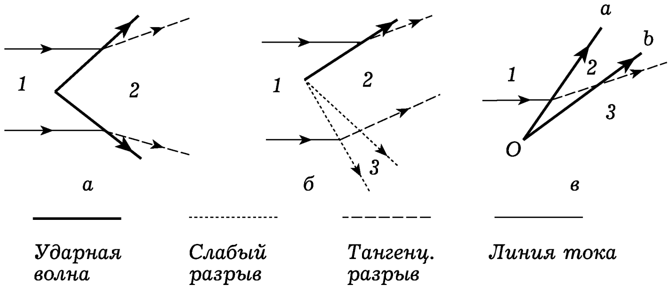


Рис. 99

Далее, поскольку пересечение не может оказывать обратного влияния на приходящие ударные волны, то одновременное пересечение (вдоль общей линии) более чем двух таких волн, возникающих от каких-то посторонних причин, было бы невероятной случайностью. Таким образом, в картине пересечения могут участвовать всего лишь одна или две приходящие ударные волны.

Весьма существенно следующее обстоятельство: протекающий мимо точки пересечения газ может пройти лишь через одну исходящую из этой точки ударную волну или волну разрежения. Пусть, например, газ проходит через следующие друг за другом две исходящие из точки O ударные волны, как это показано на рис. 99 *в*. Поскольку позади волны Oa нормальная компонента скорости $v_{2n} < c_2$, то тем более была бы меньше c_2 нормальная к волне Ob компонента скорости в области *2* в противоречии с основным свойством ударных волн. Аналогичным образом убеждаемся в невозможности прохождения газа через следующие одна за другой исходящие из точки O две волны разрежения или волну разрежения и ударную волну.

Эти соображения, очевидно, не распространяются на приходящие к точке пересечения ударные волны.

---

[1]) Чтобы не загромождать текст однообразными рассуждениями, мы не будем приводить аналогичные соображения для случаев, когда имеются области дозвукового движения и уходящей волной является в действительности ударная волна, граничащая с дозвуковой областью.

Теперь мы можем приступить к перечислению возможных типов пересечений.

На рис. 100 изображено пересечение, в котором участвует всего одна приходящая ударная волна Oa; две другие ударные волны Ob и Oc являются исходящими. Этот случай можно рассматривать как разветвление одной ударной волны на две [1]. Легко видеть, что наряду с двумя уходящими ударными волнами должен возникнуть еще и один расположенный между ними тангенциальный разрыв Od, разделяющий потоки газа, протекшего соответственно через Ob или Oc [2]. Действительно, волна Oa возникает от посторонних причин и потому является полностью заданной. Это значит, что имеют определенные заданные значения термодинамические величины (скажем, p, ρ) и скорость $\mathbf{v}$ в областях *1* и *2*. Поэтому в нашем распоряжении остаются всего две величины — углы, определяющие направления разрывов Ob и Oc. С их помощью, однако, вообще говоря, нельзя удовлетворить четырем условиям (постоянство p, ρ и двух компонент скорости) в области *3–4*, которые требовались бы при отсутствии тангенциального разрыва Od. Введение же последнего уменьшает число условий до двух (постоянство давления и направления скорости).

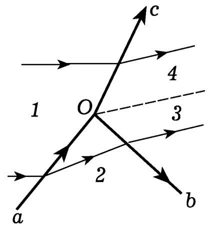


Рис. 100

Разветвиться может, однако, отнюдь не произвольная ударная волна. Приходящая ударная волна определяется (при заданном термодинамическом состоянии газа *1*) двумя параметрами, например, числом M_1 натекающего потока и отношением давлений p_1/p_2. Разветвление оказывается возможным лишь в определенной области плоскости этих двух переменных [3].

Пересечения, содержащие две приходящие ударные волны, можно рассматривать как результат «столкновения» двух волн,

[1]) Следует отметишь, что разветвление ударной волны на одну ударную же волну и одну волну разрежения невозможно (без труда можно убедиться в том, что при таком пересечении нельзя было бы согласовать друг с другом изменения давления и изменения направлений скорости в обеих исходящих волнах).

[2]) Как всегда тангенциальный разрыв в действительности размывается в турбулентную область.

[3]) Определение этой области связано с громоздкими алгебраическими или численными расчетами. Повторим лишний раз о необходимости следить при этом за «направлением» ударных волн. Случаи, в которых имелись бы две приходящие и одна уходящая ударные волны представлял бы собой пересечение двух разрывов, возникающих от посторонних причин и потому приходящих к месту пересечения с заданными значениями всех параметров. Их слияние в одну волну возможно лишь при вполне определенном соотношении между этими произвольными параметрами, что являлось бы невероятной случайностью.

возникших где-то от посторонних причин. При этом возможны два существенно различных случая, изображенных на рис. 101.

В первом случае столкновение двух ударных волн приводит к возникновению двух ударных же волн, исходящих из точки пересечения. Выполнение всех необходимых условий снова требует возникновения тангенциального разрыва, расположенного между уходящими ударными волнами.

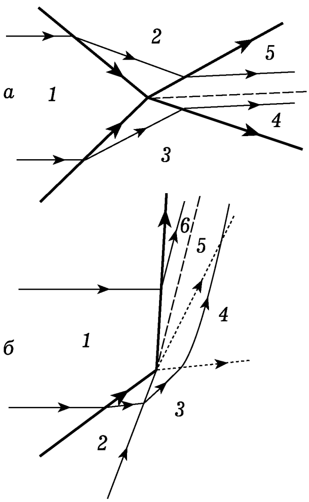


Рис. 101

Во втором случае вместо двух ударных волн возникают одна ударная волна и одна волна разрежения.

Две сталкивающиеся ударные волны определяются тремя параметрами (например, M_1 и отношениями p_1/p_2, p_1/p_3). Описанные типы пересечений возможны лишь в определенных областях значений этих параметров. Если же значения параметров лежат вне этих областей, то до столкновения ударных волн должно произойти их разветвление.

Рассмотрим, далее, типы пересечений, которые могут возникнуть при падении ударной волны на тангенциальный разрыв.

На рис. 102 *а* изображено отражение ударной волны от границы раздела между движущимся и неподвижным газами. Область *5* есть область неподвижного газа, отделенная от движущегося газа тангенциальным разрывом. В обеих граничащих с нею областях *1* и *4* давление должно быть одинаковым (равным p_5). Поскольку же в ударной волне давление возрастает, то ясно, что она должна отразиться от тангенциального разрыва в виде волны разрежения *3*, понижающей давление до первоначального значения. В точке пересечения тангенциальный разрыв терпит излом.

Пересечение ударной волны с тангенциальным разрывом, по другую сторону которого скорость жидкости отлична от нуля, но дозвуковая, вообще невозможно. Действительно, в дозвуковую область не могут проникнуть ни ударная волна, ни волна разрежения; поэтому в дозвуковой области может быть только тривиальное течение с постоянной скоростью, так что тангенциальный разрыв не может иметь излома. Отражение ударной волны в виде волны разрежения невозможно, так как это неизбежно вызвало бы излом тангенциального разрыва; отражение в виде ударной волны тоже невозможно, поскольку при этом

нельзя было бы удовлетворить условию равенства давлений на тангенциальном разрыве.

Если же течение по обе стороны тангенциального разрыва сверхзвуковое, возможны две различные конфигурации. В одном случае (рис. 102 *б*) наряду с падающей на тангенциальный разрыв ударной волной возникают еще и отраженная и преломленная ударные волны; тангенциальный разрыв терпит излом.

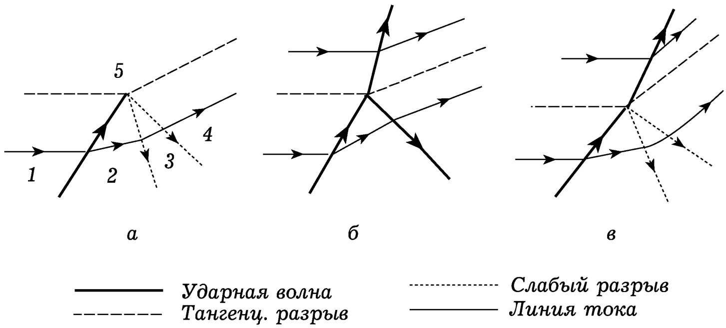


Рис. 102

В другом случае (рис. 102 *в*) возникают отраженная волна разрежения и прошедшая в другую среду преломленная ударная волна. Обе эти конфигурации возможны только в определенных областях значений параметров падающей ударной волны и тангенциального разрыва [1]) .

Взаимодействие двух тангенциальных разрывов может привести к конфигурации без приходящих ударных волн, а лишь с двумя уходящими (что невозможно, как было указано выше, в отсутствие тангенциальных разрывов). В области *1* на рис. 103 газ покоится; конфигурация возможна, очевидно, лишь при сверхзвуковом течении в областях *2* и *5*.

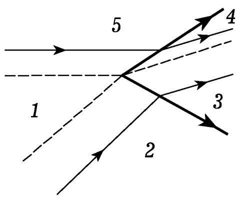


Рис. 103

Остановимся кратко на пересечениях ударной волны с приходящим от постороннего источника слабым разрывом. Здесь могут представиться два случая в зависимости от того, является ли движение за ударной волной сверх- или дозвуковым. В первом случае (рис. 104 *а*) слабый разрыв преломляется на ударной волне, проходя в пространство позади нее (сама же ударная волна в точке пересечения излома не имеет; ее форма имеет лишь

[1]) Эти две конфигурации в известном смысле обобщают случаи, изображенные на рисунках 100 и 101 *б*.

особенность более высокого порядка — того же характера, что и особенность на слабом разрыве). Кроме того, изменение энтропии в ударной волне должно привести к возникновению позади нее еще и слабого тангенциального разрыва, на котором испытывают скачок производные энтропии.

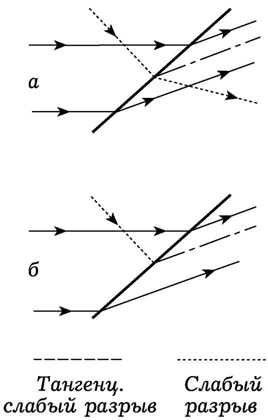


Рис. 104

Если же позади ударной волны течение становится дозвуковым, то слабый разрыв не может проникнуть в эту область и оканчивается в точке пересечения (рис. 104 *б*). Последняя является в этом случае особой точкой (так, если падающий разрыв представляет собой разрыв первых производных гидродинамических величин, уходящий слабый тангенциальный разрыв, форма ударной волны и распределение давления в окрестности точки пересечения обладают, как можно показать, логарифмической особенностью). Кроме того, как и в предыдущем случае, позади ударной волны возникает слабый тангенциальный разрыв энтропии [1]).

Сказанное относительно взаимодействия ударных волн со слабым разрывом справедливо и для взаимодействия со слабыми тангенциальными разрывами. Если течение в области за ударной волной сверхзвуковое, в ней возникают слабый и слабый тангенциальный разрывы. Если же течение за ударной волной дозвуковое, то в нем возникает лишь преломленный слабый тангенциальный разрыв.

Наконец, упомянем еще о взаимодействии слабых разрывов с тангенциальными. Если течение по обе стороны тангенциального разрыва сверхзвуковое, наряду с падающим возникают отраженный и преломленный слабые разрывы. Если же течение по другую сторону тангенциального разрыва дозвуковое, слабый разрыв в него не проникает, происходит «полное внутреннее отражение» слабого разрыва.

§ 111. Пересечение ударных волн с твердой поверхностью

Фундаментальную роль в явлении стационарного пересечения ударных волн с поверхностью обтекаемого тела играет их взаимодействие с пограничным слоем. Свойства этого взаимодействия весьма сложны и их детальное рассмотрение выходит

[1]) Детальное количественное исследование пересечений ударных волн со слабыми разрывами дано *Дьяковым С.П.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 948, 962.

за рамки этой книги. Мы ограничимся здесь лишь некоторыми общими утверждениями [1]).

В ударной волне давление испытывает скачок, возрастая по направлению движения газа. Поэтому, если бы ударная волна пересекла поверхность тела, то вблизи места пересечения имелось бы конечное возрастание давления на отрезке очень малой длины, т. е. имелся бы очень большой положительный градиент давления. Но мы знаем, что такое резкое возрастание давления вблизи твердой стенки невозможно (см. конец § 40); оно должно вызвать явление отрыва, в результате чего картина обтекания изменится таким образом, что ударная волна отодвинется на достаточное расстояние от поверхности тела. Исключение составляют лишь ударные волны достаточно слабой интенсивности. Из изложенного в конце § 40 доказательства ясно, что невозможность положительного скачка давления на границе пограничного слоя связана с предположением о достаточно большой величине этого скачка: он должен превосходить некоторый предел, зависящий от значения R и убывающий с его увеличением.

Таким образом, стационарное пересечение ударных волн с поверхностью твердого тела возможно лишь для ударных волн не слишком большой интенсивности, — тем меньшей, чем выше R. Предельная допустимая интенсивность ударной волны зависит также и от того, является ли пограничный слой ламинарным или турбулентным. Турбулизация пограничного слоя затрудняет возникновение отрыва (§ 45). Поэтому при турбулентном пограничном слое от поверхности тела могут отходить более сильные ударные волны, чем при ламинарном пограничном слое.

Подчеркнем, что для изложенных рассуждений существенно, чтобы пограничный слой имелся перед ударной волной (т. е. вверх по течению от нее). Поэтому сказанное выше не относится к волнам, отходящим от переднего края тела, как это может, например, иметь место при обтекании острого клина (о чем будет подробно идти речь в следующем параграфе). В последнем случае газ подходит к краю угла извне, т. е. из пространства, в котором никакого пограничного слоя не существует; ясно поэтому, что изложенные соображения ни в какой мере не затрагивают возможности существования ударных волн, отходящих от края такого угла.

При дозвуковом движении отрыв может произойти лишь при возрастании давления в основном потоке вниз по течению вдоль

[1]) В пограничном слое непременно имеется прилегающая к поверхности тела дозвуковая часть, в которую ударная волна вообще не может проникнуть. Говоря условно о пересечении, мы отвлекаемся от этого обстоятельства, несущественного для нижеследующих рассуждений.

обтекаемой поверхности. При сверхзвуковом же движении появляется своеобразная возможность возникновения отрыва и в области, где давление падает вниз по течению. Такое явление может осуществляться путем комбинирования ударной волны слабой интенсивности с отрывом, причем необходимое для возникновения отрыва повышение давления происходит в самой ударной волне; в области же перед ударной волной давление может при этом как возрастать, так и падать вниз по течению.

Все сказанное выше относится только к стационарному пересечению, при котором ударная волна и твердое тело покоятся друг относительно друга. Перейдем к рассмотрению нестационарного пересечения, при котором на твердое тело падает приходящая извне движущаяся ударная волна, так что линия ее пересечения с поверхностью тела передвигается вдоль последней. Такое пересечение сопровождается отражением ударной волны: наряду с падающей волной возникает еще одна, отраженная волна, отходящая от тела.

Будем рассматривать явление в системе координат, движущейся вместе с линией пересечения; в этой системе ударные волны стационарны. Наиболее простая картина отражения заключается в том, что отраженная волна отходит непосредственно от линии пересечения; такое отражение называется правильным (рис. 105). Заданием угла падения α_1 и интенсивности падающей волны однозначно определяется движение в области *2*. В отраженной волне скорость газа должна повернуться на определенный угол так, чтобы снова стать параллельной поверхности тела. По этому углу положение и интенсивность отраженной волны определяются уравнением ударной поляры. Но при заданном угле поворота скорости ударная поляра определяет две различные ударные волны: волны слабого и сильного семейства (§ 92). Опытные данные показывают, что фактически отраженная волна всегда относится к слабому семейству и ниже будет подразумеваться именно этот выбор. Следует указать что при таком выборе при предельном переходе к бесконечно слабой интенсивности падающей волны интенсивность отраженной волны тоже стремится к нулю, а угол отражения α_2 — к углу падения α_1, как и должно было быть в соответствии с акустическим приближением. В пределе же $\alpha_1 \to 0$ отраженная волна слабого семейства непрерывно переходит в волну, получающуюся для отражения при лобовом падении ударной волны (задача 1 § 100).

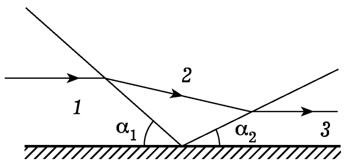


Рис. 105

Математический расчет правильного отражения (в идеальном газе) не представляет никаких принципиальных затруднений, но алгебраически весьма громоздок. Мы ограничимся здесь лишь изложением некоторых результатов [1]).

Из общих свойств ударной поляры ясно, что правильное отражение возможно отнюдь не при произвольных значениях параметров падающей волны (угла падения α_1 и отношения p_2/p_1). При заданном значении p_2/p_1 существует предельно допустимый угол α_{1k}; при $\alpha_1 > \alpha_{1k}$ правильное отражение невозможно. При $p_2/p_1 \to 1$ предельный угол стремится к $90°$, т. е. правильное отражение возможно при всяком угле падения. В пределе же $p_2/p_1 \to \infty$ он стремится к некоторому значению, зависящему от γ; для воздуха это $40°$. На рис. 106 дан график α_{1k} как функции p_1/p_2 для $\gamma = 7/5$ и $\gamma = 5/3$.

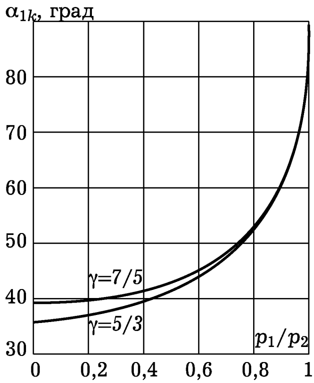


Рис. 106

Угол отражения α_2, вообще говоря, не совпадает с углом падения. Существует определенное значение α_* угла падения, такое, что при $\alpha_1 < \alpha_*$ угол отражения $\alpha_2 < \alpha_1$; если же $\alpha_1 > \alpha_*$, то $\alpha_2 > \alpha_1$. Значение α_* есть

$$\alpha_* = \frac{1}{2} \arccos \frac{\gamma - 1}{2}$$

(для воздуха $\alpha_* = 39{,}2°$); замечательно, что оно не зависит от интенсивности падающей волны.

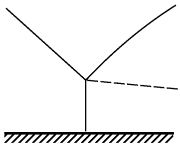


Рис. 107

При $\alpha_1 > \alpha_{1k}$ правильное отражение невозможно и падающая ударная волна должна разветвиться на некотором расстоянии от поверхности тела, так что возникает картина изображенного на рис. 107 типа с тройной конфигурацией ударных волн и отходящим от точки разветвления тангенциальным разрывом (такую конфигурацию называют *маховским отражением*).

---

[1]) Более подробное изложение вопроса об отражении ударных волн можно найти в книгах: *Курант Р.*, *Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. — М.: ИЛ, 1950, гл. IV [*Courant R.*, *Friedrichs K.* Supersonic flow and shock waves. — N. Y.: Interscience, 1948]; *Мизес Р.* Математическая теория течения сжимаемой жидкости. — М.: ИЛ, 1961, § 23 [*Mises R.* Mathematical theory of compressible fluid flow. — N. Y., Academic Press, 1958], а также в обзорной статье: *Bleakney W.*, *Taub A.H.* // Rev. Mod. Physics. 1949. V. 21. P. 584.

§ 112. Сверхзвуковое обтекание угла

При исследовании движения вблизи края угла на поверхности обтекаемого тела снова достаточно рассматривать лишь небольшие участки вдоль края угла и потому можно считать этот край прямым, а самый угол образованным двумя пересекающимися плоскостями. Мы будем говорить об обтекании выпуклого угла, если течение происходит в угле, большем чем π, и об обтекании вогнутого угла, если газ движется внутри угла, меньшего чем π.

Дозвуковое обтекание угла по своему характеру ничем не отличается от обтекания несжимаемой жидкостью. Сверхзвуковое же обтекание обладает совершенно иным характером; существенной его особенностью является возникновение отходящих от края угла разрывов.

Рассмотрим сначала возможные режимы обтекания, когда сверхзвуковой поток газа подходит к краю угла, двигаясь вдоль одной из его сторон. В соответствии с общими свойствами сверхзвукового течения поток остается однородным вплоть до самого края угла. Поворот течения, переводящий его в направление, параллельное другой стороне угла, осуществляется в отходящей от края угла волне разрежения, и вся картина движения складывается из трех областей, отделенных друг от друга слабыми разрывами (Oa и Ob на рис. 108): однородный поток газа *1*, движущийся вдоль стороны угла AO, поворачивает в волне разрежения *2*, после чего снова движется с постоянной скоростью вдоль другой стороны угла. Обратим внимание на то, что при таком обтекании не образуется никаких турбулентных областей; при аналогичном же обтекании несжимаемой жидкостью непременно возникает турбулентная область с линией отрыва по краю угла (см. рис. 24).

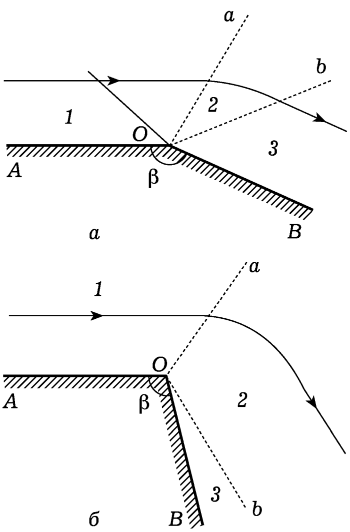


Рис. 108

Пусть v_1 — скорость натекающего потока (*1* на рис. 108), а c_1 — скорость звука в нем. Положение слабого разрыва Oa определяется непосредственно по числу $\mathrm{M}_1 = v_1/c_1$ условием, чтобы он пересекал линии тока под углом, равным углу Маха. Изменение скорости и давления в волне разрежения определяется формулами (109.12)–(109.15), причем надо только установить направ-

ление, от которого должен производиться отсчет угла φ в этих формулах. Прямому лучу $\varphi = 0$ соответствует $v = c = c_*$; при $\mathrm{M}_1 > 1$ такой линии фактически нет, так как везде $v/c > 1$. Представляя себе, однако, волну разрежения формально продленной в область левее Oa и воспользовавшись формулой (109.12), найдем, что разрыву Oa надо приписать значение угла φ, равное

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c_1}{c_*},$$

и затем увеличивать φ в направлении от Oa к Ob. Положение разрыва Ob определяется моментом, когда направление скорости станет параллельным стороне угла OB.

Угол поворота течения в волне разрежения не может превышать значение $\chi_{\max}$, вычисленное в задаче 2 § 109. Если величина обтекаемого угла $\beta < \pi - \chi_{\max}$, то волна разрежения не может повернуть поток на требуемый угол и возникает картина, изображенная на рис. 108 *б*. Разрежение в волне *2* происходит тогда вплоть до равного нулю давления (достигаемого на линии Ob), так что волна разрежения отделена от стенки областью вакуума *3*.

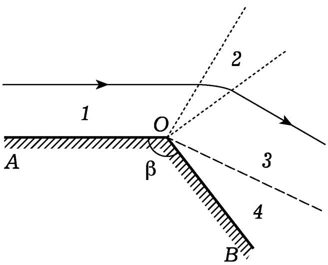


Рис. 109

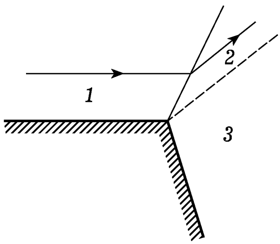


Рис. 110

Описанный режим обтекания, однако, не является единственно возможным. На рис. 109 и 110 изображены режимы, при которых ко второй стороне угла прилегает область неподвижного газа, отделенная от движущегося тангенциальным разрывом; как всегда, тангенциальный разрыв размывается в турбулентную область, так что этот случай соответствует наличию отрыва [1]). Поворот течения на некоторый угол происходит в волне разрежения (рис. 109) или в ударной волне (рис. 110). Последний случай, однако, возможен лишь при не слишком большой интенсивности

[1]) Согласно экспериментальным данным сжимаемость глаза несколько уменьшает угол раствора турбулентной области, в которую размывается тангенциальный разрыв.

ударной волны (согласно общим соображениям, изложенным в предыдущем параграфе).

Какой из описанных режимов осуществляется в том или ином конкретном случае, зависит, вообще говоря, от условий течения вдали от края угла. Так, при вытекании газа из сопла (краем угла является при этом кран отверстия сопла) существенно взаимоотношение между выходным давлением газа p_1 и давлением во внешней среде p_e. Если $p_e < p_1$, то обтекание происходит по типу рис. 109; положение и угол раствора волны разрежения определяются при этом условием, чтобы давление в областях *3–4* совпадало с p_e; чем меньше p_e, тем на больший угол должно повернуться течение. Однако, если обтекаемый угол β на рис. 109 слишком велик, то давление газа может не успеть дойти до требуемого значения p_e — направление скорости станет параллельным стороне OB угла раньше, чем давление упадет до этого значения. Движение вблизи края сопла будет тогда происходить по типу рис. 107. Давление вблизи внешней стороны OB отверстия целиком определяется при этом углом β и не зависит от значения p_e; окончательное же падение давления до p_e произойдет лишь на некотором расстоянии от отверстия.

Если же $p_e > p_1$, то обтекание края отверстия сопла происходит по типу рис. 110 с образованием отходящей от края отверстия ударной волны, повышающей давление от p_1 до p_e. Это возможно, однако, лишь при не слишком больших превышениях p_e над p_1, когда интенсивность ударной волны не слишком велика; в противном случае отрыв возникает на внутренней поверхности сопла и ударная волна перемещается вместе с ним внутрь сопла, о чем уже шла речь в § 97.

Далее, рассмотрим обтекание вогнутого угла. В дозвуковом случае такое обтекание сопровождается возникновением отрыва на некотором расстоянии, не доходя до края угла (см. конец § 40). При натекании же сверхзвукового потока изменение его направления может осуществиться в отходящей от края угла ударной волне (рис. 111). Здесь снова необходимо оговорить, что фактически такой простой безотрывный режим возможен лишь при не слишком сильной ударной волне. Интенсивность ударной волны возрастает по мере увеличения угла χ осуществляемого ею поворота течения; поэтому можно сказать, что безотрывное обтекание возможно лишь при не слишком больших значениях χ.

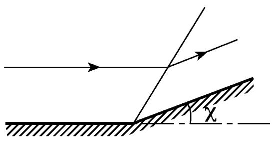


Рис. 111

Обратимся теперь к картине движения, возникающей, когда на край угла натекает свободный сверхзвуковой поток (рис. 112). Поворот течения в направление, параллельное сторонам угла,

происходит в отходящих от края угла ударных волнах. Как уже было объяснено в предыдущем параграфе, это и есть как раз тот исключительный случай, когда от поверхности твердого тела может отходить ударная волна произвольной интенсивности.

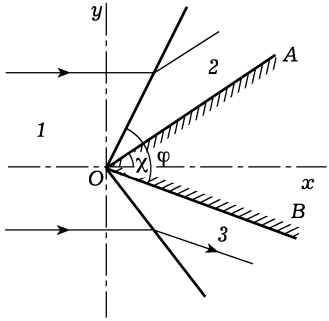


Рис. 112

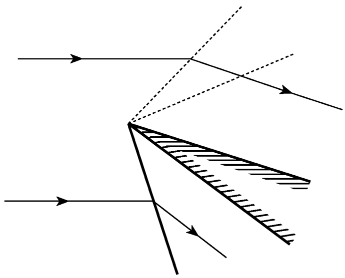


Рис. 113

Зная скорости $\mathbf{v}_1$ и c_1 в натекающем потоке *1*, можно определить положение ударных волн и движение газа в областях, расположенных за ними. Направление скорости $\mathbf{v}_2$ должно быть параллельно стороне OB угла:

$$v_{2y}/v_{2x} = \operatorname{tg}\chi.$$

Поэтому определение v_2 и угла φ ударной волны производится непосредственно по диаграмме ударной поляры с помощью луча, проведенного из начала координат под заданным углом χ к оси абсцисс (см. рис. 64), как это было подробно объяснено в § 92. Мы видели, что при заданном угле χ ударная поляра определяет две различные ударные волны с различными углами φ. Одна из них (соответствующая точке B на рис. 64), более слабая, оставляет течение, вообще говоря, сверхзвуковым; другая же, более сильная, превращает его в дозвуковое. В данном случае для обтекания углов на поверхности конечных тел следует всегда выбирать первую из них, волну «слабого» семейства. Необходимо иметь в виду, что в действительности этот выбор определяется условиями обтекания вдали от угла. При обтекании очень острого угла (малое χ) образующаяся ударная волна должна, очевидно, обладать очень малой интенсивностью. Естественно считать, что по мере увеличения этого угла интенсивность волны будет расти монотонно; этому соответствует как раз перемещение по участку QC кривой ударной поляры (см. рис. 64) от точки Q к точке C [1]).

[1]) Ср., однако, примеч. на с. 592. Что касается формального вопроса об обтекании клина, образованного двумя бесконечными плоскостями, то он не представляет физического интереса.

Мы видели также в § 92, что угол поворота вектора скорости в ударной волне не может превосходить некоторого определенного (зависящего от M_1) значения $\chi_{\max}$. Поэтому описанная картина обтекания невозможна, если какая-либо из сторон обтекаемого угла наклонена к направлению натекающего потока под углом, превышающим $\chi_{\max}$ (в таком случае движение газа в области вблизи угла должно быть дозвуковым, что фактически осуществляется путем возникновения ударной волны где-либо впереди тела: см. § 122). Поскольку $\chi_{\max}$ — монотонно возрастающая функция M_1, можно также сказать, что при заданном значении угла χ число M_1 натекающего потока должно превышать определенное значение $M_{1\,\min}$.

Наконец, укажем, что если стороны угла расположены по отношению к натекающему потоку как показано на рис. 113, то ударная волна возникает, разумеется, лишь по одну сторону угла; поворот же потока по другую сторону осуществляется в волне разрежения.

Задачи

1. Определить положение и интенсивность ударной волны при обтекании очень малого угла ($\chi \ll 1$) при не слишком больших значениях числа Маха: $M_1\chi \ll 1$.

Решение. При $\chi \ll 1$ ударная поляра определяет два значения: близкое к $\pi/2$ (близость к точке P на рис. 64) и близкое к углу Маха α_1 (близость к точке Q). Интересующей нас волне слабого семейства отвечает вторая из них. Из (92.11) имеем при $\chi \ll 1$:

$$M_1^2 \sin^2\varphi - 1 \approx \chi \frac{\gamma+1}{2} M_1^2 \operatorname{tg}\alpha_1 = \chi \frac{\gamma+1}{2} \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2-1}}.$$

Подставив это выражение в (92.9), найдем

$$\frac{p_2-p_1}{p_1} = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2-1}}\chi.$$

Угол φ ищем в виде $\varphi = \alpha_1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \alpha_1$ и из того же выражения находим

$$\varphi - \alpha_1 = \frac{\gamma+1}{4} \frac{M_1^2}{M_1^2-1}\chi.$$

При $M_1 \gg 1$ угол $\alpha_1 \approx 1/M_1$ и для справедливости полученных формул должно быть $\chi M_1 \ll 1$.

2. То же, если число M_1 настолько велико, что $M_1\chi \gg 1$.

Решение. В этом случае углы φ и χ одинакового порядка малости. Из (92.11) находим

$$\varphi = \frac{\gamma+1}{2}\chi.$$

Для отношения давлений имеем согласно (92.9)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \varphi^2 = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} M_1^2 \chi^2.$$

Значение M_2 позади волны (из (92.12)):

$$M_2 = \frac{1}{\chi}\sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}},$$

т. е. остается большим по сравнению с 1, но не по сравнению с $1/\chi$. В том же приближении

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad \frac{v_2}{v_1} = 1$$

(разность $v_1 - v_2 \sim v_1\chi^2$). Поэтому уменьшение числа Маха фактически связано лишь с увеличением скорости звука: $M_2/M_1 = c_1/c_2$.

§ 113. Обтекание конического острия

Исследование сверхзвукового стационарного течения вблизи острия на поверхности обтекаемого тела представляет собой трехмерную задачу, и потому несравненно сложнее исследования обтекания угла с линейным краем. Полностью может быть решена задача об осесимметричном обтекании острия, которое мы здесь и рассмотрим.

Вблизи своего конца осесимметрическое острие можно рассматривать как прямой конус кругового сечения, и таким образом, задача состоит в исследовании обтекания конуса однородным потоком, натекающим в направлении оси конуса. С качественной стороны картина выглядит следующим образом.

Как и при аналогичном обтекании плоского угла, должна возникнуть ударная волна (*A. Busemann*, 1929); из соображений симметрии очевидно, что эта волна будет представлять собой коническую поверхность, коаксиальную с обтекаемым конусом и имеющую общую с ним вершину (на рис. 114 изображен разрез конуса плоскостью, проходящей через его ось). Однако в отличие от плоского случая ударная волна не осуществляет здесь поворота скорости газа на полный угол χ, необходимый для течения вдоль поверхности конуса (2χ — угол раствора конуса). После перехода через поверхность разрыва линии тока искривляются, асимптотически приближаясь к образующим обтекаемого конуса. Это искривление сопровождается непрерывным уплотнением (добавочным к уплотнению в самой волне) и соответственным падением скорости.

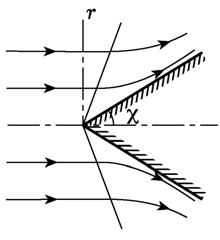


Рис. 114

Изменение направления и величины скорости на самой ударной волне определяется ударной полярой, причем и здесь осуще-

ствляется решение, отвечающее «слабой» ветви поляры [1]). Соответственно, для каждого значения числа Маха натекающего потока $M_1 = v_1/c_1$ существует определенное предельное значение угла полураствора конуса χ_{max}, за которым такое обтекание становится невозможным и ударная волна «отсоединяется» от вершины конуса. Поскольку за ударной волной происходит дополнительный поворот течения, значения χ_{max} для обтекания конуса превышают (при одинаковых M_1) значения χ_{max} для плоского случая (обтекания клина). Непосредственно за ударной волной движение газа обычно сверхзвуковое, но может быть и дозвуковым (при χ, близких к χ_{max}). Сверхзвуковое за ударной волной течение по мере приближения к поверхности конуса может стать дозвуковым, и тогда на определенной конической поверхности скорость проходит через звуковое значение.

Коническая ударная волна пересекает все линии тока натекающего потока под одинаковым углом, а потому обладает постоянной интенсивностью. Отсюда следует (см. ниже § 114), что и за ударной волной течение будет изэнтропическим и потенциальным.

В силу симметрии задачи и ее автомодельности (отсутствия в ее условиях какой-либо характеристической постоянной длины) очевидно, что распределение всех величин (скорости, давления) в потоке за ударной волной будет функцией только от угла θ наклона к оси конуса (оси x на рис. 114) радиус-вектора, проведенного в данную точку из вершины конуса. Соответственно уравнения движения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям; граничные условия к этим уравнениям на ударной волне определяются уравнением ударной поляры, а на поверхности конуса — требуют параллельности скорости образующим конуса. Эти уравнения, однако, не могут быть проинтегрированы в аналитическом виде и должны решаться численным образом. Отсылая за результатами таких вычислений к оригинальным источникам [2]), мы ограничимся лишь кривой (см. рис. 65), дающей зависимость предельного допустимого угла раствора конуса $2\chi_{max}$ как функции числа M_1. Укажем также, что при $M_1 \to 1$ угол χ_{max} стремится к нулю по закону

$$\chi_{max} = \mathrm{const}\sqrt{\frac{M_1 - 1}{\gamma + 1}}, \tag{113.1}$$

[1]) Это может, однако, быть не так при некоторых «экзотических» формах обтекаемого тела. Так, существуют указания на отбор волны «сильного» семейства при обтекании конуса на переднем крае широкого тупого тела.

[2]) См. *Taylor G.I.*, *Maccol J.W.* // Proc. Roy. Soc. 1933. V. 139A. P. 278; *Maccol J.W.* // Proc. Roy. Soc. 1937. V. 159A. P. 459. См. также изложение в кн.: *Кочин Н.Е.*, *Кибель И.А.*, *Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963, ч. II, § 27.

как это можно заключить на основании общего околозвукового закона подобия (126.11) (const есть число, не зависящее ни от M_1, ни от рода газа).

Замкнутое аналитическое решение задачи об обтекании конуса возможно лишь в предельном случае малых углов раствора конуса (*Th. Karman*, *N.B. Moor*, 1932). Очевидно, что в таком случае скорость газа во всем пространстве будет лишь незначительно отличаться от скорости $\mathbf{v}_1$ натекающего потока. Обозначив буквой $\mathbf{v}$ малую разность между скоростью газа в данной точке и скоростью $\mathbf{v}_1$ и введя ее потенциал φ, мы можем применить для последнего линеаризованное уравнение (114.4); если ввести цилиндрические координаты x, r, ω с осью вдоль оси конуса (ω — полярный угол), это уравнение примет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} - \beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \tag{113.2}$$

или для осесимметрического движения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \tag{113.3}$$

где введено обозначение

$$\beta = \left(M_1^2 - 1\right)^{1/2}. \tag{113.4}$$

Для того чтобы распределение скорости было функцией только от угла θ, потенциал должен иметь вид $\varphi = xf(\xi)$, где $\xi = r/x = \operatorname{tg}\theta$. Сделав подстановку, получим для функции $f(\xi)$ уравнение

$$\xi(1 - \beta^2\xi^2)f'' + f' = 0,$$

которое решается элементарно. Тривиальное решение $f = \mathrm{const}$ соответствует однородному потоку, а второе решение есть

$$f = \mathrm{const}\left(\sqrt{1 - \beta^2\xi^2} - \operatorname{Arch}\frac{1}{\beta\xi}\right).$$

Граничное условие на поверхности конуса (т. е. при $\xi = \operatorname{tg}\chi \approx \chi$) гласит:

$$\frac{v_r}{v_1 + v_x} \approx \frac{1}{v_1}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \chi, \tag{113.5}$$

или $f' = v_1\chi$. Отсюда $\mathrm{const} = v_1\chi^2$, и в результате получим следующее окончательное выражение для потенциала (в

области $x > \beta r$ [1])

$$\varphi = v_1\chi^2\left[\sqrt{x^2-\beta^2r^2} - x\operatorname{Arch}\frac{x}{\beta r}\right]. \tag{113.6}$$

Обратим внимание на то, что φ имеет при $r \to 0$ логарифмическую особенность.

Отсюда находим компоненты скорости:

$$v_x = -v_1\chi^2\operatorname{Arch}\frac{x}{\beta r}, \quad v_r = \frac{v_1\chi^2}{r}\sqrt{x^2-\beta^2r^2}. \tag{113.7}$$

Давление на поверхности конуса вычисляется с помощью формулы (114.5); благодаря логарифмической особенности φ при $r \to 0$ скорость v_r на самой поверхности конуса (т. е. при малых r) велика по сравнению с v_x, и потому в формуле для давления должен быть сохранен член с v_r^2. В результате получим

$$p - p_1 = \rho_1 v_1^2\chi^2\left(\ln\frac{2}{\beta\chi} - \frac{1}{2}\right). \tag{113.8}$$

Все эти формулы, полученные с помощью линеаризованной теории, теряют применимость при слишком больших значениях M_1, сравнимых с $1/\chi$ (см. § 127).

[1]) В рассматриваемом приближении конус $x = \beta r$ представляет собой поверхность слабого разрыва. В следующем приближении появляется ударная волна, интенсивность которой (относительный скачок давления) пропорциональна χ^4, а угол полураствора превосходит угол Маха на величину, тоже пропорциональную χ^4.

Г Л А В А XII

ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

§ 114. Потенциальное движение сжимаемого газа

Мы встретимся в дальнейшем с многочисленными важными случаями, когда движение сжимаемого газа можно рассматривать как потенциальное практически во всем пространстве. Здесь мы выведем общие уравнения потенциального течения и рассмотрим в общем виде вопрос об их применимости [1].

Потенциальность течения сжимаемого газа нарушается, вообще говоря, ударными волнами; после прохождения через ударную волну потенциальный поток становится в общем случае вихревым. Исключение представляют, однако, случаи, когда стационарный потенциальный поток проходит через ударную волну постоянной (вдоль всей ее поверхности) интенсивности; таковы, например, случаи, когда однородный поток проходит волну, пересекающую все линии тока под одинаковым углом [2]. В таких случаях течение остается потенциальным и позади ударной волны.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся уравнением Эйлера, написанным в виде

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 - [\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

(ср. (2.10)), или

$$\nabla\left(w + \frac{v^2}{2}\right) - [\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{v}] = T\nabla s,$$

где учтено термодинамическое соотношение $dw = T\,ds + dp/\rho$. Но в потенциальном потоке перед ударной волной $w + v^2/2 = \mathrm{const}$, а на ударной волне эта величина непрерывна; поэтому она останется постоянной и во всем пространстве позади ударной волны, так что будем иметь

$$[\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{v}] = -T\nabla s. \qquad (114.1)$$

Потенциальный поток перед ударной волной изэнтропичен. В общем случае произвольной ударной волны с переменным

---

[1]) В этом параграфе течение еще не предполагается плоским!

[2]) С такими случаями мы уже встречались при изучении сверхзвукового обтекания клина и конуса (§ 112, 113).

вдоль ее поверхности скачком энтропии в пространстве за волной градиент $\nabla s \neq 0$, а вместе с ним будет отличен от нуля и $\operatorname{rot}\mathbf{v}$. Однако если ударная волна обладает постоянной интенсивностью, то и скачок энтропии в ней постоянен, так что течение за ней тоже будет изэнтропическим, т. е. $\nabla s = 0$. Отсюда следует, что либо $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, либо векторы $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}$ везде параллельны друг другу. Но последний случай невозможен: на самой ударной волне $\mathbf{v}$ во всяком случае имеет отличную от нуля нормальную компоненту, а нормальная компонента $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ равна нулю (нормальная компонента $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ определяется тангенциальными производными от тангенциальных компонент скорости, непрерывных на поверхности разрыва).

Другой важный случай, когда потенциальность течения можно считать не нарушающейся ударными волнами, — это случай волн малой интенсивности. Мы видели (§ 86), что в таких ударных волнах скачок энтропии есть величина третьего порядка по сравнению со скачком давления или скорости. Из соотношения (114.1) видно поэтому, что величиной третьего порядка будет и $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ за разрывом. Это и дает возможность считать, с точностью до малых величин высших порядков, течение потенциальным и позади ударной волны.

Выведем общее уравнение для потенциала скорости при произвольном стационарном потенциальном течении сжимаемого газа. Для этого исключаем плотность из уравнения непрерывности $\operatorname{div}\rho\mathbf{v} = \rho\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\rho = 0$ с помощью уравнения Эйлера

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{c^2}{\rho}\nabla\rho$$

и получаем

$$c^2\operatorname{div}\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0.$$

Вводя сюда потенциал согласно $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ и раскрывая векторные выражения, найдем искомое уравнение:

$$\left(c^2 - \varphi_x^2\right)\varphi_{xx} + \left(c^2 - \varphi_y^2\right)\varphi_{yy} + \left(c^2 - \varphi_z^2\right)\varphi_{zz} - \\ - 2(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_x\varphi_z\varphi_{xz} + \varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}) = 0 \quad (114.2)$$

(нижние индексы обозначают здесь частные производные). В частности, для плоского движения

$$\left(c^2 - \varphi_x^2\right)\varphi_{xx} + \left(c^2 - \varphi_y^2\right)\varphi_{yy} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0. \quad (114.3)$$

В этих уравнениях скорость звука сама должна быть выражена как функция скорости, что может быть, в принципе, сделано с помощью уравнения Бернулли $w + v^2/2 = \text{const}$ и уравнения изэнтропичности $s = \text{const}$ (для политропного газа зависимость c от v дается формулой (83.18)).

Уравнение (114.2) очень упрощается, если во всем пространстве скорость газа лишь незначительно отличается по величине и направлению от скорости натекающего из бесконечности потока [1]. Тем самым подразумевается и что ударные волны (если они вообще есть) обладают слабой интенсивностью, а потому не нарушают потенциальности течения.

Выделим из $\mathbf{v}$ постоянную скорость натекающего потока $\mathbf{v}_1$, написав $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'$, где $\mathbf{v}'$ — малая величина. Вместо потенциала φ полной скорости, введем потенциал φ' скорости $\mathbf{v}'$: $\mathbf{v}' = \nabla\varphi'$. Уравнение для этого потенциала получится из (114.2) заменой $\varphi = \varphi' + xv_1$ (ось x выбираем в направлении вектора $\mathbf{v}_1$). Рассматривая после этого φ' как малую величину и опуская все члены выше первого порядка, получим следующее линейное уравнение:

$$\left(1 - \mathrm{M}_1^2\right)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2} = 0, \tag{114.4}$$

где $\mathrm{M}_1 = v_1/c_1$; для скорости звука здесь подставлено, естественно, ее заданное значение на бесконечности.

Давление в любой точке потока определяется в этом же приближении через скорость по формуле, которую можно получить следующим образом. Рассматривая p как функцию w (при заданном s) и учитывая, что $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, запишем:

$$p - p_1 \approx \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right)_s (w - w_1) = \rho_1(w - w_1).$$

Согласно же уравнению Бернулли имеем

$$w - w_1 = -\frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}\right)^2 - v_1^2\right] \approx -\frac{1}{2}\left(v_y^2 + v_z^2\right) - v_1 v_x,$$

так что

$$p - p_1 = -\rho_1 v_1 v_x - \frac{\rho_1}{2}\left(v_y^2 + v_z^2\right). \tag{114.5}$$

В этом выражении надо, вообще говоря, сохранить член с квадратами поперечной скорости, так как в области вблизи оси x (в частности, на самой поверхности обтекаемого газом тонкого тела) производные $\partial\varphi'/\partial y$, $\partial\varphi'/\partial z$ могут стать большими по сравнению с $\partial\varphi'/\partial x$.

Уравнение (114.4), однако, неприменимо, если число M_1 очень близко к единице (околозвуковое движение), так что коэффициент в первом члене становится малым. Ясно, что в таком случае

[1]) С таким случаем мы встретились уже в § 113 (обтекание тонкого конуса) и встретимся еще при изучении обтекания сжимаемым газом произвольных тонких тел.

в уравнении должны быть сохранены также и члены более высокого порядка по производным потенциала по координате x. Для вывода соответствующего уравнения снова вернемся к исходному уравнению (114.2), которое после пренебрежения заведомо малыми членами сводится к следующему:

$$\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \tag{114.6}$$

В рассматриваемом случае скорость $v_x \approx v$ и скорость звука c близки к критической скорости c_*. Поэтому можно написать:

$$c - c_* = (v - c_*)\frac{dc}{dv}\bigg|_{v=c_*},$$

или

$$c - v = (c_* - v)\left(1 - \frac{dc}{dv}\bigg|_{v=c_*}\right).$$

Воспользовавшись тем, что при $v = c = c_*$ согласно (83.4) имеем $d\rho/dv = -\rho/c$, пишем (при $v = c_*$):

$$\frac{dc}{dv} = \frac{dc}{d\rho}\frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho}{c}\frac{dc}{d\rho},$$

так что

$$c - v = (c_* - v)\frac{1}{c}\,\frac{d(\rho c)}{d\rho} = \alpha_*(c_* - v). \tag{114.7}$$

Мы воспользовались здесь для производной $d(\rho c)/d\rho$ выражением (99.9), а для α_* — значением величины α (102.2) при $v = c_*$ (для политропного газа α есть просто постоянная, так что $\alpha_* = \alpha = (\gamma + 1)/2$). С той же точностью это равенство можно переписать в виде

$$\frac{v}{c} - 1 = \alpha_*\left(\frac{v}{c_*} - 1\right). \tag{114.8}$$

Это соотношение устанавливает в общем виде связь между числами M и M_* в околозвуковом случае.

С помощью этой формулы имеем

$$1 - \frac{v_x^2}{c^2} \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} \approx 2\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 2\alpha_*\left(1 - \frac{v}{c_*}\right).$$

Наконец, вводим новый потенциал, производя замену

$$\varphi \to c_*(x + \varphi),$$

так что теперь будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{v_x}{c_*} - 1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{v_y}{c_*}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{v_z}{c_*}. \tag{114.9}$$

Внося все это в (114.6), получим окончательно следующее уравнение для потенциала околозвукового течения (с направлением скорости, везде близким к оси x):

$$2\alpha_*\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{114.10}$$

Свойства газа входят сюда только через постоянную α_*. Мы увидим в дальнейшем, что зависимость всех вообще свойств околозвукового течения от конкретного рода газа целиком определяется этой постоянной.

Линеаризованное уравнение (114.4) становится неприменимым и в другом предельном случае — очень больших значений M_1, не говоря уже о том, что благодаря возникновению сильных ударных волн реальное течение при таких M_1 фактически вообще нельзя считать потенциальным (см. § 127).

§ 115. Стационарные простые волны

Определим общий вид решений уравнений стационарного плоского сверхзвукового движения газа, описывающих течения, при которых на бесконечности имеется однородный плоскопараллельный поток, в дальнейшем своем течении поворачивающий, обтекая искривленный профиль. С частным случаем такого решения нам уже приходилось иметь дело при изучении движения вблизи угла, — при этом мы по существу рассматривали плоскопараллельный поток, текущий вдоль одной из сторон угла и поворачивающий вокруг края этого угла. В этом частном решении все величины — две компоненты скорости, давление, плотность — были функциями всего лишь одной переменной — угла φ. Поэтому каждая из этих величин могла бы быть выражена в виде функции одной из них. Поскольку это решение должно содержаться в виде частного случая в искомом общем решении, то естественно искать это последнее, исходя из требования, чтобы и в нем каждая из величин p, ρ, v_x, v_y (плоскость движения выбираем в качестве плоскости xy) могла быть выражена в виде функции одной из них. Такое требование представляет собой, конечно, весьма существенное ограничение, налагаемое на решение уравнений движения, и получающееся таким образом решение отнюдь не является общим интегралом этих уравнений. В общем случае каждая из величин p, ρ, v_x, v_y, являющихся функцией двух координат x, y, могла бы быть выражена лишь через две из них.

Поскольку на бесконечности имеется однородный поток, в котором все величины, в частности и энтропия s, постоянны, а при стационарном движении идеальной жидкости энтропия сохраняется вдоль линий тока, то ясно, что и во всем пространстве

будет $s = \text{const}$, если только в газе нет ударных волн, что и предполагается ниже.

Уравнения Эйлера и уравнение непрерывности имеют вид

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0.$$

Написав частные производные в виде якобианов, перепишем эти уравнения в виде

$$v_x\frac{\partial(v_x, y)}{\partial(x, y)} - v_y\frac{\partial(v_x, x)}{\partial(x, y)} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p, y)}{\partial(x, y)},$$

$$v_x\frac{\partial(v_y, y)}{\partial(x, y)} - v_y\frac{\partial(v_y, x)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(p, x)}{\partial(x, y)};$$

$$\frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Выберем теперь в качестве независимых переменных x и p. Для того чтобы произвести соответствующее преобразование, достаточно умножить написанные уравнения на $\partial(x, y)/\partial(x, p)$, в результате чего получим уравнения в точности того же вида, с той лишь разницей, что в знаменателях всех якобианов будет стоять $\partial(x, p)$ вместо $\partial(x, y)$. Раскроем эти якобианы; при этом надо иметь в виду, что в независимых переменных x и p все величины ρ, v_x, v_y являются, по предположению, функциями только от p, и потому их частные производные по x равны нулю. Тогда получаем

$$\left(v_y - v_x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_x}{dp} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \left(v_y - v_x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_y}{dp} = -\frac{1}{\rho},$$

$$\left(v_y - v_x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{d\rho}{dp} + \rho\left(\frac{dv_y}{dp} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dv_x}{dp}\right) = 0$$

(где $\partial y/\partial x$ обозначает $(\partial y/\partial x)_p$). Все величины в этих уравнениях, за исключением лишь $\partial y/\partial x$, являются функциями только от p уже по сделанному предположению, а x вовсе не входит в уравнения явным образом. Поэтому прежде всего можно заключить на основании этих уравнений, что и $\partial y/\partial x$ есть некоторая функция только от p:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_p = f_1(p),$$

откуда

$$y = xf_1(p) + f_2(p), \tag{115.1}$$

где $f_2(p)$ — произвольная функция давления.

Дальнейших вычислений можно не производить вовсе, если непосредственно воспользоваться известным уже нам частным решением для волны разрежения при обтекании угла (§ 109, 112). Напомним, что в этом решении все величины (в том числе и давление) постоянны вдоль каждой прямой (характеристики), проходящей через вершину угла. Это частное решение, очевидно, соответствует случаю, когда в общем выражении (115.1) произвольная функция $f_2(p)$ тождественно равна нулю. Функция же $f_1(p)$ определяется полученными в § 109 формулами.

Уравнение (115.1) при постоянных значениях p определяет семейство прямых линий в плоскости xy. Эти прямые пересекают в каждой своей точке линии тока под углом Маха. Это очевидно из того, что таким свойством обладают прямые $y = xf_1(p)$ в частном решении с $f_2 \equiv 0$. Таким образом, и в общем случае одно из семейств характеристик (характеристики, «исходящие» от поверхности тела) представляет собой прямые лучи, вдоль которых все величины остаются постоянными; эти прямые, однако, не имеют теперь общей точки пересечения.

Изложенные свойства рассматриваемого движения в математическом отношении полностью аналогичны свойствам одномерных простых волн, у которых одно из семейств характеристик представляет собой семейство прямых линий в плоскости xt (см. § 101, 103, 104). Поэтому рассматриваемый класс течений играет в теории стационарного плоского (сверхзвукового) движения такую же роль, какую играют простые волны в теории нестационарного одномерного движения. Ввиду этой аналогии эти течения тоже называют простыми волнами. В частности, волну разрежения, соответствующую случаю $f_2 \equiv 0$, называют *центрированной простой волной*.

Как и в нестационарном случае, одно из важнейших свойств стационарных простых волн заключается в том, что течение во всякой области плоскости xy, граничащей с областью однородного потока, есть простая волна (ср. § 104).

Покажем теперь, каким образом может быть построена простая волна для обтекания заданного профиля.

На рис. 115 изображен обтекаемый профиль; слева от точки O он прямолинеен, далее от точки O начинается закругление. В сверхзвуковом потоке влияние закругления распространяется, разумеется, лишь на область потока вниз по течению от исходящей из точки O характеристики OA. Поэтому все течение слева от этой характеристики будет представлять собой однородный поток (относящиеся к нему значения величин отличаем индексом 1). Все характеристики в этой области параллельны друг другу и наклонены к оси x под углом Маха $\alpha_1 = \arcsin(c_1/v_1)$.

В формулах (109.12)–(109.15) угол наклона характеристик φ отсчитывается от луча, на котором $v = c = c_*$. Это значит (ср. § 112), что характеристике OA надо приписать значение угла φ, равное

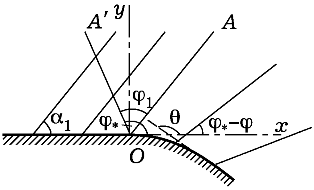


Рис. 115

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arccos \frac{c_1}{c_*},$$

и в дальнейшем отсчитывать углы φ для всех характеристик от направления OA' (рис. 115). Угол наклона характеристик к оси x будет тогда равен $\varphi_* - \varphi$, где $\varphi_* = \alpha_1 + \varphi_1$. Согласно формулам (109.12)–(109.15) скорость и давление выразятся через угол φ с помощью следующих соотношений:

$$v_x = v\cos\theta, \quad v_y = v\sin\theta, \tag{115.2}$$

$$v^2 = c_*^2\left(1 + \frac{2}{\gamma-1}\sin^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\varphi\right), \tag{115.3}$$

$$\theta = \varphi_* - \varphi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\varphi\right), \tag{115.4}$$

$$p = p_*\left(\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\varphi\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{115.5}$$

Уравнение же характеристик напишется в виде

$$y = x\operatorname{tg}(\varphi_* - \varphi) + F(\varphi). \tag{115.6}$$

Произвольная функция $F(\varphi)$ определится по заданной форме профиля следующим образом. Пусть форма профиля задана уравнением $Y = Y(X)$, где X и Y — координаты его точек. На самой поверхности скорость газа направлена по касательной к ней, т. е.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dY}{dX}. \tag{115.7}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку X, Y и наклоненной под углом $\varphi_* - \varphi$ к оси x, есть

$$y - Y = (x - X)\operatorname{tg}(\varphi_* - \varphi).$$

Это уравнение совпадает с (115.6), если в последнем положить

$$F(\varphi) = Y - X\operatorname{tg}(\varphi_* - \varphi). \tag{115.8}$$

Исходя из заданного уравнения $Y = Y(X)$ и уравнения (115.7), представляем форму профиля в виде параметрических уравнений $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$, где параметром является угол θ наклона касательной к профилю. Подставляя сюда θ, выраженное через φ согласно (115.4), получаем X и Y в виде функций от φ; наконец, подставляя их в (115.8), получим искомую функцию $F(\varphi)$.

При обтекании выпуклой поверхности угол θ наклона вектора скорости к оси x уменьшается вниз по течению (рис. 115). Вместе с ним монотонно убывает также и угол $\varphi_* - \varphi$ наклона характеристик (речь идет везде о характеристиках, исходящих от тела). Благодаря этому характеристики нигде (в области течения) не пересекаются друг с другом. Таким образом, в области вниз по течению от характеристики OA, которая будет представлять собой слабый разрыв, мы будем иметь непрерывный (без ударных волн) монотонно разрежающийся поток.

Иначе обстоит дело при обтекании вогнутого профиля. Здесь наклон θ касательной к профилю, а с ним и наклон характеристик возрастают в направлении течения. В результате характеристики пересекаются друг с другом (в области течения). Но на различных не параллельных друг другу характеристиках все величины (скорость, давление и т. п.) имеют различные значения. Поэтому в точках пересечения характеристик все эти функции оказываются многозначными, что физически нелепо. Аналогичное явление мы имели уже в нестационарной одномерной простой волне сжатия (§ 101). Как и там, оно означает здесь, что в действительности возникает ударная волна. Положение этого разрыва не может быть определено полностью из рассматриваемого решения, выведенного в предположении его отсутствия. Единственное, что может быть определено, — это место начала ударной волны (точка O на рис. 116; ударная волна изображена сплошной линией OB). Она определяется как точка пересечения характеристик, лежащая на наиболее близкой к поверхности тела линии тока. На линиях тока, проходящих под точкой O (ближе к телу), решение везде однозначно; в точке же O начинается его многозначность. Уравнения, определяющие координаты x_0, y_0 этой точки, могут быть

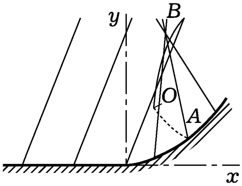


Рис. 116

получены аналогично тому, как были найдены соответствующие уравнения для определения момента и места образования разрыва в одномерной нестационарной простой волне. Если рассматривать угол наклона характеристик как функцию координат x и y точек, через которые они проходят, то при значениях x и y, превышающих некоторые определенные x_0, y_0, эта функция делается многозначной. В § 101 мы имели аналогичное положение

для функции $v(x,\,t)$; поэтому, не повторяя заново всех рассуждений, напишем сразу уравнения

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)_x = 0, \tag{115.9}$$

определяющие здесь место начала ударной волны. В математическом отношении это — угловая точка огибающей семейства прямолинейных характеристик (ср. § 103).

Что касается области существования простой волны при обтекании вогнутого профиля, то вдоль линий тока, проходящих над точкой O, оно применимо вплоть до места пересечения этих линий с ударной волной. Линии же тока, проходящие под точкой O, с ударной волной вообще не пересекаются. Однако отсюда нельзя сделать заключение о том, что вдоль них рассматриваемое решение применимо везде. Дело в том, что возникающая ударная волна оказывает возмущающее влияние и на газ, текущий вдоль этих линий тока, и таким образом нарушает движение, которое должно было бы иметь место в ее отсутствии. В силу свойства сверхзвукового потока эти возмущения будут, однако, проникать лишь в область газа, находящуюся вниз по течению от характеристики OA, исходящей из точки начала ударной волны (одна из характеристик второго семейства). Таким образом, рассматриваемое здесь решение будет применимым во всей области слева от линии AOB. Что касается самой линии OA, то она будет представлять собой слабый разрыв. Мы видим, что непрерывная (без ударных волн) во всей области простая волна сжатия вдоль вогнутой поверхности, аналогичная простой волне разрежения вдоль выпуклой поверхности, невозможна.

В ударной волне, возникающей при обтекании вогнутого профиля, мы имеем пример волны, «начинающейся» от некоторой точки, расположенной в самом потоке вдали от твердых стенок. Такая точка «начала» ударной волны обладает некоторыми общими свойствами, которые мы здесь отметим. В самой точке начала интенсивность ударной волны обращается в нуль, а вблизи нее мала. Но в ударной волне слабой интенсивности скачок энтропии и ротора скорости — величины третьего порядка малости, и потому изменение течения при прохождении через волну отличается от непрерывного потенциального изэнтропического изменения лишь в величинах третьего порядка. Отсюда следует, что в отходящих от точки начала ударной волны слабых разрывах должны испытывать скачок лишь производные третьего порядка от различных величин. Таких разрывов будет, вообще говоря, два: слабый разрыв, совпадающий с характеристикой, и тангенциальный слабый разрыв, совпадающий с линией тока (см. конец § 96).

§ 116. Уравнение Чаплыгина (общая задача о двумерном стационарном движении сжимаемого газа)

Рассмотрев стационарные простые волны, перейдем теперь к общей задаче о произвольном стационарном плоском потенциальном движении. Говоря о потенциальном течении, мы подразумеваем, что движение изэнтропично и что в нем отсутствуют ударные волны.

Оказывается возможным свести поставленную задачу к решению всего одного линейного уравнения в частных производных (*С.А. Чаплыгин*, 1902). Это осуществляется путем преобразования к новым независимым переменным — компонентам скорости v_x, v_y (это преобразование часто называют *преобразонанием годографа*; плоскость переменных v_x, v_y называют при этом плоскостью годографа, а плоскость xy — физической плоскостью).

Для потенциального движения вместо уравнений Эйлера можно написать сразу их первый интеграл, т. е. уравнение Бернулли:

$$w + \frac{v^2}{2} = w_0. \tag{116.1}$$

Уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0. \tag{116.2}$$

Для дифференциала потенциала φ скорости имеем

$$d\varphi = v_x\,dx + v_y\,dy.$$

Произведем преобразование от независимых переменных x, y к независимым переменным v_x, v_y путем преобразования Лежандра. Для этого запишем:

$$d\varphi = d(xv_x) - x\,dv_x + d(yv_y) - y\,dv_y.$$

Вводя функцию

$$\Phi = -\varphi + xv_x + yv_y, \tag{116.3}$$

получаем

$$d\Phi = x\,dv_x + y\,dv_y,$$

где Φ рассматривается как функция от v_x и v_y. Отсюда имеем

$$x = \frac{\partial\Phi}{\partial v_x}, \quad y = \frac{\partial\Phi}{\partial v_y}. \tag{116.4}$$

Удобнее, однако, пользоваться не декартовыми компонентами скорости, а ее абсолютной величиной v и углом θ, образуемым ею с осью x:

$$v_x = v\cos\theta, \quad v_y = v\sin\theta. \tag{116.5}$$

Произведя соответствующее преобразование производных, легко получаем вместо (116.4) следующие соотношения:

$$x = \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\sin\theta}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad y = \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\cos\theta}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \tag{116.6}$$

Связь между потенциалом φ и функцией Φ дается при этом простой формулой

$$\varphi = -\Phi + v\frac{\partial \Phi}{\partial v}. \tag{116.7}$$

Наконец, для того чтобы получить уравнение, определяющее функцию $\Phi(v,\,\theta)$, надо преобразовать к новым переменным уравнение непрерывности (116.2). Написав производные в виде якобианов:

$$\frac{\partial(\rho v_x,\,y)}{\partial(x,\,y)} - \frac{\partial(\rho v_y,\,x)}{\partial(x,\,y)} = 0,$$

умножив затем на $\partial(x,\,y)/\partial(v,\,\theta)$ и подставив сюда значения v_x и v_y из (116.5), имеем

$$\frac{\partial(\rho v\cos\theta,\,y)}{\partial(v,\,\theta)} - \frac{\partial(\rho v\sin\theta,\,x)}{\partial(v,\,\theta)} = 0.$$

При раскрытии этих якобианов надо подставить для x и y выражения (116.6). Кроме того, поскольку энтропия s является заданной постоянной величиной, то, выразив плотность в виде функции от s и w и подставив для w выражение $w = w_0 - v^2/2$, мы найдем, что плотность может быть написана в виде функции только от скорости: $\rho = \rho(v)$. Имея все это в виду, получим после простых преобразований следующее уравнение:

$$\frac{d(\rho v)}{dv}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{1}{v}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\right) + \rho v\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0.$$

Согласно (83.5) имеем

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

и в результате получим окончательно для функции $\Phi(v,\,\theta)$ следующее *уравнение Чаплыгина*:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{v^2}{1 - v^2/c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + v\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0. \tag{116.8}$$

Здесь скорость звука является заданной функцией скорости, $c = c(v)$, определяемой уравнением состояния газа и уравнением Бернулли.

Уравнение (116.8) вместе с соотношениями (116.6) заменяет собой уравнения движения. Таким образом, задача о решении нелинейных уравнений движения сводится к решению линейного

уравнения для функции $\Phi(v,\,\theta)$. Правда, нелинейными оказываются зато граничные условия для этого уравнения. Эти условия заключаются в следующем. На поверхности обтекаемого тела скорость газа направлена по касательной к ней. Выразив координаты уравнения поверхности в виде параметрических уравнений $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$ (как это было объяснено в предыдущем параграфе) и подставив X и Y в (116.6) вместо x и y, мы получим два уравнения, которые должны удовлетворяться при всех значениях θ, что возможно отнюдь не при всякой функции $\Phi(v,\,\theta)$. Граничное условие как раз и будет заключаться в требовании, чтобы оба эти уравнения были совместными при всех θ, т. е. одно из них должно быть автоматическим следствием другого.

Удовлетворения граничных условий, однако, еще не достаточно для того, чтобы гарантировать пригодность полученного решения уравнения Чаплыгина для определения реального течения во всей области движения в физической плоскости. Необходимо еще выполнение следующего требования: якобиан

$$\Delta = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(\theta,\,v)}$$

нигде не должен менять знак, проходя через нуль (за исключением лишь тривиального случая, когда обращаются в нуль все четыре составляющие его производные). Легко видеть, что если это условие нарушается, то при прохождении через определенную равенством $\Delta = 0$ (так называемую *предельную*) линию в плоскости xy решение, вообще говоря, становится комплексным [1]. Действительно пусть на линии $v = v_0(\theta)$ имеем $\Delta = 0$ и пусть при этом $(\partial y/\partial\theta)_v \neq 0$. Тогда имеем

$$-\Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_v = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(v,\,\theta)}\,\frac{\partial(v,\,\theta)}{\partial(v,\,y)} = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(v,\,y)} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_y = 0.$$

Отсюда видно, что вблизи предельной линии v как функция от x (при заданном y) определяется уравнением вида

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_y (v - v_0)^2,$$

и по одну из сторон от предельной линии v становится комплексной [2].

---

[1]) Прохождение же через нуль путем обращения Δ в бесконечность не запрещается. Если на некоторой линии $1/\Delta = 0$, то это приводит лишь к тому, что соответствие между плоскостями xy и $v\theta$ становится не взаимно однозначным в том смысле, что при обходе плоскости xy некоторая часть плоскости $v\theta$ проходится дважды или трижды.

[2]) Это утверждение остается, очевидно, справедливым и в тех случаях, когда одновременно с Δ обращается в нуль и $(\partial^2 x/\partial v^2)_y$, но производная $(\partial x/\partial v)_y$ по-прежнему меняет знак при $v = v_0$, т. е. разность $x - x_0$ пропорциональна более высокой четной степени $v - v_0$.

Легко видеть, что предельная линия может появиться лишь в областях сверхзвукового движения. Непосредственное вычисление с использованием соотношений (116.6) и уравнения (116.8) дает

$$\Delta = \frac{1}{v}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\,\partial v} - \frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{v^2}{1 - v^2/c^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)^2\right]. \tag{116.9}$$

Ясно, что при $v \leqslant c$ всегда $\Delta > 0$, и лишь при $v > c$ Δ может изменить знак, пройдя через нуль.

Появление в решении уравнения Чаплыгина предельных линий свидетельствует о том, что в данных конкретных условиях невозможен непрерывный во всей области движения режим обтекания, и в потоке должны возникать ударные волны. Следует, однако, подчеркнуть, что положение этих волн отнюдь не совпадает с предельными линиями.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели частный случай сверхзвукового стационарного двумерного течения (простую волну), характерный тем, что в нем величина скорости является функцией только ее направления: $v = v(\theta)$. Это решение не могло бы быть получено из уравнения Чаплыгина; для него тождественно $1/\Delta \equiv 0$, и оно теряется, когда при преобразовании к плоскости годографа приходится умножать уравнение движения (уравнение непрерывности) на якобиан Δ. Положение здесь аналогично тому, что мы имели в теории одномерного нестационарного движения. Все сказанное в § 105 о взаимоотношении между простой волной и общим интегралом уравнения (105.2) полностью относится и ко взаимоотношению между стационарной простой волной и общим интегралом уравнения Чаплыгина.

Положительность якобиана Δ при дозвуковом движении позволяет установить определенное правило, относящееся к направлению поворота скорости вдоль потока (*А.А. Никольский*, *Г.И. Таганов*, 1946). Имеем тождественно

$$\frac{1}{\Delta} \equiv \frac{\partial(\theta,\, v)}{\partial(x,\, y)} = \frac{\partial(\theta,\, v)}{\partial(x,\, v)}\frac{\partial(x,\, v)}{\partial(x,\, y)},$$

или

$$\frac{1}{\Delta} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_v\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x. \tag{116.10}$$

В дозвуковом потоке $\Delta > 0$, и мы видим, что производные $(\partial\theta/\partial x)_v$ и $(\partial v/\partial y)_x$ имеют одинаковый знак. Этот результат имеет простой геометрический смысл: если передвигаться вдоль линии $v = \text{const} \equiv v_0$ так, чтобы область $v < v_0$ лежала справа, то угол θ будет монотонно возрастать, т. е. вектор скорости монотонно поворачивается против часовой стрелки. Этот результат

относится, в частности, и к линии перехода из до- в сверхзвуковое течение, вдоль которой $v = c = c_*$.

В заключение выпишем уравнение Чаплыгина для политропного газа выразив в нем в явном виде c через v:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + v^2\frac{1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\dfrac{v^2}{c_*^2}}{1-\dfrac{v^2}{c_*^2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + v\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0. \qquad (116.11)$$

Это уравнение обладает семейством частных интегралов, выражающихся через гипергеометрические функции [1]).

§ 117. Характеристики плоского стационарного течения

Некоторые общие свойства характеристик плоского стационарного (сверхзвукового) движения были рассмотрены уже в § 82. Выведем теперь уравнения, определяющие эти линии по заданному решению уравнений движения.

В плоском стационарном сверхзвуковом потоке имеется в общем случае три семейства характеристик. По двум из них (которые мы будем называть характеристиками C_+ и C_-) распространяются все малые возмущения, за исключением лишь возмущений энтропии и ротора скорости; последние распространяются по характеристикам третьего семейства C_0, совпадающим с линиями тока. Для заданного течения линии тока известны, и вопрос заключается в определении характеристик первых двух семейств.

Направления проходящих через каждую точку плоскости характеристик C_+ и C_- расположены по обе стороны от проходящей через ту же точку линии тока и образуют с ней угол, равный местному значению угла возмущений α (см. рис. 51). Обозначим через m_0 тангенс угла наклона к оси (угловой коэффициент) линии тока в данной ее точке, а через m_+ и m_- — угловые коэффициенты характеристик C_+ и C_-. Тогда по формуле сложения тангенсов напишем:

$$\frac{m_+ - m_0}{1+m_0m_+} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{m_- - m_0}{1+m_0m_-} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$m_\pm = \frac{m_0 \pm \operatorname{tg}\alpha}{1 \mp m_0\operatorname{tg}\alpha}$$

[1]) См., например, *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966, гл. X; *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. — М.: ИЛ, 1961, § 20.

(верхние знаки относятся везде к C_+, а нижние — к C_-). Подставив сюда

$$m_0 = \frac{v_y}{v_x}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}$$

и произведя сокращения, получим следующее выражение для угловых коэффициентов характеристик:

$$m_\pm \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_\pm = \frac{v_x v_y \pm c\sqrt{v^2 - c^2}}{v_x^2 - c^2}. \tag{117.1}$$

Если распределение скоростей в потоке известно, то это есть дифференциальное уравнение, определяющее характеристики C_+ и C_- [1]).

Наряду с характеристиками в плоскости xy можно рассматривать также и характеристики в плоскости годографа, в особенности полезные при изучении изэнтропического потенциального течения, о котором мы и будем ниже говорить. С математической точки зрения это — характеристики уравнения Чаплыгина (116.8) (принадлежащего при $v > c$ к гиперболическому типу). Следуя известному из математической физики общему методу (см. § 103), с помощью коэффициентов этого уравнения составляем уравнение характеристик:

$$dv^2 + d\theta^2 \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} = 0,$$

или

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)_\pm = \pm\frac{1}{v}\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}. \tag{117.2}$$

Определяемые этим уравнением характеристики не зависят от конкретного решения уравнения Чаплыгина, что связано с независимостью коэффициентов последнего от Φ. Характеристики в плоскости годографа, являющиеся отображением характеристик C_+ и C_- в физической плоскости, мы будем условно называть соответственно характеристиками Γ_+ и Γ_- (знаки в (117.2) соответствуют этому условию).

Интегрирование уравнения (117.2) дает соотношения вида $J_+(v, \theta) = \text{const}$, $J_-(v, \theta) = \text{const}$. Функции J_+ и J_- представляют собой величины, остающиеся постоянными соответственно вдоль характеристик C_+ и C_- (инварианты Римана). Для поли-

[1]) Уравнение (117.1) определяет характеристики и для стационарного осесимметрического течения, если только заменить v_y и y на v_r и r, где r — цилиндрическая координата (расстояние от оси симметрии — оси x); ясно, что весь вывод не изменится, если вместо плоскости xy рассматривать проходящую через ось симметрии плоскость xr.

тропного газа уравнение (117.2) может быть проинтегрировано в явном виде. Нет, однако, необходимости производить эти вычисления заново, так как результат может быть написан заранее с помощью формул (115.3), (115.4). Действительно, согласно общим свойствам простых волн (см. § 104) зависимость v от θ в простой волне как раз и определяется условием постоянства во всем пространстве одного из инвариантов Римана. Произвольной постоянной в формулах (115.3) и (115.4) является φ_*; исключая из этих формул параметр φ, получим

$$J_\pm = \theta \pm \left[\arcsin\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\left(1-\frac{c_*^2}{v^2}\right)} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arcsin\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{v^2}{c_*^2}-1\right)}\right]. \quad (117.3)$$

Характеристики в плоскости годографа представляют собой семейство эпициклоид, заполняющих пространство между двумя окружностями радиусов (рис. 117):

$$v = c_* \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}c_*.$$

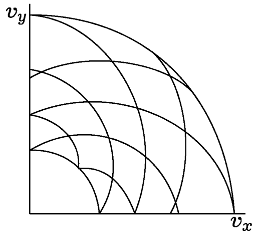


Рис. 117

Для изэнтропического потенциального движения характеристики Γ_+ и Γ_- обладают следующим важным свойством: семейства характеристик Γ_+ и Γ_- ортогональны соответственно характеристикам C_- и C_+ (предполагается, что оси координат x, y изображены параллельными осям v_x, v_y) [1]).

Для доказательства этого утверждения исходим из уравнения (114.3) для потенциала плоского течения, имеющего вид

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (117.4)$$

(существенно, что в нем отсутствует свободный член).

Угловые коэффициенты $m_\pm$ характеристик $C_\pm$ определяются как корни квадратного уравнения

$$Am^2 - 2Bm + C = 0.$$

Рассмотрим выражение $dv_x^+\,dx^- + dv_y^+\,dy^-$, в котором дифференциалы скорости берутся вдоль характеристики Γ_+, а

[1]) Это утверждение не относится к характеристикам осесимметрического движения в плоскости xr!

дифференциалы координат — вдоль C_-. Имеем тождественно:

$$dv_x^+\,dx^- + dv_y^+\,dy^- = \\ = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx^+\,dx^- + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}(\,dx^+\,dy^- + dx^-\,dy^+) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,dy^+\,dy^-.$$

Разделив это выражение на $dx^+\,dx^-$, получим в качестве коэффициентов при $\partial^2\varphi/\partial x\,\partial y$ и $\partial^2\varphi/\partial y^2$ соответственно $m_+ + m_- = = 2B/A$ и $m_+m_- = C/A$, после чего ясно, что в силу уравнения (117.4) выражение обращается в нуль. Таким образом,

$$dv_x^+\,dx^- + dv_y^+\,dy^- = d\mathbf{v}^+\,d\mathbf{r}^- = 0.$$

Аналогично получим

$$d\mathbf{v}^-\,d\mathbf{r}^+ = 0.$$

Эти равенства и выражают собой сделанное выше утверждение.

§ 118. Уравнение Эйлера–Трикоми. Переход через звуковую скорость

Существенный принципиальный интерес имеет исследование особенностей течения, возникающих при переходе из до- в сверхзвуковую область, или обратно. Стационарные течения, сопровождающиеся таким переходом, называются *смешанными* или *трансзвуковыми*, а самую границу перехода называют *переходной* или *звуковой поверхностью.*

Для исследования течения вблизи границы перехода в особенности удобно уравнение Чаплыгина, сильно упрощающееся в этой области.

На границе перехода $v = c = c_*$, а вблизи нее (в *околозвуковой* области) разности $v - c_*$, и $c - c_*$ малы и связаны друг с другом соотношением (114.8):

$$\frac{v}{c} - 1 = \alpha_*\Big(\frac{v}{c_*} - 1\Big).$$

Произведем соответствующие упрощения в уравнении Чаплыгина. Третий член уравнения (116.8) мал по сравнению со вторым, содержащим $1 - v^2/c^2$ в знаменателе. Во втором же члене полагаем приближенно

$$\frac{v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{c_*^2}{2(1 - v/c)} = \frac{c_*}{2\alpha_*(1 - v/c_*)}.$$

Наконец, вводя вместо скорости v новую переменную

$$\eta = (2\alpha_*)^{1/3}\frac{v - c_*}{c_*}, \tag{118.1}$$

получим искомое уравнение в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - \eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0. \qquad (118.2)$$

Уравнение такого вида в математической физике называется *уравнением Эйлера–Трикоми* [1]. В полуплоскости $\eta > 0$ оно относится к гиперболическому, а в полуплоскости $\eta < 0$ — к эллиптическому типу. Мы рассмотрим здесь ряд чисто математических свойств этого уравнения, которые существенны для исследования тех или иных конкретных физических случаев.

Характеристики уравнения (118.2) определяются уравнением

$$\eta\, d\eta^2 - d\theta^2 = 0,$$

имеющим общий интеграл:

$$\theta \pm \frac{2}{3}\eta^{3/2} = C, \qquad (118.3)$$

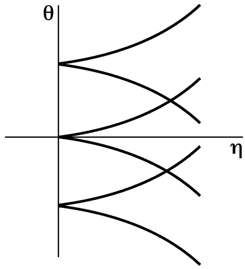


Рис. 118

где C — произвольная постоянная. Это уравнение изображает в плоскости $\eta\theta$ два семейства характеристик, представляющих собой ветви полукубических парабол, расположенных в правой полуплоскости с точками возврата на оси θ (рис. 118).

При исследовании движения в небольшой области пространства, в которой направление скорости газа меняется незначительно [2], всегда можно выбрать направление оси x так, чтобы отсчитываемый от нее угол θ во всей рассматриваемой области был малым. Тогда сильно упрощаются также и уравнения (116.6), определяющие координаты x, y по функции $\Phi(\eta, \theta)$ [3]:

$$x = (2\alpha_*)^{1/3}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \quad y = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}.$$

Для того чтобы избежать появления в формулах лишнего множителя $(2\alpha_*)^{1/3}$, мы будем ниже, в § 118–121, пользоваться вместо координаты x величиной $x(2\alpha_*)^{1/3}$, обозначая ее той же

[1] К рассматриваемой газодинамической проблеме уравнение Трикоми было привлечено *Ф.И. Франклем* (1945).

[2] Слова «небольшая область» не следует, разумеется, понимать буквально. Речь может идти и об исследовании окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. о течении на достаточно больших расстояниях от обтекаемого тела.

[3] Мы опустили в правых частях равенства множители $1/c_*$; это означает лишь замену функции Φ на $c_*\Phi$, не меняющую уравнения (118.2) и потому всегда допустимую.

буквой x. Тогда

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \tag{118.4}$$

Полезно заметить, что ввиду такой простой связи с Φ функция $y(\eta, \theta)$ (но не $x(\eta, \theta)$) тоже удовлетворяет уравнению Эйлера–Трикоми. Имея это в виду, можно написать якобиан преобразования из физической плоскости в плоскость годографа в виде

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \eta)} = \Phi_{\eta\theta}^2 - \Phi_{\eta\eta}\Phi_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 - \eta\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2. \tag{118.5}$$

Как уже сказано, уравнение Эйлера–Трикоми приходится обычно применять для исследования свойств решения в окрестности начала координат в плоскости $\eta\theta$. В физически интересных случаях эта точка представляет собой особую точку решения. В связи с этим особое значение приобретает семейство частных интегралов уравнения Эйлера–Трикоми, обладающих определенными свойствами однородности. Именно, речь идет о решениях, однородных по отношению к переменным θ^3 и η^3; такие решения должны существовать, поскольку преобразование $\theta^2 \to a\theta^2$, $\eta^3 \to a\eta^3$ оставляет инвариантным уравнение (118.2). Будем искать эти решения в виде

$$\Phi = \theta^{2k} f(\xi), \quad \xi = 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2},$$

где k — постоянная (степень однородности функции Φ по отношению к указанному преобразованию). Переменную ξ мы выбрали такой, что она обращается в нуль на характеристиках, проходящих через точку $\eta = \theta = 0$. Сделав подстановку, получим для функции $f(\xi)$ уравнение

$$\xi(1-\xi)f'' + \left[\frac{5}{6} - 2k - \xi\left(\frac{3}{2} - 2k\right)\right]f' - k\left(k - \frac{1}{2}\right)f = 0.$$

Это — частный случай гипергеометрического уравнения. С помощью известного выражения для двух независимых интегралов гипергеометрического уравнения находим искомое решение (при нецелом числе $2k + 1/6$) в виде

$$\Phi_k = \theta^{2k}\left[AF\left(-k, -k + \frac{1}{2}, -2k + \frac{5}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) + \right.$$
$$\left. + B\left(1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k+1/6} F\left(k + \frac{1}{6}, k + \frac{2}{3}, 2k + \frac{7}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right]. \tag{118.6}$$

С помощью известных соотношений между гипергеометрическими функциями от аргументов z, $\frac{1}{z}$, $1-z$, $\frac{1}{1-z}$, $\frac{z}{1-z}$ можно пред-

ставить это решение еще в пяти других видах; при исследовании различных конкретных случаев приходится пользоваться всеми этими видами [1]. Мы приведем здесь лишь следующие два вида:

$$\Phi_k = \theta^{2k}\Big[AF\Big(-k,\ -k+\frac{1}{2},\ \frac{2}{3};\ \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\Big) + \\ + B\frac{\eta}{\theta^{2/3}}F\Big(-k+\frac{1}{3},\ -k+\frac{5}{6},\ \frac{4}{3};\ \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\Big)\Big], \quad (118.7)$$

$$\Phi_k = \eta^{3k}\Big[AF\Big(-k,\ -k+\frac{1}{3},\ \frac{1}{2};\ \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\Big) + \\ + B\frac{\theta}{\eta^{3/2}}F\Big(-k+\frac{1}{2},\ -k+\frac{5}{6},\ \frac{3}{2};\ \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\Big)\Big] \quad (118.8)$$

(постоянные A, B в формулах (118.6)–(118.8), конечно, не совпадают). Из этих выражений сразу следует важное свойство функций Φ_k, не видное непосредственно из выражения (118.6): линии $\eta = 0$ и $\theta = 0$ не являются их особыми линиями (из (118.7) видно, что вблизи $\eta = 0$ Φ_k разлагается по целым степеням η, а из (118.8) — то же самое по θ). Из выражения же (118.6) видно, что характеристики, напротив, являются особыми линиями общего (т. е. содержащего обе постоянные A и B) однородного интеграла Φ_k уравнения Эйлера–Трикоми: при нецелом $2k+1/6$ точками разветвления обладает множитель $(9\theta^2-4\eta^3)^{2k+1/6}$, а при целом $2k+1/6$ один из членов в (118.6) вообще теряет смысл [2] (либо при $2k+1/6=0$ совпадает с другим) и должен быть заменен вторым независимым решением гипергеометрического уравнения, имеющим, как известно, в этом случае логарифмическую особенность.

Между интегралами Φ_k с различными значениями k имеются следующие соотношения:

$$\Phi_k = \Phi_{-k-1/6}(9\theta^2-4\eta^3)^{2k+1/6}, \quad (118.9)$$

$$\Phi_{k-1/2} = \frac{\partial\Phi_k}{\partial\theta}. \quad (118.10)$$

Первое следует непосредственно из выражения (118.6), а второе — из того, что функция $\partial\Phi_k/\partial\theta$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Трикоми и имеет ту же степень однородности, что и $\Phi_{k-1/2}$. В этих формулах под Φ_k подразумевается, конечно, общее выражение с двумя произвольными постоянными.

---

[1] Соответствующие формулы можно найти, например, в т. III § е Математического дополнения.

[2] Напомним, что ряд $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)$ при $\gamma = 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ теряет смысл.

При исследовании решения в окрестности точки $\eta = \theta = 0$ приходится следить за его изменением при обходе вокруг этой точки. Пусть, например, функция Φ_k (118.6) изображает решение в точке A вблизи характеристики $\theta = (2/3)\eta^{3/2}$ (рис. 119) и требуется найти форму решения вблизи характеристики $\theta = -(2/3)\eta^{3/2}$ (в точке B). Переход вдоль AB связан с пересечением оси абсцисс; между тем значение $\theta = 0$ есть особая точка гипергеометрических функций в выражении (118.6), так как их аргумент обращается в бесконечность. Поэтому для совершения перехода необходимо сначала применить к гипергеометрическим функциям преобразование, переводящее их в функции обратного аргумента $\left(\dfrac{9\theta^2}{9\theta^2 - 4\eta^3}\right)$, для которых $\theta = 0$ уже не будет особой точкой, после чего меняем знак θ и повторным таким же преобразованием переводим их в функции прежнего аргумента. Таким способом получим для функций, входящих в выражение (118.6), следующие формулы преобразования:

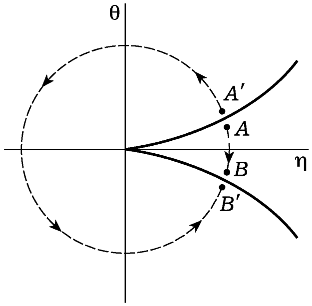


Рис. 119

$$F_1 \to \frac{F_1}{2\sin\left[\pi\left(2k+\dfrac{1}{6}\right)\right]} + F_2 \cdot 2^{-4k-1/3}\frac{\Gamma\left(-2k-\dfrac{1}{6}\right)\Gamma\left(-2k+\dfrac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k)\Gamma\left(-2k-\dfrac{2}{3}\right)},$$

$$F_2 \to -\frac{F_2}{2\sin\left[\pi\left(2k+\dfrac{1}{6}\right)\right]} + F_1 \cdot 2^{4k+1/3}\frac{\Gamma\left(2k+\dfrac{1}{6}\right)\Gamma\left(2k+\dfrac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k+1)\Gamma\left(2k+\dfrac{1}{3}\right)}, \qquad (118.11)$$

причем под F_1 и F_2 подразумеваются выражения

$$F_1 = |\theta|^{2k} F\left(-k,\ -k+\frac{1}{2},\ -2k+\frac{5}{6};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right),$$

$$F_2 = |\theta|^{2k}\left|1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right|^{2k+1/6} F\left(k+\frac{1}{6},\ k+\frac{2}{3},\ 2k+\frac{7}{6};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \qquad (118.12)$$

в которых θ и $1 - 4\eta^3/(9\theta^2)$ в коэффициентах при гипергеометрических функциях берутся по их абсолютным значениям.

Аналогичным образом можно получить формулы преобразования при переходе из точки A' в точку B' (рис. 119) путем обхода начала координат в обратном направлении. Вычисления

при этом более громоздки, так как приходится проходить через три особые точки гипергеометрических функций — точку с $\theta = 0$ и два раза точки с $\eta = 0$ (напомним, что особыми точками гипергеометрической функции аргумента z являются точки $z = 1$ и $z = \infty$). Окончательные формулы имеют вид

$$F_1 \to -\frac{\sin\left[\pi\left(4k - \frac{1}{6}\right)\right]}{\sin\left[\pi\left(2k + \frac{1}{6}\right)\right]} F_1 + \\ + F_2 \cdot 2^{-4k+2/3} \cos\left[\pi\left(2k + \frac{1}{6}\right)\right] \frac{\Gamma\left(-2k - \frac{1}{6}\right)\Gamma\left(-2k + \frac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k)\Gamma\left(-2k - \frac{2}{3}\right)},$$

$$F_2 \to \frac{\sin\left[\pi\left(4k - \frac{1}{6}\right)\right]}{\sin\left[\pi\left(2k + \frac{1}{6}\right)\right]} F_2 + \\ + F_1 \cdot 2^{4k+4/3} \cos\left[\pi\left(2k + \frac{1}{6}\right)\right] \frac{\Gamma\left(2k + \frac{1}{6}\right)\Gamma\left(2k + \frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k+1)\Gamma\left(2k + \frac{1}{3}\right)}. \tag{118.13}$$

Наряду с рассмотренным семейством однородных решений можно построить, конечно, и другие семейства частных интегралов уравнения Эйлера–Трикоми. Укажем здесь семейство решений, возникающих в связи с разложением Фурье по углу θ. Если искать Φ в виде

$$\Phi_\nu = g_\nu(\eta) e^{\pm i\nu\theta}, \tag{118.14}$$

где ν — произвольная постоянная, то для функции g_ν получим уравнение

$$g_\nu'' + \nu^2 \eta g_\nu = 0.$$

Это — уравнение функций Эйри; его общий интеграл есть

$$g_\nu(\eta) = \sqrt{\eta} Z_{1/3}\left(\frac{2\nu}{3}\eta^{3/2}\right), \tag{118.15}$$

где $Z_{1/3}$ — произвольная линейная комбинация функций Бесселя порядка $1/3$.

Наконец, полезно иметь в виду, что общий интеграл уравнения Эйлера–Трикоми может быть написан в виде

$$\Phi = \int\limits_C f(\zeta)\, dz, \quad \zeta = z^3 - 3\eta z + 3\theta, \tag{118.16}$$

где $f(\zeta)$ — произвольная функция, а интегрирование производится в плоскости комплексного переменного z по любому контуру C, на концах которого производная $f'(\zeta)$ принимает одинаковые значения. Действительно, непосредственная подстановка выражения (118.16) в уравнение дает

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - \eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 9\int\limits_C (z^2-\eta)f''(\zeta)\,dz = 3\int f''(\zeta)\,d\zeta = 3f'(\zeta)| = 0,$$

т. е. уравнение удовлетворяется.

§ 119. Решения уравнения Эйлера–Трикоми вблизи неособых точек звуковой поверхности

Выясним теперь, какие решения Φ_k соответствуют тем случаям, когда в окрестности границы перехода течение газа не обладает никакими физическими особенностями (нет слабых разрывов или ударных волн). Для этого, однако, удобнее исходить не непосредственно из уравнения Эйлера–Трикоми, а из уравнения для потенциала скорости в физической плоскости. Такое уравнение было выведено в § 114; для плоского движения уравнение (114.10) после введения новой координаты согласно $x \to x(2\alpha_*)^{1/3}$ принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}. \tag{119.1}$$

Напомним, что потенциал φ определен здесь таким образом, что его производные по координатам дают скорость согласно равенствам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \eta, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \theta. \tag{119.2}$$

Заметим также, что уравнение Эйлера–Трикоми можно получить и непосредственно из уравнения (119.1), переходя к независимым переменным θ, η с помощью преобразования Лежандра, причем будет $\Phi = -\varphi + x\eta + y\theta$, или

$$\varphi = -\Phi + \eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \tag{119.3}$$

Выбрав начало координат x, y в точке звуковой линии, окрестность которой мы исследуем, разложим φ по степеням x и y. В общем случае первый член разложения, удовлетворяющего уравнению (119.1), есть

$$\varphi = \frac{1}{a}xy. \tag{119.4}$$

При этом $\theta = x/a$, $\eta = y/a$, так что

$$\Phi = a\theta\eta. \tag{119.5}$$

По степени однородности этой функции ясно, что ему соответствует одна из функций $\Phi_{5/6}$; это есть второй член выражения (118.7), в котором гипергеометрическая функция с $k = 5/6$ сводится просто к 1:

$$\eta\theta F\left(-\frac{1}{2},\, 0,\, \frac{4}{3};\, \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \eta\theta.$$

Если мы хотим найти уравнение звуковой линии в физической плоскости, то написанный первый член разложения недостаточен. Следующий член разложения Φ имеет степень однородности 1, т. е. соответствует одной из функций Φ_1; это есть первый член выражения (118.7), сводящийся при $k = 1$ к полиному:

$$\theta^2 F\left(-1,\, -\frac{1}{2},\, \frac{2}{3};\, \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \theta^2 + \frac{\eta^3}{3}.$$

Таким образом, первые два члена разложения Φ:

$$\Phi = a\eta\theta + b\left(\theta^2 + \frac{\eta^3}{3}\right). \tag{119.6}$$

Отсюда

$$x = a\theta + b\eta^2, \quad y = a\eta + 2b\theta. \tag{119.7}$$

Звуковая линия ($\eta = 0$) есть прямая $y = 2bx/a$.

Для нахождения же уравнения характеристик в физической плоскости достаточен первый член разложения. Подставляя $\theta = x/a$, $\eta = y/a$ в уравнение годографических характеристик $\theta = \pm 2\eta^{3/2}/3$, получим

$$x = \pm\frac{2}{3\sqrt{a}}\, y^{3/2},$$

т. е. снова две ветви полукубической параболы с точкой возврата на звуковой линии (жирная кривая на рис. 120).

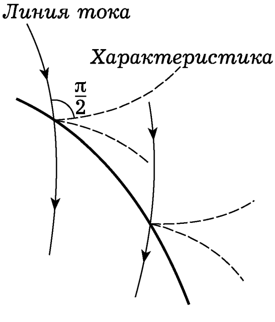


Рис. 120

Это свойство характеристик заранее очевидно из следующих простых соображений. В точках линии перехода угол Маха равен $\pi/2$. Это значит, что касательные к характеристикам обоих семейств совпадают, что и означает наличие здесь точки возврата (рис. 120). Линии же тока пересекают звуковую линию перпендикулярно к характеристикам, не имея здесь особенностей.

Решение (119.6) неприменимо в том исключительном случае, когда линия тока перпендикулярна к звуковой линии в рассматриваемой точке [1]. Вблизи такой точки течение, очевидно, симметрично относительно оси x. Этот случай требует особого рассмотрения (*Ф.И. Франкль* и *С.В. Фалькович*, 1945).

Симметрия течения означает, что при изменении знака y скорость v_y меняет знак, а v_x остается неизменной. Другими словами, потенциал φ должен быть четной функцией y (а потенциал Φ — четной функцией θ). Первые члены разложения φ будут поэтому в этом случае иметь следующий вид:

$$\varphi = \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2xy^2}{2} + \frac{a^3y^4}{24} \tag{119.8}$$

(относительный порядок малости x и y не предопределен, так что все три написанных члена могут быть одинакового порядка). Отсюда находим следующие формулы преобразования из физической плоскости в плоскость годографа:

$$\eta = ax + \frac{a^2y^2}{2}, \quad \theta = a^2xy + \frac{a^3y^3}{6}. \tag{119.9}$$

Уже не решая этих уравнений относительно x и y в явном виде, легко видеть, что степень однородности функции $y(\theta, \eta)$ равна 1/6. Поэтому соответствующая функция Φ имеет $k = 1/6+1/2 = 2/3$, т. е. заключена в общем интеграле $\Phi_{2/3}$.

Исключив из уравнений (119.9) x, получим для определения функции $y(\theta, \eta)$ кубическое уравнение

$$(ay)^3 - 3\eta ay + 3\theta = 0. \tag{119.10}$$

При $\theta^2 - 4\eta^3/9 > 0$, т. е. во всей области слева от годографических характеристик, проходящих через точку $\eta = \theta = 0$ (в том числе во всей дозвуковой области, $\eta < 0$; рис. 121), это уравнение имеет всего один вещественный корень, который и должен быть взят в качестве функции $y(\theta, \eta)$. В области же справа от характеристик вещественны все три корня; из них должен быть взят тот, который является продолжением вещественного в левой области корня.

Характеристики в физической плоскости (проходящие через начало координат) получаются подстановкой выражений (119.9) в уравнение $4\eta^3 = 9\theta^2$. Это дает две параболы:

$$\begin{aligned} &\text{характеристики } \mathit{23} \text{ и } \mathit{56}: \ x = -ay^2/4, \\ &\text{характеристики } \mathit{34} \text{ и } \mathit{45}: \ x = ay^2/2 \end{aligned} \tag{119.11}$$

[1]) В решении (119.6) этому соответствовало бы равенство нулю постоянной a; но при $a = 0$ это решение теряет смысл, так как на линии $\eta = 0$ обращается в нуль якобиан Δ.

(цифры указывают, какие две области в физической плоскости разделяет данная характеристика). Звуковая же линия ($\eta = 0$ в плоскости годографа) в физической плоскости есть парабола $x = -ay^2/2$ (жирная кривая на рис. 121). Отметим следующую особенность точки пересечения звуковой линии с осью симметрии: из этой точки исходят четыре ветви характеристик, между тем как из всякой другой точки звуковой линии — всего две.

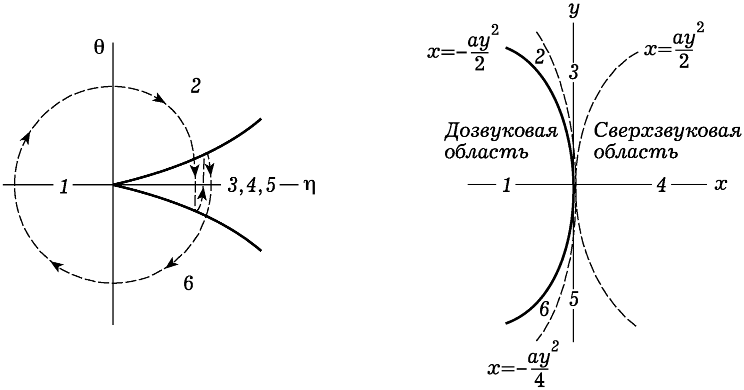


Рис. 121

На рис. 121 одинаковыми цифрами отмечены соответствующие друг другу области плоскости годографа и физической плоскости. Это соответствие — не взаимно однозначное [1]); при полном обходе вокруг начала координат в физической плоскости область между двумя характеристиками в плоскости годографа проходится трижды, как это указано штриховой линией на рис. 121, дважды отражающейся от характеристик.

Поскольку функция $y(\theta, \eta)$ сама удовлетворяет уравнению Эйлера–Трикоми, то она должна содержаться в общем интеграле $\Phi_{1/6}$. Вблизи характеристики *23* в физической плоскости это есть

$$y = \frac{1}{a}\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{1/3} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \tag{119.12}$$

(первый член выражения (118.6), не имеющий особенности на характеристике). Производя ее аналитическое продолжение в окрестность характеристики *56* (по пути, проходящему через дозвуковую область *1*, т. е. с помощью формул (118.13)), мы получим там такую же функцию. Вблизи же характеристик *34*

[1]) В соответствии с тем, что на характеристике $x = ay^2/2$ в физической плоскости имеем $\Delta = \infty$ (см. примеч. на с. 607).

и *45* $y(\theta, \eta)$ представится линейными комбинациями этой функции и функции

$$\theta^{1/3}\sqrt{\frac{4\eta^3}{9\theta^2}-1}\,F\left(\frac{1}{3},\,\frac{5}{6},\,\frac{3}{2};\,1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \tag{119.13}$$

(второй член выражения (118.6)); эти комбинации получаются путем аналитического продолжения с помощью формул (118.11) (причем надо иметь в виду, что при каждом отражении от годографической характеристики квадратный корень в функции (119.13) меняет знак).

С математической точки зрения полученные результаты показывают, что функции $\Phi_{1/6}$ являются линейными комбинациями корней кубического уравнения

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0, \tag{119.14}$$

т. е. сводятся к алгебраическим функциям [1]. Вместе с $\Phi_{1/6}$ сводятся к алгебраическим функциям также и все Φ_k с

$$k = \frac{1}{6} \pm \frac{n}{2}, \quad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots\,, \tag{119.15}$$

получающиеся согласно формулам (118.9) и (118.10) из $\Phi_{1/6}$ путем последовательных дифференцирований (*Ф.И. Франкль*, 1947).

К алгебраическим функциям сводятся также те функции Φ_k с

$$k = \pm\frac{n}{2}, \quad k = \frac{1}{3} \pm \frac{n}{2}, \tag{119.16}$$

в которых гипергеометрическая функция сводится к полиному [2]) (так, при $k = n/2$ это есть первый член, а при $k = -n/2$ — второй член выражения (118.6)).

К этим трем семействам алгебраических функций Φ_k относятся, в частности, все те функции, которые могут соответствовать (в качестве потенциала Φ) течениям, не имеющим никаких особенностей в физической плоскости. Именно, для таких течений все члены разложения Φ вблизи несимметричной точки линии перехода (первые два члена которого даются формулой (119.6)) могут иметь лишь $k = 5/6 + n/2$ или $k = 1 + n/2$. Разложение же Φ вблизи симметричной точки (начинающееся членом с $k = 2/3$) может, кроме того, содержать еще функции с $k = 2/3 + n/2$.

---

[1]) Пользоваться явным выражением этих функций, получаемым из (119.14) с помощью формулы Кардана, фактически неудобно.

[2]) Здесь надо иметь в виду, что $F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;\,z)$ сводится к полиному, если для α (или β) имеет место $\alpha = -n$ или $\gamma - \alpha = -n$.

§ 120. Обтекание со звуковой скоростью

Упрощенное уравнение Чаплыгина в форме уравнения Эйлера–Трикоми должно, в принципе, применяться к исследованию основных качественных особенностей стационарного плоского обтекания тел, связанных с наличием в нем околозвуковых областей. Сюда относятся, в первую очередь, вопросы, связанные с возникновением ударных волн. В околозвуковой зоне интенсивность ударной волны мала; подчеркнем, что именно это обстоятельство делает законным применение уравнения Эйлера–Трикоми в этих условиях. Напомним (см. § 86, 114), что в слабой ударной волне изменение энтропии и ротора скорости — величины более высоких порядков малости; поэтому в первом приближении движение можно считать изэнтропическим и потенциальным и позади разрыва.

В этом параграфе мы рассмотрим теоретически важный вопрос — о характере стационарного плоского обтекания, когда скорость набегающего потока равна в точности скорости звука.

Мы увидим, что при таком обтекании непременно имеется простирающаяся от тела до бесконечности ударная волна. Отсюда следует важное заключение о том, что ударная волна должна впервые возникнуть при числе M_∞, во всяком случае меньшем единицы.

Итак, рассмотрим плоское обтекание тела с бесконечно длинным размахом («крыла») произвольного, не обязательно симметричного сечения. При этом мы будем интересоваться картиной течения на достаточно больших (по сравнению с размерами) расстояниях от тела. Для удобства изложения мы сначала опишем качественно получающиеся результаты, а затем перейдем к количественному расчету. На рис. 122 AB и $A'B'$ — звуковые линии, так что слева от них (вверх по течению) лежит целиком дозвуковая область; стрелкой изображено направление натекающего потока (которое мы ниже выбираем в качестве оси x с началом где-либо в районе тела). На некотором расстоянии от линии перехода возникают «исходящие» от тела ударные волны (EF и $E'F'$ на рис. 122). Оказывается, что все исходящие от тела характеристики (в области между линией перехода и ударной волной) можно разделить на две группы. Характеристики первой

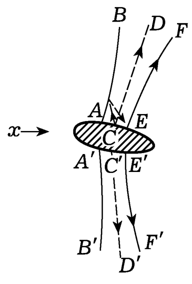


Рис. 122

группы достигают звуковой линии, оканчиваясь на ней (или, иначе говоря, отражаясь от нее в виде характеристики, приходящей к телу; на рис. 122 изображена одна из таких характеристик). Характеристики же второй группы оканчиваются на ударной волне. Обе эти группы разделены *предельными характеристи-*

ками — единственными, уходящими на бесконечность и никогда не достигающими ни звуковой линии, ни ударной волны (CD и $C'D'$ на рис. 122). Поскольку возмущения (связанные, например, с изменением контура обтекаемого тела), распространяющиеся от тела по характеристикам первой группы, достигают границы дозвуковой области, то ясно, что часть сверхзвукового потока, лежащая между линией перехода и предельной характеристикой, влияет на дозвуковую область; весь же поток в области справа от предельных характеристик никакого влияния на поток слева не оказывает: течение слева никак не изменится при возмущении потока справа (в том числе при изменении профиля тела справа от точек C, C'). Течение позади ударной волны, как мы знаем, никак не влияет на течение перед ней. Таким образом, весь поток можно разделить на три части (слева от $DCC'D'$ между $DCC'D'$ и $FEE'F'$, справа от $FEE'F'$), причем течение во второй никак не влияет на течение в первой, а течение в третьей — на течение во второй.

Перейдем теперь к количественному расчету описанной картины (являющемуся в то же время ее проверкой).

Начало координат в плоскости годографа ($\theta = \eta = 0$) соответствует бесконечно удаленной области в физической плоскости, а выходящие из начала координат годографические характеристики соответствуют предельным характеристикам CD и CD'. На рис. 123 изображена окрестность начала координат, причем буквы соответствуют обозначениям на рис. 122. Ударная волна изображается в плоскости годографа не одной линией, а двумя (соответствующими движению газа по обеим сторонам разрыва), причем области между ними (заштрихованной на рис. 123) не соответствуют никакой области в физической плоскости.

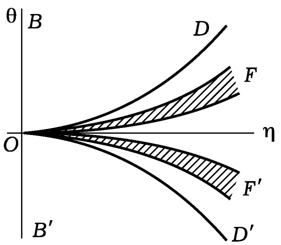


Рис. 123

Прежде всего необходимо выяснить, какой из общих интегралов Φ_k соответствует данному случаю обтекания. Если $\Phi(\theta, \eta)$ имеет порядок однородности k, то функции $x = \partial\Phi/\partial\eta$ и $y = \partial\Phi/\partial\theta$ будут однородными — соответственно порядков $k - 1/3$ и $k - 1/2$. При стремлении θ и η к нулю мы должны, вообще говоря, попасть на бесконечность в физической плоскости, т. е. x и y должны стремиться к бесконечности. Очевидно, что для этого должно быть $k < 1/3$. С другой стороны, предельные характеристики в физической плоскости не должны лежать целиком на бесконечности, т. е. не должно быть $y = \pm\infty$ по всей линии $9\theta^2 = 4\eta^3$. Для этого (при $2k + 1/6 < 5/6$) второй член в квадратных скобках в выражении (118.6) должен

вообще отсутствовать. Таким образом, функция $\Phi(\theta, \eta)$ должна изображаться первым членом выражения (118.6):

$$\Phi = A\theta^{2k} F\left(-k, -k + \frac{1}{2}, -2k + \frac{5}{6}; 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right). \qquad (120.1)$$

Функция $y(\theta, \eta)$ (тоже удовлетворяющая уравнению Эйлера–Трикоми) будет иметь такой же вид с $k - 1/2$ вместо k.

Но если выражение (120.1) имеет место, например, вблизи верхней характеристики ($\theta = +(2/3)\eta^{3/2}$), то при произвольном $k < 1/3$ оно отнюдь не будет иметь место также и вблизи второй характеристики ($\theta = -(2/3)\eta^{3/2}$). Поэтому мы должны потребовать также, чтобы вид (120.1) функции $\Phi(\theta, \eta)$ оставался таким же при обходе вокруг начала координат в плоскости годографа от одной характеристики к другой, причем обход должен происходить через полуплоскость $\eta < 0$ (путь $A'B'$ на рис. 119). Такой обход соответствует в физической плоскости переходу от удаленных точек одной из предельных характеристик к удаленным точкам другой предельной характеристики, причем путь перехода проходит через дозвуковую область и потому нигде не пересекает ударную волну, нарушающую непрерывность течения. Преобразование гипергеометрической функции в (120.1) при таком переходе дается первой из формул (118.13), и мы должны потребовать обращения в нуль коэффициента перед F_2 в этой формуле. Это условие выполняется при следующих значениях $k < 1/3$:

$$k = \frac{1}{6} - \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Из всех этих значений должно быть окончательно выбрано лишь одно:

$$k = -\frac{1}{3}. \qquad (120.2)$$

Можно показать, что все значения k с $n > 1$ приводят к неоднозначному отображению плоскости годографа на физическую плоскость (при однократном обходе первой вторая обходится несколько раз), т. е. к неоднозначности физического течения, что, разумеется, нелепо. Значение же $k = 1/6$ дает решение, в котором не по всем направлениям в физической плоскости стремление θ и η к нулю означает уход на бесконечность; ясно, что такое решение тоже физически непригодно.

При $k = -1/3$ коэффициент при F_1 в правой части формулы (118.13) равен $+1$, т. е. при обходе от одной характеристики к другой функция Φ вообще не меняется. Это значит, что Φ есть четная функция θ, а координата $y = \partial\Phi/\partial\theta$ — соответственно нечетная функция. Физически это означает, что в рассматриваемом нами первом приближении картина течения на больших рас-

стояниях от тела оказывается симметричной относительно плоскости $y = 0$ независимо от формы тела, в частности от наличия или отсутствия подъемной силы.

Таким образом, мы выяснили характер особенности, которую имеет $\Phi(\theta, \eta)$ в точке $\eta = \theta = 0$. Уже непосредственно отсюда можно сделать заключение о форме звуковой линии, предельных характеристик и ударной волны на больших расстояниях от тела. Каждая из этих линий должна соответствовать определенному значению отношения θ^2/η^3, и поскольку Φ имеет вид $\Phi = \theta^{-2/3} f(\eta^3/\theta^2)$, то с помощью формул (118.4) мы найдем, что $x \propto \theta^{-4/3}$, $y \propto \theta^{-5/3}$. Поэтому форма перечисленных линий определяется уравнениями вида

$$x = \text{const} \cdot y^{4/5} \tag{120.3}$$

со своим значением const для каждой из них. Вдоль этих линий θ и η падают по законам:

$$\theta \propto y^{-3/5}, \quad \eta \propto y^{-2/5} \tag{120.4}$$

(*Ф.И. Франкль*, 1947; *K. Guderley*, 1948) [1]).

Мы будем для определенности писать формулы со знаками, соответствующими верхней полуплоскости ($y > 0$).

Покажем, как могут быть вычислены коэффициенты в этих формулах. Значение $k = -1/3$ есть одно из тех, при которых Φ_k сводится к алгебраическим функциям (см. предыдущий параграф). Тот частный интеграл, который в данном случае определяет Φ, может быть написан в виде $\Phi = \frac{a_1}{2}\frac{\partial f}{\partial \theta}$, где a_1 — произвольная положительная постоянная, а f есть тот корень кубического уравнения

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0, \tag{120.5}$$

который при $9\theta^2 - 4\eta^3 > 0$ совпадает с единственным вещественным корнем. Отсюда

$$\Phi = \frac{a_1}{2}\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{a_1}{2(f^2 - \eta)}, \tag{120.6}$$

[1]) Упомянем, что аналогичные результаты оказывается возможным получить и для осесимметричного обтекания (с $M_\infty = 1$).

В цилиндрических кординатах x, r форма звуковой поверхности, предельной характеристики и ударной волны, и законы изменения скорости на них даются (вдали от тела) формулами

$$x = \text{const} \cdot r^{4/7}, \quad v_x \propto r^{-6/7}, \quad v_r \propto r^{-9/7}.$$

См. *Гудерлей К.Г.* Теория околозвуковых течений. — М.: ИЛ, 1960 [*Guderley K.G.* Theorie schallnaher Strömungen. — Springer Verlag, 1957]; *Фалькович С.В.*, *Чернов И.А.* // Прикл. Матем. Мех. 1964. Т. 28, С. 342.

а также для координат

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{a_1(f^2+\eta)}{2(f^2-\eta)^3},$$
$$y = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{a_1 f}{(f^2-\eta)^3}. \qquad (120.7)$$

Эти формулы можно представить в удобном параметрическом виде, введя в качестве параметра величину $s = f^2/(f^2-\eta)$; тогда

$$\frac{x}{y^{4/5}} = a_1^{1/5}\frac{2s-1}{2s^{2/5}};$$
$$\eta y^{2/5} = a_1^{2/5} s^{1/5}(s-1), \qquad (120.8)$$
$$\theta y^{3/5} = \frac{a_1^{3/5}}{3} s^{4/5}(3-2s),$$

чем определяется в параметрическом виде зависимость η и θ от координат. Параметр s пробегает положительные значения, начиная от нуля ($s = 0$ соответствует $x = -\infty$, т. е. натекающему с бесконечности потоку). В частности, значение $s = 1/2$ соответствует $x = 0$, т. е. дает распределение скоростей при больших y в перпендикулярной к оси x плоскости, проходящей в районе обтекаемого тела. Значение $s = 1$ соответствует звуковой линии ($\eta = 0$), а $s = 4/3$, как легко убедиться, — предельной характеристике. Значение же постоянной a_1 зависит от конкретной формы обтекаемого тела и могло бы быть определено лишь путем точного решения задачи во всем пространстве.

Формулы (120.8) относятся лишь ко всей области перед ударной волной. Неизбежность появления последней видна уже из следующих соображений. Простое вычисление по формуле (118.5) дает для якобиана Δ выражение

$$\Delta = a_1^2 \frac{4f^2-\eta}{(f^2-\eta)^3}.$$

Легко видеть, что на характеристиках и во всей области слева от них (что соответствует области вверх по течению от предельных характеристик в физической плоскости) $\Delta > 0$ и нигде в нуль не обращается. В области же справа от характеристик Δ проходит через нуль, откуда и видна неизбежность возникновения здесь ударной волны.

Граничные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения Эйлера–Трикоми на ударной волне, заключаются в следующем. Пусть θ_1, η_1 и θ_2, η_2 — значения θ и η по обеим сторонам разрыва. Прежде всего они должны соответствовать одной и той же кривой в физической плоскости, т. е.

$$x(\theta_1, \eta_1) = x(\theta_2, \eta_2), \quad y(\theta_1, \eta_1) = y(\theta_2, \eta_2). \qquad (120.9)$$

Далее, условие непрерывности касательной к разрыву компоненты скорости (т. е. условие непрерывности производной от потенциала φ вдоль линии разрыва) эквивалентно условию непрерывности самого потенциала:

$$\varphi(\theta_1, \eta_1) = \varphi(\theta_2, \eta_2) \tag{120.10}$$

(потенциал φ определяется по функции Φ формулой (119.3)). Наконец, последнее условие можно получить из предельной формы уравнения ударной поляры (92.6), устанавливающего определенную связь между компонентами скорости по обеим сторонам разрыва. Заменив в (92.6) угол χ на $\theta_2 - \theta_1$ и введя η_1, η_2 вместо v_1, v_2, получим следующее соотношение:

$$2(\theta_2 - \theta_1)^2 = (\eta_2 - \eta_1)^2(\eta_2 + \eta_1). \tag{120.11}$$

В данном случае решение уравнения Эйлера–Трикоми позади ударной волны (область между OF и OF' в плоскости годографа; рис. 123) имеет тот же вид (120.5), (120.6), но, конечно, с другим постоянным коэффициентом (обозначим его как $-a_2$) вместо a_1. Четыре уравнения (120.9)–(120.11) определяют отношение a_2/a_1 и связывают между собой величины: η_1, θ_1, η_2, θ_2. В результате довольно сложного их совместного решения получаются следующие результаты. Ударной волне соответствует значение

$$s = (5\sqrt{3} + 8)/6 = 2{,}58$$

параметра s в формулах (120.8), дающих при этом форму волны и распределение скорости на передней стороне разрыва. В области позади (вниз по течению) от ударной волны коэффициент $-a_2$ оказывается отрицательным, а параметр $\dfrac{f^2}{f^2 - \eta}$ пробегает отрицательные значения. Вводя здесь в качестве s положительную величину $s = \dfrac{f^2}{\eta - f^2}$, получим вместо (120.8) формулы

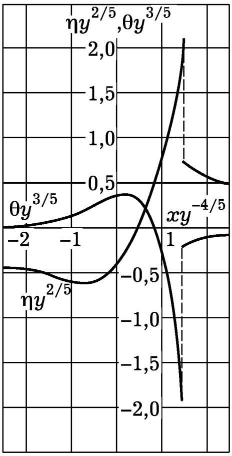


Рис. 124

$$\frac{x}{y^{4/5}} = a_2^{1/5}\frac{2s+1}{2s^{2/5}},$$

$$\eta y^{2/5} = a_2^{2/5} s^{1/5}(s+1),$$

$$\theta y^{3/5} = -\frac{a_2^{3/5}}{3} s^{4/5}(2s+3), \tag{120.12}$$

причем

$$a_2/a_1 = (9\sqrt{3} + 1)/(9\sqrt{3} - 1) = 1{,}14,$$

а s пробегает значения от

$$s = (5\sqrt{3} - 8)/6 - 0{,}11$$

(на ударной волне) до нуля (на бесконечности вниз по течению).

На рис. 124 изображены графики зависимости $\eta y^{2/5}$ и $\theta y^{3/5}$ от $xy^{-4/5}$, вычисленные по формулам (120.8) и (120.12) (постоянная a_1 условно положена равной единице).

§ 121. Отражение слабого разрыва от звуковой линии

Рассмотрим, снова с помощью уравнения Эйлера–Трикоми, отражение слабого разрыва от звуковой линии.

Будем считать, что падающий на звуковую линию слабый разрыв («приходящий» по отношению к точке их пересечения) — обычного типа, возникающего, скажем, при обтекании острых углов, т. е. разрыв первых производных скорости по координатам. Он отражается от звуковой линии в виде другого разрыва, характер которого, однако, заранее неизвестен и должен быть определен путем исследования течения в окрестности точки пересечения. Последнюю выбираем ниже в качестве начала координат x, y, а ось x — вдоль направления скорости газа в этой точке; тогда ей соответствует начало координат и в плоскости годографа.

Слабые разрывы расположены, как мы знаем, вдоль характеристик. Пусть приходящему разрыву соответствует в плоско-

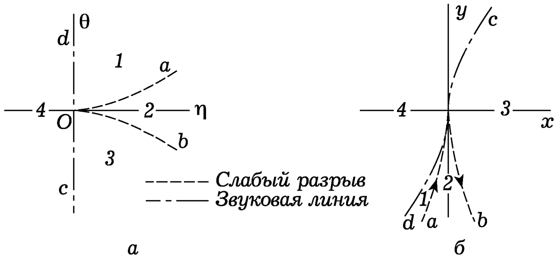


Рис. 125

сти годографа характеристика Oa (рис. 125 *а*). Непрерывность координат x, y на разрыве означает, что должны быть непрерывными первые производные Φ_η, Φ_θ. Напротив, вторые производные от Φ выражаются через первые производные от скорости по координатам и потому должны испытывать разрыв. Обозначая скачки величин квадратными скобками, имеем, таким образом:

на Oa:

$$[\Phi_\eta] = [\Phi_\theta] = 0; \quad [\Phi_{\theta\theta}],\ [\Phi_{\theta\eta}],\ [\Phi_{\eta\eta}] \neq 0. \tag{121.1}$$

Сами же функции Φ в областях *1* и *2* по обе стороны от характеристики Oa не должны иметь на ней никаких особенностей. Такое решение можно построить с помощью второго члена в (118.6) с $k = 11/12$, пропорционального квадрату разности $(1-4\eta^3/(9\theta^2))$ (второе же независимое решение $\Phi_{11/12}$ имеет на характеристике особенность — см. ниже); первые производные этой функции на характеристике обращаются в нуль, а вторые — конечны. Кроме того, в Φ могут войти такие частные решения уравнения Эйлера–Трикоми, которые не приводят ни к каким особенностям течения в физической плоскости. Наиболее низким по степеням θ и η таким решением является $\theta\eta$ (§ 119). Таким образом, вблизи характеристики Oa ищем Φ в виде

$$\begin{aligned}\Phi_{a1} &= -A\eta\theta - B\theta^{11/6}\xi^2 F\left(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}, 3; \xi\right),\\ \Phi_{a2} &= -A\eta\theta - C\theta^{11/6}\xi^2 F\left(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}, 3; \xi\right),\end{aligned} \qquad (121.2)$$

где индексы $a1$ и $a2$ указывают окрестности по обе стороны характеристики (в областях *1* и *2*); A, B, C — постоянные, и снова введено обозначение

$$\xi = 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}$$

(на характеристике $\xi = 0$).

Мы увидим ниже, что в зависимости от знака произведения AB могут иметь место два случая: слабый разрыв отражается в виде слабого же разрыва другого (логарифмического) характера или в виде ударной волны малой интенсивности.

Отражение в виде слабого разрыва. Рассмотрим сначала первый из этих случаев (*Л.Д. Ландау*, *Е.М. Лифшиц*, 1954). Отраженному от звуковой линии слабому разрыву соответствует в плоскости годографа вторая характеристика (Ob на рис. 125 *а*). Вид функции Φ вблизи этой характеристики устанавливается путем аналитического продолжения функций (121.2) согласно формулам (118.11)–(118.13). Однако при $k = 11/12$ функция F_1 теряет смысл и поэтому непосредственно воспользоваться этими формулами нельзя. Вместо этого надо положить в них сначала $k = 11/12 + \varepsilon$, после чего устремить ε к нулю. В соответствии с общей теорией гипергеометрического уравнения при этом появляются логарифмические члены.

В результате вычисления (с помощью (118.13)) для функции Φ вблизи характеристики Ob в области *3* получается следующее выражение (с точностью до членов второго порядка по ξ включительно) :

$$\Phi_{b3} = -A\theta\eta + \frac{B}{\pi}(-\theta)^{11/6}\{\xi^2 \ln|\xi| + c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2\}, \qquad (121.3)$$

где c_0, c_1, c_2 — числовые постоянные [1]). Аналогичное преобразование (с помощью (118.11)) функции Φ_{a2} от окрестности характеристики Oa к окрестности характеристики Ob дает функцию Φ_{b2}, отличающуюся от (121.3) лишь заменой B на $C/2$. Координаты x, y точек характеристики в физической плоскости вычисляются как производные (118.4), взятые при $\xi = 0$. Так, исходя из (121.3), найдем

$$x = -A\theta - \frac{12^{1/3}Bc_1}{\pi}(-\theta)^{7/6},$$
$$y = -A\left(-\frac{3\theta}{2}\right)^{2/3} - \frac{B}{\pi}\left(\frac{11}{6}c_0 + 2c_1\right)(-\theta)^{5/6}, \tag{121.4}$$

а дифференцирование функции Φ_{b2} даст такие же выражения с $C/2$ вместо B. Условие непрерывности координат x, y на характеристике Ob приводит, следовательно, к соотношению

$$C = 2B. \tag{121.5}$$

Далее, для осуществления рассматриваемой картины отражения должны отсутствовать предельные линии в плоскости годографа (и тем самым — нефизические области в этой плоскости), т. е. якобиан Δ нигде не должен проходить через нуль. Вблизи характеристики Oa якобиан вычисляется с помощью функций (121.2) и оказывается положительным (главный член в нем: $\Delta \approx A^2$). Вблизи же характеристики Ob вычисление с помощью (121.3) дает

$$\Delta \approx A^2 - 16\left(\frac{3}{2}\right)^{1/6} AB\eta^{1/4}\ln|\xi|. \tag{121.6}$$

При приближении к характеристике логарифм стремится к $-\infty$, и главным является второй член. Поэтому из условия $\Delta > 0$ имеем $AB > 0$, т. е. A и B должны иметь одинаковый знак.

Наконец, для определения формы звуковой линии нам понадобятся выражения для Φ вблизи оси $\eta = 0$. Выражение, пригодное в окрестности верхней части этой оси, получается просто преобразованием гипергеометрической функции в Φ (121.2) в гипергеометрические функции аргумента $1 - \xi = 4\eta^3/(9\theta^2)$, обращающегося в нуль при $\eta = 0$ [2]). Сохранив лишь члены наиболее

[1]) Значение этих постоянных:

$$c_0 = -2^9 \cdot 3^4/385 = -108, \quad c_1 = 288/7 = 41{,}1, \quad c_2 = 4{,}86.$$

[2]) Это преобразование приведено, например, в т. III, § е Математического дополнения, формула (е.7).

низких степеней по η, получим

$$\Phi_d = -A\eta\theta - \frac{2\Gamma(1/3)}{\Gamma(23/12)\Gamma(17/12)} B\theta^{11/6} = -A\eta\theta - 6{,}25B\theta^{11/6}. \tag{121.7}$$

Аналитическое же продолжение в область нижней части оси дает

$$\Phi_c = -A\eta\theta - 6{,}25 \cdot \sqrt{3}\, B\theta^{11/6} \tag{121.8}$$

(вычисления аналогичны выводу формулы преобразования (118.13)).

Теперь можно определить форму всех интересующих нас линий. На характеристиках имеем, отбрасывая члены более высокого порядка: $x = -A\theta$, $y = -A\eta$. Мы условились считать, что приходящему слабому разрыву отвечает верхняя характеристика ($\theta > 0$). Поскольку скорость газа направлена в положительном направлении оси x, то этот разрыв, для того чтобы быть приходящим, должен лежать в полуплоскости $x < 0$. Отсюда следует, что постоянная A, а с нею и B должны быть положительными. Уравнение линии слабого разрыва в физической плоскости будет

$$-y = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} A^{1/3}(-x)^{2/3} = 1{,}31A^{1/3}(-x)^{2/3}. \tag{121.9}$$

Отраженный же разрыв, соответствующий нижней характеристике, дается уравнением [1])

$$-y = 1{,}31A^{1/3}x^{2/3} \tag{121.10}$$

(см. рис. 125 *б*; обозначение линий и областей на этом рисунке соответствует обозначениям на рис. 125 *а*).

Уравнение звуковой линии получается из функций (121.7), (121.8). Дифференцируя по η и θ и положив затем $\eta = 0$, получим из (121.7) уравнение той части линии, на которой $\theta > 0$:

$$x = -A\theta, \quad y = -\frac{11}{16} \cdot 6{,}25B\theta^{5/6},$$

откуда

$$y = -11{,}4BA^{-5/6}(-x)^{5/6}. \tag{121.11}$$

Это — нижняя часть звуковой линии на рис. 125 *б*. Аналогичным образом из (121.8) находим уравнение верхней части этой линии:

$$y = 11{,}4\sqrt{3}\, BA^{-5/6}x^{5/6}. \tag{121.12}$$

---

[1]) С учетом первых поправочных членов (вторые члены в формулах (121.4)) уравнение отраженного разрыва:

$$-y = 1{,}31A^{1/3}x^{2/3} - 10{,}5BA^{-5/6}x^{5/6}. \tag{121.10a}$$

Таким образом, оба слабых разрыва и обе ветви звуковой линии имеют в точке пересечения O общую касательную (ось y), причем две ветви звуковой линии лежат по разные стороны оси y.

На приходящем разрыве испытывают скачок производные от скорости по координатам. В качестве характерной величины рассмотрим скачок производной $(\partial\eta/\partial x)_y$. Имея в виду, что

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(\eta, \theta)} \Big/ \frac{\partial(x, y)}{\partial(\eta, \theta)} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

и воспользовавшись формулами (121.2), (121.5), получим для искомого скачка:

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y\Big|_1^2 = 8\left(\frac{3}{2}\right)^{1/6}\frac{B}{A^2}\eta^{-1/4} = 8{,}56\,BA^{-7/4}(-y)^{-1/4}. \tag{121.13}$$

При приближении к точке пересечения он растет как $(-y)^{-1/4}$.

На отраженном же слабом разрыве производные скорости вообще не испытывают скачка, но распределение скоростей имеет своеобразную логарифмическую особенность. Вычислив из функции (121.3) (сохранив в ней лишь первый член в скобках) координаты x и y в функции от η, θ, можно представить зависимость η от x при заданном y вблизи отраженного разрыва в следующем параметрическом виде:

$$\begin{gathered} \eta = \frac{|y|}{A} + \frac{x - x_0}{2\sqrt{A|y|}} - \frac{1}{6A}|y|\zeta, \\ x - x_0 = \frac{1}{3\sqrt{A}}|y|^{3/2}\zeta - 5{,}7\frac{B|y|^{7/4}}{\pi A^{7/4}}\zeta\ln|\zeta|, \end{gathered} \tag{121.14}$$

где ζ играет роль параметра, а $x_0 = x_0(y)$ — уравнение линии разрыва в физической плоскости.

Отражение в виде ударной волны. Перейдем к рассмотрению другого случая — отражения слабого разрыва от звуковой линии в виде ударной волны (*Л.П. Горьков*, *Л.П. Питаевский*, 1962) [1]).

Этот случай возникает, если произведение $AB < 0$. Из (121.6) видно, что в этом случае имеется две предельные линии, экспоненциально близкие к характеристике Ob: якобиан Δ обращается в нуль при

$$|\xi| \approx \frac{2}{|\theta|}\left|\theta + \frac{2}{3}\eta^{3/2}\right|e^{-\Theta}, \quad \Theta = \frac{A\pi(2/3)^{1/6}}{16|B|\eta^{1/4}}. \tag{121.15}$$

Заранее очевидно, что экспоненциально близкими к характеристике будут и границы нефизической области на плоскости го-

---

[1]) Принципиальная возможность такого отражения отмечалась ранее *Гудерлеем* (*K.G. Guderley*, 1948).

дографа (Ob_2 и Ob_3 на рис. 126 *а*), и тем самым будет экспоненциально мала интенсивность ударной волны.

Пренебрегая экспоненциально малыми значениями ξ на линиях Ob_2 и Ob_3, мы получим для координат x, y на них те же выражения, которые мы имели на двух сторонах характеристики Ob в предыдущем случае. Поэтому условие непрерывности координат на ударной волне во всяком случае приводит к прежнему соотношению (121.5). Соответственно, остается прежним и выражение (121.13) для скачка производной от скорости на падающем разрыве. Снова приняв, что этому разрыву отвечает верхняя характеристика Oa на плоскости годографа, будем попрежнему иметь $A > 0$, так что теперь $B < 0$. Из (121.13) видно, следовательно, что физическим критерием происхождения двух случаев отражения слабого разрыва является знак скачка производной скорости на падающем разрыве.

Остаются прежними (при пренебрежении экспоненциально малыми поправками) уравнения (121.9),(121.10) линий падающего (слабого) и отраженного (ударной волны) разрывов. Но ввиду другого знака постоянной B меняется расположение этих линий на физической плоскости — как это показано на рис. 126 *б*.

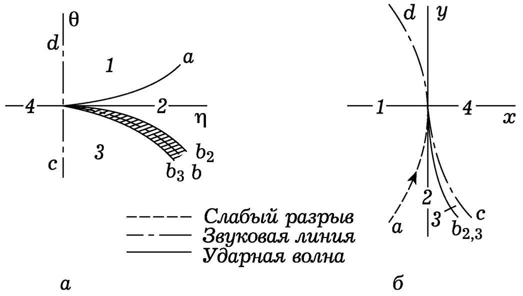


Рис. 126

Для определения интенсивности ударной волны (т. е. скачков величин $\delta\theta$ и $\delta\eta$ на ней) надо обратиться к полной системе граничных условий, которым должно удовлетворять на ударной волне решение уравнения Эйлера–Трикоми. Они были сформулированы уже в § 120: условия (120.9)–(120.11). Из них последнее, уравнение ударной поляры, принимает вид $(\delta\theta)^2 = \eta(\delta\eta)^2$, где $\delta\theta = \theta_{b2} - \theta_{b3}$, $\delta\eta = \eta_{b2} - \eta_{b3}$ — экспоненциально малые скачки величин на ударной волне (индексы $b2$ и $b3$ относятся к линиям Ob_2 и Ob_3 на плоскости годографа, т. е. соответственно к передней и задней сторонам ударной волны на физической плоскости). Отсюда

$$\delta\theta = \sqrt{\eta}\,\delta\eta; \tag{121.16}$$

выбор знака при извлечении корня определяется тем, что одновременно с уменьшением скорости газа при его прохождении через ударную волну должно происходить приближение линий тока к поверхности разрыва.

В соответствии с (121.15) ищем уравнения линий Ob_2 и Ob_3 в плоскости годографа в виде

$$\theta + \frac{2}{3}\eta^{3/2} = a_{b2}|\theta|e^{-\Theta}, \quad \theta + \frac{2}{3}\eta^{3/2} = -a_{b3}|\theta|e^{-\Theta},$$

где a_{b2} и a_{b3} — положительные числа. Согласно (121.16) $\delta\left(\theta + \frac{2}{3}\eta^{3/2}\right) = \delta\theta + \sqrt{\eta}\,\delta\eta = 2\delta\theta$. Искомые скачки $\delta\theta$ и $\delta\eta$ даются поэтому следующими выражениями:

$$\delta\theta = a\frac{x}{A}e^{-\Theta}, \quad \delta\eta = a\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}\left(\frac{x}{A}\right)^{2/3}e^{-\Theta}, \tag{121.17}$$

$$\Theta = \frac{A\pi(2/3)^{1/6}}{16|B|}\left(\frac{A}{x}\right)^{1/6} = 0{,}17\frac{A^{7/6}}{|B|x^{1/6}},$$

где $a = (a_{b2} + a_{b3})/2$; переменные η, θ выражены через координаты на физической плоскости согласно $x \approx -A\theta$, $y \approx -A\eta$. Определение коэффициента a требует учета также и всех остальных граничных условий, причем в них должны учитываться члены как линейные, так и квадратичные по экспоненциально малой величине $\exp(-\Theta)$. Не приводя этих довольно громоздких вычислений, укажем лишь их результат: $a_{b2} = a_{b3} = a = 5{,}2$.

ГЛАВА XIII

ОБТЕКАНИЕ КОНЕЧНЫХ ТЕЛ

§ 122. Образование ударных волн при сверхзвуковом обтекании тел

Простые соображения показывают, что при обтекании произвольного тела сверхзвуковым потоком перед телом возникает ударная волна. Действительно, в сверхзвуковом потоке возмущения, обусловленные наличием обтекаемого тела, распространяются только вниз по течению. Поэтому натекающий на тело однородный сверхзвуковой поток должен был бы доходить до самого переднего конца тела невозмущенным. Но тогда на поверхности этого конца нормальная компонента скорости газа была бы отличной от нуля в противоречии с необходимым граничным условием. Выходом из этого положения может являться только возникновение ударной волны, в результате чего движение газа между нею и передним концом тела становится дозвуковым.

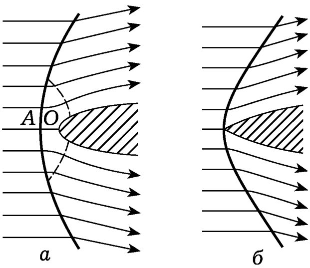


Рис. 127

Таким образом, при сверхзвуковом обтекании тела перед ним возникает ударная волна; ее называют *головной*. При обтекании тела с тупым передним концом эта волна не соприкасается с самим телом. Спереди от ударной волны поток однороден, а позади нее движение меняется, и поток огибает обтекаемое тело (рис. 127 a). Поверхность ударной волны уходит на бесконечность, причем вдали от тела, где интенсивность волны мала, она пересекает направление набегающего потока под углом, близким к углу Маха. Характерной чертой обтекания тела с тупым концом является существование дозвуковой области течения за ударной волной — позади наиболее выдающейся вперед части ее поверхности; эта область простирается до обтекаемого тела и, таким образом, ограничена поверхностью разрыва, поверхностью тела и «боковой» звуковой поверхностью (штриховые линии на рис. 127 a).

Ударная волна может соприкасаться с телом только если его передний конец заострен. Тогда поверхность разрыва тоже обладает точкой заострения, совпадающей с острием тела

(рис. 127 *б*); при несимметричном обтекании часть этой поверхности может являться поверхностью слабого разрыва. Для тела заданной формы такой режим обтекания оказывается, однако, возможным лишь при скоростях, превышающих определенный предел; при меньших скоростях ударная волна отрывается от носика тела, несмотря на наличие острия (см. § 113).

Рассмотрим осесимметричное сверхзвуковое обтекание тела вращения и определим давление на переднем закругленном конце тела (в точке остановки — точка O на рис. 127 *а*). Из соображений симметрии очевидно, что линия тока, заканчивающаяся в точке O, пересекает ударную волну в нормальном к ней направлении, так что в точке A нормальная к поверхности разрыва компонента скорости совпадает с полной скоростью. Значения величин в набегающем потоке отмечаем, как обычно, индексом 1, а значения величин в точке A на задней стороне ударной волны — индексом 2. Последние определяются по формулам (89.6), (89.7) в виде

$$p_2 = \frac{p_1}{\gamma+1}\left[2\gamma \mathrm{M}_1^2 - (\gamma-1)\right],$$

$$v_2 = c_1\frac{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2}{(\gamma+1)\mathrm{M}_1}, \quad \rho_2 = \rho_1\frac{(\gamma+1)\mathrm{M}_1^2}{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2}.$$

Давление p_0 в точке O (в которой скорость газа $v = 0$) можно получить теперь с помощью формул, определяющих изменение величин вдоль линии тока. Имеем (см. задачу к § 83):

$$p_0 = p_2\left[1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{v_2^2}{c_2^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

и простое вычисление приводит к следующему результату:

$$p_0 = p_1\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\mathrm{M}_1^2\left[\gamma - \frac{\gamma-1}{2\mathrm{M}_1^2}\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{122.1}$$

Этим и определяется давление на переднем конце тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком ($\mathrm{M}_1 > 1$).

Для сравнения приведем формулу для давления в точке остановки, которое получилось бы в результате непрерывного адиабатического торможения газа без ударной волны (как это было бы при дозвуковом обтекании):

$$p_0 = p_1\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{122.2}$$

При $\mathrm{M}_1 = 1$ обе формулы дают одинаковое значение p_0, а при

$M_1 > 1$ давление (122.2) всегда превышает истинное давление, даваемое формулой (122.1) [1].

В предельном случае очень больших скоростей ($M_1 \gg 1$) формула (122.1) дает

$$p_0 = p_1 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \gamma^{-\frac{1}{\gamma-1}} M_1^2, \qquad (122.3)$$

т. е. давление p_0 пропорционально квадрату скорости обтекания. На основании этого результата можно сделать заключение о том, что и полная испытываемая телом сила сопротивления при скоростях, больших по сравнению со скоростью звука, пропорциональна квадрату скорости. Обращаем внимание на то, что этот закон — такой же, по которому меняется сила сопротивления при скоростях, малых по сравнению со скоростью звука, но настолько больших, чтобы число Рейнольдса было достаточно велико (см. § 45).

Помимо самого факта необходимости возникновения ударных волн, можно еще утверждать, что при сверхзвуковом обтекании конечного тела на больших расстояниях от него во всяком случае должны иметься две следующие друг за другом ударные волны (*Л. Ландау*, 1945). Действительно, на больших расстояниях от тела вызываемые им возмущения слабы и поэтому их можно рассматривать как цилиндрическую звуковую волну, расходящуюся от оси x, проходящей через тело параллельно направлению обтекания; рассматривая, как это мы везде делаем, движение в той системе координат, в которой тело покоится, мы будем иметь волну, в которой роль времени играет x/v_1, а роль скорости распространения $v_1/\sqrt{M_1^2-1}$ (см. ниже § 123). Поэтому мы можем непосредственно применить результаты, полученные в § 102 для цилиндрической волны на больших расстояниях от источника. Таким образом, мы приходим к следующей картине ударных волн на далеком расстоянии от тела: в первой ударной волне давление испытывает скачок вверх, так что за ней возникает сгущение; затем давление постепенно убывает, сгущение

[1]) Это утверждение имеет общий характер и не связано с предполагаемой в (122.1), (122.2) политропностью газа (и даже с его термодинамической идеальностью). Действительно, при наличии ударной волны энтропия газа в точке O $s_0 > s_1$, между тем как в ее отсутствие энтропия была бы равна s_1. Тепловая же функция в обоих случаях равна $w_0 = w_1 + v_1^2/2$, так как при пересечении линией тока прямого скачка уплотнения величина $w + v^2/2$ не меняется. Но из термодинамического тождества $dw = T\,ds + dp/\rho$ следует, что производная

$$(\partial p/\partial s)_w = -\rho T < 0,$$

т. е. увеличение энтропии при постоянном w уменьшает давление, чем и доказывается сделанное утверждение.

сменяется разрежением, после чего давление вновь возрастает скачком во второй ударной волне. Интенсивность передней ударной волны падает с увеличением расстояния r от оси x как $r^{-3/4}$, а расстояние между обеими волнами возрастает как $r^{1/4}$ [1]).

Проследим за появлением и развитием ударных волн при постепенном увеличении числа Маха M_1. Сверхзвуковая область в газовом потоке появляется впервые при некотором значении $\mathrm{M}_1 < 1$ в виде области, прилегающей к поверхности обтекаемого тела. В этой области появляется по крайней мере одна ударная волна — обычно замыкающая сверхзвуковую область. По мере увеличения M_1 эта область расширяется, а вместе с ней удлиняется и ударная волна, существование которой при $\mathrm{M}_1 = 1$ было доказано (для плоского случая) в § 120; тем самым была доказана необходимость первого появления ударной волны уже при $\mathrm{M}_1 < 1$. Как только M_1 начинает превышать единицу, появляется еще одна ударная волна — головная волна, пересекающая весь бесконечно широкий натекающий поток газа. При M_1, в точности равном единице, все течение впереди тела является дозвуковым. Поэтому при $\mathrm{M}_1 > 1$, но сколь угодно близком к единице, сверхзвуковая часть натекающего потока, а с нею и головная ударная волна находятся сколь угодно далеко впереди тела. По мере дальнейшего увеличения M_1 головная волна постепенно приближается к телу.

Ударная волна в местной сверхзвуковой зоне должна каким-то образом пересекаться со звуковой линией (мы будем говорить о плоском случае). Вопрос о характере такого пересечения нельзя считать выясненным. Если ударная полна заканчивается в точке пересечения, то в самой этой точке ее интенсивность обращается в нуль, а во всей плоскости вблизи точки пересечения движение околозвуковое. Картина течения в таком случае должна описываться соответствующим решением уравнения Эйлера–Трикоми. Помимо общих условий однозначности решения в физической плоскости и граничных условий на ударной волне, должны выполняться еще и следующие условия: 1) если по обе стороны от ударной волны движение сверхзвуковое (так будет, если в точке пересечения кончается только ударная волна, «упираясь» в звуковую линию), то ударная волна должна быть «приходящей» по отношению к точке пересечения; 2) «приходящие» к точке пересечения характеристические линии в сверхзвуковой области не должны нести на себе никаких особенностей течения (особенности могли бы возникнуть лишь в результате самого пересечения и, таким образом, должны были бы уноситься от точки пере-

[1]) Для ударных волн, возникающих при осесимметричном обтекании тонких заостренных тел могут быть определены также и количественные коэффициенты в этих законах — см. примеч. на с. 642.

сечения). Существование решения уравнения Эйлера–Трикоми, удовлетворяющего всем этим требованиям, по-видимому, еще не доказано [1]).

Другая возможность для конфигурации ударной волны и звуковой линии в местной сверхзвуковой зоне состоит в окончании в точке пересечения одной лишь звуковой линии (рис. 128 *б*); в этой точке интенсивность ударной волны отнюдь не обращается в нуль, так что течение вблизи нее является околозвуковым лишь по одну сторону от ударной волны. Сама ударная волна может при этом одним концом «упираться» в твердую поверхность, а другим (или обоими) начинаться непосредственно в сверхзвуковом потоке (ср. конец § 115).

§ 123. Сверхзвуковое обтекание заостренного тела

Форма, которой должно обладать тело для того, чтобы при сверхзвуковом движении быть хорошо обтекаемым, т. е. испытывать по возможности малую силу сопротивления, существенно отличается от соответствующей формы для дозвукового движения. Напомним, что в дозвуковом случае хорошо обтекаемыми являются продолговатые тела, закругленные спереди и заостренные сзади. При сверхзвуковом же обтекании такого тела перед ним появилась бы сильная ударная волна, что привело бы к сильному возрастанию сопротивления. Поэтому в сверхзвуковом случае хорошо обтекаемое удлиненное тело должно иметь

---

[1]) *П. Жермен* нашел несколько типов решений уравнения Эйлера–Трикоми, которые могли бы изображать пересечение ударной волны со звуковой линией, но их исследование не было по существу завершено. Некоторые из этих типов не удовлетворяют поставленному выше условию (1). На рис. 128 *а* изображен случай, который мог бы отвечать точке окончания ударной волны, замыкающей местную сверхзвуковую область: в точке пересечения ударная волна и звуковая линия обе заканчиваются и имеют общую касательную, будучи расположены по разные стороны от нее (газ движется слева направо). Выполнение условия (2), однако, не проверено. Для показателя k решения указан лишь интервал, в котором он мог бы находиться ($3/4 < k < 11/12$), но не проверено, может ли при этом быть удовлетворено условие непрерывности координат на ударной волне в физической плоскости. См. *Germain P.* Ecoulements transsoniques homogènes. В кн.: Progress in Aeronautical Sciences. — Pergamon Press, 1964, V. 5.

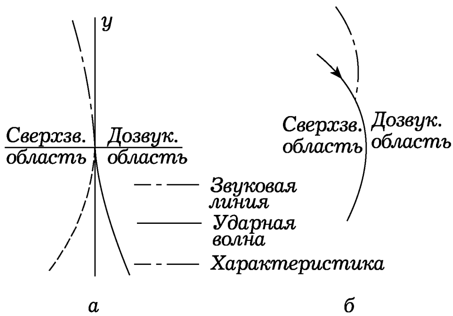


Рис. 128

заостренным не только задний, но и передний конец, причем угол заострения должен быть малым; если ось тела наклонена к направлению движения, то угол наклона (угол атаки) тоже должен быть малым.

При стационарном сверхзвуковом обтекании тела такой формы скорость газа даже вблизи тела будет везде лишь незначительно отличаться по величине и направлению от скорости натекающего потока, а образующиеся ударные волны будут обладать малой интенсивностью (интенсивность головной волны убывает вместе с уменьшением раствора обтекаемого угла). Вдали от тела движение газа будет представлять собой расходящиеся звуковые волны. Основную часть сопротивления газа можно представлять себе как обусловленную переходом кинетической энергии движущегося тела в энергию излучаемых им звуковых волн. Это сопротивление, специфическое для сверхзвукового движения, называют *волновым* [1]); оно может быть вычислено в общем виде при любой форме сечения тела (*Th. Karman*, *N.B. Moore*, 1932).

Описанный характер течения делает возможным применение линеаризованного уравнения для потенциала (114.4):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \tag{123.1}$$

где для краткости введена положительная постоянная

$$\beta^2=\frac{v_1^2}{c_1^2}-1 \tag{123.2}$$

(ось x направлена по направлению движения, индекс 1 отличает величины, относящиеся к натекающему потоку); $1/\beta$ есть не что иное, как тангенс угла Маха.

Уравнение (123.1) формально совпадает с двумерным волновым уравнением, причем x/v_1 играет роль времени, а v_1/β — роль скорости распространения волн. Это обстоятельство не случайно и имеет глубокий физический смысл, так как движение газа вдали от тела представляет собой, как уже указано, именно излучаемые телом расходящиеся звуковые волны. Если представить себе газ на бесконечности покоящимся, а тело движущимся, то площадь поперечного сечения тела в заданном месте пространства будет меняться со временем, причем расстояние, до которого к моменту t распространятся возмущения (т. е. расстояние до конуса Маха), будет расти как v_1t/β; таким образом, мы будем иметь дело с «двумерным» излучением звука (распространяющегося со скоростью v_1/β) пульсирующим контуром.

---

[1]) Полная сила сопротивления получается прибавлением к волновому сопротивлению сил, связанных с трением и с отрывом у заднего конца тела.

Руководствуясь этой «звуковой аналогией», можно сразу же написать искомое выражение для потенциала скорости газа, воспользовавшись выражением (74.15) для потенциала излучаемых пульсирующим источником цилиндрических звуковых волн (на расстояниях, больших по сравнению с размерами источника), заменив в последнем ct на x/β. Пусть $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостями, перпендикулярными к направлению обтекания (оси x), а длина тела в этом направлении пусть будет l; начало координат выберем в переднем конце тела. Тогда будем иметь

$$\varphi(x,\, r) = -\frac{v_1}{2\pi} \int\limits_0^{x-\beta r} \frac{S'(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 r^2}}; \tag{123.3}$$

в качестве нижнего предела написан нуль, так как при $x < 0$ (как и при $x > 1$) надо положить тождественно $S(x) \equiv 0$.

Таким образом, мы полностью определили движение газа на расстояниях r от оси, бóльших по сравнению с толщиной тела [1]). Исходящие от тела возмущения в сверхзвуковом потоке распространяются, разумеется, только в область позади конуса $x-\beta r = 0$ с вершиной в переднем конце тела; перед этим конусом имеем просто $\varphi = 0$ (однородный поток). Между конусами $x - \beta r = 0$ и $x - \beta r = l$ потенциал определяется формулой (123.3); позади же конуса $x - \beta r = l$ (с вершиной в заднем конце тела) в этой формуле верхний предел заменяется постоянной величиной l. Оба указанных конуса представляют собой в рассматриваемом приближении слабые разрывы; в действительности это — ударные волны слабой интенсивности.

Действующая на тело сила сопротивления есть не что иное, как уносимая звуковыми волнами в единицу времени x-компонента импульса. Выберем в качестве контрольной поверхности цилиндрическую поверхность достаточно большого радиуса r с осью вдоль оси x. Плотность потока x-компоненты импульса через эту поверхность есть

$$\Pi_{xr} = \rho v_r (v_x + v_1) \approx \rho_1 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(v_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

[1]) Для осесимметричного обтекания тела вращения формула (123.3) справедлива для всех вообще r вплоть до самой поверхности тела. Из нее можно, в частности, получить снова формулу (113.6) для обтекания тонкого конуса.

С другой стороны, рассмотрев это полученное в линейном приближении решение вдали от обтекаемого тела, можно ввести в него эффект нелинейного искажения профиля подобно тому, как это было сделано в § 102 для цилиндрической звуковой волны. Этим путем можно определить интенсивность ударной волны на больших расстояниях от тонкого заостренного тела вращения (в том числе ее зависимость от M_1), т. е. коэффициент в законе затухания ($\propto r^{-3/4}$), о котором шла речь в предыдущем параграфе. См. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977, § 9.3 [*Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. — Wiley, 1974].

При интегрировании по всей поверхности первый член исчезает, так как интеграл от ρv_r есть равный нулю полный поток массы газа через контрольную поверхность. Поэтому остается

$$F_x = -2\pi r \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{xr}\, dx = -2\pi r \rho_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dx. \qquad (123.4)$$

На больших расстояниях (в волновой зоне) производные от потенциала вычисляются так, как это было сделано в § 74 (см. формулу (74.17)), и получается

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{v_1}{2\pi}\sqrt{\frac{\beta}{2r}} \int\limits_0^{x-\beta r} \frac{S''(\xi)\, d\xi}{\sqrt{x-\xi-\beta r}}.$$

Это выражение подставляем в (123.4), причем квадрат интеграла переписываем в виде двойного интеграла; обозначая для краткости $x - \beta r = X$, получим

$$F_x = \frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^X\int\limits_0^X \frac{S''(\xi_1)S''(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\, dX}{\sqrt{(X-\xi_1)(X-\xi_2)}}.$$

Произведем интегрирование по dX; после изменения порядка интегрирования оно должно производиться в пределах от большего из ξ_1 и ξ_2 до $+\infty$. В качестве верхнего предела берем сначала некоторое большое, но конечное L, которое затем можно устремить к бесконечности. Таким образом, получим

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int\limits_0^l\int\limits_0^{\xi_2} S''(\xi_1)S''(\xi_2)[\ln(\xi_2-\xi_1) - \ln 4L]\, d\xi_1\, d\xi_2.$$

Интеграл от члена с постоянным множителем $\ln 4L$ тождественно исчезает, так как на заостренных концах тела обращается в нуль не только площадь $S(x)$, но и ее производная $S'(x)$. Таким образом, окончательно получим

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int\limits_0^l\int\limits_0^{\xi_2} S''(\xi_1)S''(\xi_2)\ln(\xi_2-\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

или

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int\limits_0^l\int\limits_0^l S''(\xi_1)S''(\xi_2)\ln|\xi_2-\xi_1|\, d\xi_1\, d\xi_2. \qquad (123.5)$$

Это и есть искомая формула для волнового сопротивления тонкого заостренного тела [1]. Порядок величины стоящего здесь интеграла есть $(S/l^2)^2 l^2$, где S — некоторая средняя площадь сечения тела. Поэтому

$$F_x \sim \rho_1 v_1^2 S^2/l^2.$$

Коэффициент сопротивления удлиненного тела условимся определять как

$$C_x = \frac{F_x}{(1/2)\rho_1 v_1^2 l^2}, \tag{123.6}$$

относя его к квадрату длины тела. В данном случае

$$C_x \sim S^2/l^4; \tag{123.7}$$

он пропорционален квадрату площади поперечного сечения тела.

Обратим внимание на формальную аналогию между формулой (123.5) и формулой (47.4) для индуктивного сопротивления тонкого крыла: вместо функции $\Gamma(z)$ в (47.4) здесь стоит функция $v_1 S'(x)$. Ввиду этой аналогии для вычисления интеграла (123.5) можно пользоваться тем же методом, который был изложен в конце § 47.

Следует также заметить, что определяемое формулой (123.5) волновое сопротивление не изменится, если изменить направление обтекания на обратное, — стоящий в этой формуле интеграл не зависит от того, в каком направлении проходится длина тела. Это свойство силы сопротивления характерно именно для линеаризованной теории [2].

Наконец, несколько слов об области применимости полученной формулы. К этому вопросу можно подойти следующим образом. Амплитуда колебаний газовых частиц в излучаемых телом звуковых волнах — порядка величины толщины тела, которую мы обозначим буквой δ. Скорость же колебаний — соответственно порядка величины отношения амплитуды δ к периоду волны l/v_1 $(\delta v_1/l)$. Но линейное приближение для распространения звуковых волн (т. е. линеаризованное уравнение для потенциала) во всяком случае требует малости скорости движения газа в волне по сравнению со скоростью звука, т. е. должно быть $v_1/\beta \gg v_1\delta/l$, или, что фактически то же:

$$\mathrm{M}_1 \ll l/\delta. \tag{123.8}$$

[1] Что касается подъемной силы (для неосесимметрического тела или при наличии угла атаки), то в рассматриваемом здесь приближении таковая вообще отсутствует.

[2] Оно имеет место и в изложенной в § 125 теории волнового сопротивления тонкого крыла.

Таким образом, изложенная теория становится неприменимой при значениях M_1, сравнимых с отношением длины тела к его толщине.

Она неприменима, разумеется, и в обратном предельном случае слишком близких к единице значений M_1, когда тоже недопустима линеаризация уравнений.

З а д а ч а

Определить форму удлиненного тела вращения, испытывающего минимальную силу сопротивления при заданных его объеме V и длине l.

Р е ш е н и е. Ввиду указанной в тексте аналогии вводим переменную θ согласно $x = \frac{l}{2}(1 - \cos\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, начало отсчета x в переднем конце тела) и пишем функцию $f(x) = S'(x)$ в виде

$$f = -l \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

(условие $S = 0$ при $x = 0$, l допускает в этой сумме, как легко убедиться, лишь значения $n \geqslant 2$). Для коэффициента сопротивления имеем при этом

$$C_x = \frac{\pi}{4} \sum_{n=2}^{\infty} n A_n^2.$$

Площадь $S(x)$ и полный объем тела V вычисляются по функции $f(x)$ как

$$S = \int_0^x f(x)\,dx, \quad V = \int_0^l S(x)\,dx.$$

Простое вычисление дает

$$V = \frac{\pi l^2}{16} A_2,$$

т. е. объем определяется одним лишь коэффициентом A_2. Поэтому минимальное F_x достигается при равных нулю A_n с $n \geqslant 3$. В результате получаем

$$C_{x\ \min} = \frac{128}{\pi}\left(\frac{V}{l^3}\right)^2 = \frac{9\pi}{2}\left(\frac{S_{\max}}{l^2}\right)^2.$$

При этом для площади сечения тела имеем $S = (1/3) l^2 A_2 \sin^3\theta$, откуда радиус тела как функция координаты x выражается в виде

$$R(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{V}{3l^3}\right)^{1/2} [x(l-x)]^{3/4} \left(\frac{2}{l}\right)^{1/2}.$$

Тело симметрично относительно плоскости $x = l/2$ [1]).

---

[1]) Хотя $R(x)$ и обращается в нуль на концах тела, но производная $R'(x)$ обращается в бесконечность, т. е. тело оказывается незаостренным; поэтому, строго говоря, лежащее в основе метода приближение вблизи самих концов неприменимо.

§ 124. Дозвуковое обтекание тонкого крыла

Рассмотрим обтекание хорошо обтекаемого тонкого «крыла» дозвуковым потоком сжимаемого газа. Как и в несжимаемом газе, хорошо обтекаемое дозвуковым потоком крыло должно быть тонким и иметь заостренную заднюю и закругленную переднюю кромки; угол атаки должен быть малым. Выберем направление обтекания в качестве оси x, а ось z — в направлении размаха крыла.

Скорость газа во всем пространстве [1]) будет лишь незначительно отличаться от скорости $\mathbf{v}_1$ натекающего потока, так что можно применять линеаризованное уравнение (114.4) для потенциала:

$$\left(1-\mathrm{M}_1^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{124.1}$$

На поверхности крыла (которую будем называть поверхностью C) скорость должна быть направлена по касательной к ней; вводя единичный вектор $\mathbf{n}$ нормали к поверхности крыла, напишем это условие в виде

$$\left(v_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)n_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}n_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}n_z=0.$$

Поскольку крыло обладает уплощенной формой и угол атаки мал, то нормаль $\mathbf{n}$ направлена почти параллельно оси y, так что $|n_y|$ близко к единице, а n_x, n_z малы. В написанном условии мы можем поэтому опустить малые члены второго порядка $n_x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $n_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, а вместо n_y написать ±1 ($+1$ на верхней поверхности крыла и -1 на нижней). Таким образом, граничное условие к уравнению (124.1) приобретает вид

$$v_1 n_x\pm\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \tag{124.2}$$

В силу предположенной тонкости крыла значение $\partial\varphi/\partial y$ на его поверхности можно вычислять просто как предел при $y\to0$.

Задачу о решении уравнения (124.1) с условием (124.2) можно легко привести к задаче об обтекании несжимаемой жидкостью. Для этого введем вместо координат x, y, z переменные

$$x'=x,\quad y'=y\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2},\quad z'=z\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}. \tag{124.3}$$

[1]) За исключением лишь небольшой области вблизи передней кромки крыла — вблизи линии остановки газа.

В этих переменных уравнение (124.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}=0, \tag{124.4}$$

т. е. переходит в уравнение Лапласа. Что касается формы обтекаемой поверхности, то введем вместо нее другую, C', оставив неизменным профиль сечений крыла поверхностями, параллельными плоскости xy, уменьшив только в отношении $\left(1-\mathrm{M}_1^2\right)^{1/2}$ все размеры вдоль размаха крыла (оси z).

Граничное условие (124.2) приобретает тогда вид

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}=0,$$

и для приведения его к обычному виду введем вместо φ новый потенциал φ':

$$\varphi'=\varphi\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}. \tag{124.5}$$

Для φ' будем иметь то же уравнение Лапласа и граничное условие

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial\varphi'}{\partial y'}=0, \tag{124.6}$$

которое должно удовлетворяться при $y'=0$.

Но уравнение (124.4) с граничным условием (124.6) есть уравнение, которому должен удовлетворять потенциал скорости несжимаемой жидкости, обтекающей тело с поверхностью C'. Таким образом, задача об определении распределения скоростей при обтекании крыла с поверхностью C сжимаемой жидкостью сводится к нахождению распределения скоростей при обтекании несжимаемой жидкостью крыла с формой поверхности C'.

Рассмотрим, далее, действующую на крыло подъемную силу F_y. Раньше всего замечаем, что произведенный в § 38 вывод формулы Жуковского (38.4) полностью применим и к сжимаемой жидкости, поскольку вместо переменной плотности ρ жидкости все равно надо в том же приближении писать постоянную величину ρ_1. Таким образом,

$$F_y=-\rho_1 v_1\int\Gamma\,dz, \tag{124.7}$$

где интегрирование производится по всей длине l_z размаха крыла. Из соотношения (124.5)и одинаковости поперечных профилей крыльев C и C' следует, что циркуляция Γ скорости при обтекании крыла C сжимаемой жидкостью связана с циркуляцией

Γ' скорости при обтекании крыла C' несжимаемой жидкостью соотношением

$$\Gamma' = \Gamma\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}. \tag{124.8}$$

Подставляя это в (124.7) и переходя от интегрирования по dz к интегрированию по dz', получим

$$F_y = \frac{-\rho_1 v_1 \int \Gamma'\,dz'}{1-\mathrm{M}_1^2}.$$

Величина, стоящая в числителе, представляет собой подъемную силу, действующую на крыло C' в несжимаемой жидкости. Обозначая ее через F_y', имеем

$$F_y = \frac{F_y'}{1-\mathrm{M}_1^2}. \tag{124.9}$$

Вводя коэффициенты подъемной силы

$$C_y = \frac{F_y}{(1/2)\rho_1 v_1^2 l_x l_z}, \quad C_y' = \frac{F_y'}{(1/2)\rho_1 v_1^2 l_x l_z'}$$

(где l_x, l_z и l_x, $l_z' = l_z\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}$ — длины крыльев C и C' вдоль осей x и z), перепишем это равенство в виде

$$C_y = \frac{C_y'}{\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}}. \tag{124.10}$$

Для крыльев достаточно большого размаха (с постоянным вдоль размаха профилем сечения) коэффициент подъемной силы в несжимаемой жидкости пропорционален углу атаки и не зависит от длины и ширины крыла:

$$C_y' = \mathrm{const}\cdot\alpha, \tag{124.11}$$

где const зависит только от формы профиля сечения (см. § 46). В этом случае можно поэтому написать вместо (124.10)

$$C_y = \frac{C_y^{(0)}}{\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}}, \tag{124.12}$$

где C_y и $C_y^{(0)}$ — коэффициенты подъемной силы одного и того же крыла соответственно в потоках сжимаемого и несжимаемого газа. Таким образом, мы получим такое правило: подъемная сила, действующая на длинное крыло в потоке сжимаемого газа, в $(1-\mathrm{M}_1^2)^{-1/2}$ раз больше подъемной силы, действующей на такое же крыло (при том же, в частности, угле атаки) в потоке несжимаемого газа (*L. Prandtl*, 1922; *H. Glauert*, 1928).

Аналогичные соотношения можно получить и для силы сопротивления. Наряду с формулой Жуковского для подъемной силы полностью переносится в теорию сжимаемой жидкости также и формула (47.4) для индуктивного сопротивления крыла. Произведя в ней те же преобразования (124.3) и (124.8), получим

$$F_x = \frac{F'_x}{1 - \mathrm{M}_1^2}, \tag{124.13}$$

где F'_x — сопротивление крыла C' в несжимаемой жидкости. При увеличении длины размаха индуктивное сопротивление стремится к постоянному пределу (§ 47). Поэтому для достаточно длинных крыльев можно заменить F'_x на $F_x^{(0)}$ (сопротивление в несжимаемой жидкости того же крыла C, к которому относится F_x). Тогда для коэффициента сопротивления имеем

$$C_x = \frac{C_x^{(0)}}{1 - \mathrm{M}_1^2}. \tag{124.14}$$

Сравнив с (124.12), мы видим, что при переходе от несжимаемой жидкости к сжимаемой остается неизменным отношение C_y^2/C_x.

Все изложенные здесь результаты, разумеется, неприменимы при слишком близких к единице значениях M_1, когда вообще становится неприменимой линеаризованная теория.

§ 125. Сверхзвуковое обтекание крыла

Для того чтобы быть хорошо обтекаемым в сверхзвуковом потоке, крыло должно иметь заостренными как заднюю, так и переднюю кромки, подобно тому как должны быть заострены тонкие тела, рассматривавшиеся в § 123.

Здесь мы ограничимся изучением обтекания тонкого крыла с очень большим размахом, с постоянным вдоль размаха профилем сечения. Рассматривая длину размаха как бесконечную, мы будем иметь дело с плоским (в плоскости xy) течением газа. Вместо уравнения (123.1) будем иметь теперь для потенциала уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \tag{125.1}$$

с граничным условием

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y \to \pm 0} = \mp v_1 n_x \tag{125.2}$$

(знаки $\mp$ в правой части равенства имеют место соответственно для верхней и нижней поверхностей крыла). Уравнение (125.1)

есть уравнение типа одномерного волнового уравнения, и его общее решение имеет вид

$$\varphi = f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y).$$

Тот факт, что влияющие на движение жидкости возмущения исходят от тела, означает, что в пространстве над крылом ($y > 0$) должно быть $f_2 \equiv 0$, так что $\varphi = f_1(x - \beta y)$, а в пространстве под крылом $(y < 0): \varphi = f_2(x + \beta y)$. Будем для определенности рассматривать пространство над крылом, где

$$\varphi = f(x - \beta y).$$

Функцию f определим из граничного условия (125.2), написав

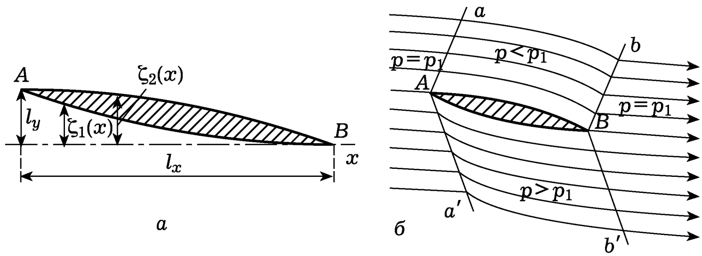


Рис. 129

в нем $n_x \approx -\zeta_2'(x)$, где $y = \zeta_2(x)$ есть уравнение верхней части линии профиля крыла (рис. 129 *а*). Имеем

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y\to+0} = -\beta f'(x) = v_1\zeta_2'(x), \quad f(x) = -\frac{v_1}{\beta}\zeta_2(x).$$

Таким образом, распределение скоростей определяется (при $y > 0$) потенциалом

$$\varphi(x,\, y) = -\frac{v_1}{\beta}\zeta_2(x - \beta y). \tag{125.3}$$

Аналогично при $y < 0$ мы получили бы

$$\varphi = \frac{v_1}{\beta}\zeta_1(x + \beta y),$$

где $y = \zeta_1(x)$ — уравнение нижней части профиля. Отметим, что потенциал, а с ним и остальные величины постоянны вдоль прямых $x \pm \beta y = \mathrm{const}$ (характеристик) в соответствии с результатами § 115, частным случаем которых является и полученное здесь решение.

Качественно картина течения выглядит следующим образом. От задней и передней заостренных кромок отходят слабые раз-

рывы (aAa' и bBb' на рис. 129 *б*) [1]). В пространстве впереди разрыва aAa' и позади bBb' поток однороден, а в области между ними поток поворачивает, огибая поверхность крыла; это есть простая волна, причем в рассматриваемом линеаризованном приближении все характеристики в ней имеют одинаковый наклон, равный углу Маха натекающего потока.

Распределение давления получается по формуле

$$p - p_1 = -\rho_1 v_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

(в общей формуле (114.5) членом с v_y^2 можно в данном случае пренебречь, так как v_x и v_y — одинакового порядка величины). Подставив сюда (125.3) и вводя так называемый коэффициент давления C_p, получим в верхней полуплоскости

$$C_p = \frac{p - p_1}{(1/2)\rho_1 v_1^2} = \frac{2}{\beta}\zeta_2'(x - \beta y).$$

В частности, коэффициент давления, действующего на верхнюю поверхность крыла, есть

$$C_{p2} = \frac{2}{\beta}\zeta_2'(x). \qquad (125.4)$$

Аналогично найдем для нижней поверхности

$$C_{p1} = -\frac{2}{\beta}\zeta_1'(x). \qquad (125.5)$$

Отметим, что давление в каждой точке профиля сечения крыла оказывается зависящим только от наклона его контура в этой же точке.

Поскольку угол наклона линии контура профиля к оси x везде мал, то вертикальная проекция сил давления равна с достаточной точностью самому давлению. Результирующая действующая на крыло подъемная сила равна разности сил давления, действующих на ее нижнюю и верхнюю поверхности. Поэтому коэффициент подъемной силы

$$C_y = \frac{1}{l_x}\int\limits_0^{l_x}(C_{p1} - C_{p2})\,dx = \frac{4l_y}{\beta l_x}$$

[1]) Это справедливо лишь в принятом здесь приближении. В действительности это — не слабые разрывы, а ударные волны слабой интенсивности или узкие центрированные волны разрежения, смотря по тому, в какую сторону поворачивает в них направление скорости. Так, для изображенного на рис. 129 *б* профиля Aa и Bb' будут волнами разрежения, а Aa' и Bb — ударными волнами.

Линия же тока, исходящая от задней кромки (точка B на рис. 129 *б*), представляет собой в действительности тангенциальный разрыв скорости (фактически размывающийся в тонкий турбулентный след).

(определение длин l_x, l_y см. рис. 129 *а*). Определим угол атаки α как угол наклона к оси x хорды AB, проведенной через вершины острых кромок (рис. 129 *а*): $\alpha \approx l_y/l_x$; тогда получим окончательно простую формулу:

$$C_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{\mathrm{M}_1^2 - 1}} \tag{125.6}$$

(*J. Ackeret*, 1925). Мы видим, что подъемная сила определяется одним только углом атаки и не зависит от формы сечения крыла в отличие от того, что имеет место при дозвуковом обтекании (см. § 48, формулу (48.7)).

Определим, далее, действующую на крыло силу сопротивления (это есть волновое сопротивление, имеющее такую же природу, как и волновое сопротивление тонких тел; см. § 123). Для этого надо спроецировать силы давления на направление оси x и проинтегрировать эту проекцию по всему контуру профиля. Для коэффициента силы сопротивления получим тогда

$$C_x = \frac{2}{\beta l_x} \int\limits_0^{l_x} \left(\zeta_1'^2 + \zeta_2'^2\right) dx. \tag{125.7}$$

Введем углы наклона $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ верхней и нижней частей контура к его хорде AB; тогда $\zeta_1' = \theta_1 - \alpha$, $\zeta_2' = \theta_2 - \alpha$. Интегралы от θ_1 и θ_2 обращаются, очевидно, в нуль, так что окончательно получим следующую формулу:

$$C_x = \frac{4\alpha^2 + 2\left(\overline{\theta_1^2} + \overline{\theta_2^2}\right)}{\sqrt{\mathrm{M}_1^2 - 1}} \tag{125.8}$$

(черта обозначает усреднение по x). При заданном угле атаки коэффициент сопротивления, очевидно, минимален для крыла, представляющего собой плоскую пластинку (так что $\theta_1 = \theta_2 = 0$). В этом случае $C_x = \alpha C_y$. Если применить формулу (125.8) к шероховатой поверхности, то мы найдем, что шероховатость может привести к значительному увеличению сопротивления, даже если высота отдельных неровностей мала [1]. Действительно, сопротивление оказывается не зависящим от высоты отдельных неровностей, если не меняется средний наклон их поверхности, т. е. среднее отношение высоты неровностей к расстоянию между ними.

Наконец, сделаем еще следующее замечание. Здесь, как и везде, говоря о крыле, мы подразумеваем, что оно расположено своими кромками перпендикулярно к движению. Обобщение на случай любого угла γ между направлением движения и кромкой

[1]) Но все же больше толщины пограничного слоя.

(*угол скольжения*) вполне очевидно. Ясно, что силы, действующие на бесконечное крыло постоянного сечения, зависят только от нормальной к его кромкам составляющей скорости натекающего потока; в невязкой жидкости составляющая скорости, параллельная кромкам, не вызывает никаких сил. Поэтому силы, действующие на крыло со скольжением в потоке с числом M_1, — такие же, какие действовали бы на то же крыло без скольжения в потоке с числом M_1, равным $\mathrm{M}_1 \sin\gamma$. В частности, если $\mathrm{M}_1 > 1$, но $\mathrm{M}_1 \sin\gamma < 1$, то специфическое для сверхзвукового обтекания волновое сопротивление будет отсутствовать.

§ 126. Околозвуковой закон подобия

Развитая в § 123–125 теория сверх- и дозвуковых обтеканий тонких тел неприменима в случае околозвукового движения, когда становится несправедливым линеаризованное уравнение для потенциала. В этом случае картина течения во всем пространстве определяется нелинейным уравнением (114.10):

$$2\alpha_* \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{126.1}$$

(или, при плоском движении, эквивалентным ему уравнением Эйлера–Трикоми). Решение этих уравнений для конкретных случаев, однако, весьма затруднительно. Поэтому существенный интерес представляют правила подобия, которые можно установить для таких течений, не прибегая к их конкретному решению.

Рассмотрим сначала плоское течение, и пусть

$$Y = \delta f(x/l) \tag{126.2}$$

есть уравнение, определяющее форму обтекаемого тонкого контура, причем l есть его длина (в направлении обтекания), а δ характеризует его толщину ($\delta \ll 1$). Изменением двух параметров l и δ получим семейство подобных контуров.

Уравнение движения имеет вид

$$2\alpha_* \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \tag{126.3}$$

со следующими граничными условиями. На бесконечности скорость равна скорости $\mathbf{v}_1$ невозмущенного потока, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mathrm{M}_{1*} - 1 = \frac{\mathrm{M}_1 - 1}{\alpha_*} \tag{126.4}$$

(см. определение потенциала φ согласно (114.9)). На профиле же скорость должна быть направлена по касательной к нему:

$$\frac{v_y}{v_x} \approx \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{dY}{dx} = \frac{\delta}{l} f'\left(\frac{x}{l}\right); \tag{126.5}$$

ввиду тонкости профиля можно требовать выполнения этого условия при $y = 0$.

Введем новые безразмерные переменные согласно

$$x = l\overline{x}, \quad y = \frac{l}{(\theta\alpha_*)^{1/3}}\overline{y}, \quad \varphi = \frac{l\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}}\overline{\varphi}(\overline{x}, \overline{y}) \tag{126.6}$$

(мы ввели угол $\theta = \delta/l$, характеризующий «угол раствора» тела или угол атаки). Тогда мы получим уравнение

$$2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\overline{x}^2} = \frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\overline{y}^2}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{x}} = K, \quad \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{y}} = 0 \text{ на } \infty, \quad \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{y}} = f'(\overline{x}) \text{ при } \overline{y} = 0,$$

где

$$K = \frac{\mathrm{M}_1 - 1}{(\alpha_*\theta)^{2/3}}. \tag{126.7}$$

Эти условия содержат лишь один параметр — K. Таким образом, мы получили искомый закон подобия: плоские околозвуковые течения с одинаковыми значениями числа K подобны, как это устанавливается формулами (126.6) (*С.В. Фалькович*, 1947).

Обратим внимание на то, что в выражение (126.7) входит также и единственный параметр α_*, характеризующий свойства самого газа. Поэтому полученное правило определяет также и подобие по изменению рода газа.

В условиях рассматриваемого приближения давление определяется формулой

$$p - p_1 \approx -\rho_1 v_1 (v_x - v_1).$$

Вычисление с помощью выражений (126.6) показывает, что коэффициент давления на профиль будет функцией вида

$$C_p = \frac{p - p_1}{(1/2)\rho_1 v_1^2} = \frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} P\left(K, \frac{x}{l}\right).$$

Коэффициенты силы сопротивления и подъемной силы определяются интегралами по контуру профиля:

$$C_x = \frac{1}{l}\int C_p \frac{dY}{dx}\,dx, \quad Cy = \frac{1}{l}\oint C_p\,dx$$

и, следовательно, являются функциями вида [1])

$$C_x = \frac{\theta^{5/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_x(K), \quad C_y = \frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_y(K). \tag{126.8}$$

Совершенно аналогичным образом можно получить закон подобия для трехмерного обтекания тонкого тела, форма которого задается уравнениями вида

$$Y = \delta f_1\left(\frac{x}{l}\right), \qquad Z = \delta f_2\left(\frac{x}{l}\right) \tag{126.9}$$

с двумя параметрами δ и l ($\delta \ll l$). Существенное отличие от плоского случая связано с тем, что потенциал имеет при $y \to 0$, $z \to 0$ логарифмическую особенность (см., например, формулы обтекания тонкого конуса в § 113). Поэтому граничное условие на оси x должно определять не сами производные $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, а остающиеся конечными произведения:

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Y\frac{dY}{dx}, \qquad z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = Z\frac{dZ}{dx}.$$

Легко убедиться в том, что преобразованием подобия в этом случае является (снова вводим угол $\theta = \delta/l$)

$$x = \overline{lx}, \quad y = \frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}}\overline{y}, \quad z = \frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}}\overline{z}, \quad \varphi = l\theta^2\overline{\varphi}, \tag{126.10}$$

причем параметр подобия

$$K = \frac{\mathrm{M}_1 - 1}{\theta^2\alpha_*} \tag{126.11}$$

(*T. Karman*, 1947). Для коэффициента давления на поверхность тела получим выражение вида

$$C_p = \theta^2 P(K,\, x/l),$$

а для коэффициента силы сопротивления соответственно [2])

$$C_x = \theta^4 f(K). \tag{126.12}$$

---

[1]) Область применимости этих формул определяется неравенством $|\mathrm{M}_1 - 1| \ll 1$. Линеаризованной же теории соответствуют большие значения K, т. е. $|\mathrm{M}_1 - 1| \gg \theta^{2/3}$. В области $1 \gg \mathrm{M}_1 - 1 \gg \theta^{2/3}$ формулы (126.8) должны, следовательно, переходить в формулы (125.6)–(125.8) линеаризованной теории. Это значит, что при больших K функции f_x и f_y должны быть пропорциональны $K^{-1/2}$.

[2]) В области $1 \gg \mathrm{M}_1 - 1 \gg \theta^2$ должна получаться формула (123.7) линеаризованной теории, согласно которой $C_x \sim \theta^4$; это значит, что при увеличении K функция $f(K)$ должна стремиться к постоянной.

Все полученные формулы относятся, конечно, как к малым положительным, так и к малым отрицательным значениям M_1-1. Если в точности $\mathrm{M}_1 = 1$, то параметр подобия $K = 0$ и функции в формулах (126.8) и (126.12) сводятся к постоянным, так что эти формулы полностью определяют зависимость C_x и C_y от угла θ и свойств газа α_*.

§ 127. Гиперзвуковой закон подобия

Для обтекания тонких заостренных тел с большими сверхзвуковыми скоростями (большие M_1) линеаризованная теория неприменима, как это уже было упомянуто в конце § 114. Поэтому представляет особый интерес простое правило подобия, которое можно установить для таких течений (их называют *гиперзвуковыми*).

Возникающие при таком обтекании ударные волны наклонены к направлению движения под малым углом — порядка величины отношения толщины тела к его длине ($\theta = \delta/l$). Эти волны, вообще говоря, искривлены и в то же время обладают большой интенсивностью — хотя скачок скорости на них относительно мал, но скачок давления (а с ним и энтропии) велик. Поэтому течение газа в общем случае отнюдь не является потенциальным.

Будем считать, что число M_1 — порядка величины $1/\theta$ или больше. Ударная волна понижает значение местного числа M, но оно во всяком случае остается порядка величины $1/\theta$ (ср. задачу 2 § 112), так что число M велико во всем пространстве.

Воспользуемся указанной в § 123 «звуковой аналогией»: трехмерная задача о стационарном обтекании тонкого тела с переменным сечением $S(x)$ эквивалентна нестационарной двумерной задаче об излучении звуковых волн контуром, площадь которого меняется со временем по закону $S(v_1 t)$; роль скорости звука играет при этом величина $v_1(\mathrm{M}_1^2 - 1)^{-1/2}$ или при больших M_1 просто c_1. Подчеркнем, что единственное условие, обеспечивающее эквивалентность обеих задач, заключается в малости отношения δ/l, что дает возможность рассматривать небольшие вдоль длины тела кольцевые участки его поверхности как цилиндрические. При больших M_1, однако, скорость, распространения излучаемых волн сравнима по величине со скоростью частиц газа в них (ср. конец § 123), и потому задача должна решаться на основе точных, нелинеаризованных уравнений.

Возмущение скорости (по сравнению со скоростью $\mathbf{v}_1$ натекающего потока) мало уже при всяком сверхзвуковом обтекании тонкого заостренного тела. При гиперзвуковом обтекании дополнительно еще возмущение продольной скорости мало по сравнению с возникающими поперечными скоростями:

$$v_y \sim v_z \sim v_1\theta, \quad v_x - v_1 \sim v_1\theta^2. \qquad (127.1)$$

Изменения же давления и плотности отнюдь не малы:

$$\frac{p-p_1}{p_1} \sim \mathrm{M}_1^2\theta^2, \quad \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1} \sim 1, \tag{127.2}$$

причем изменение давления может быть даже (при $\mathrm{M}_1\theta \gg 1$) сколь угодно большим (ср. задачу 2 § 112).

Звуковая аналогия относится, очевидно, только к двумерной задаче о движении в плоскости yz, перпендикулярной направлению натекающего потока. В этой двумерной задаче линейная скорость источника звука — порядка величины $v_1\theta$; кроме нее в задачу входят в качестве независимых параметров еще только скорость звука c_1 и размеры источника δ (и параметр плотности ρ_1) [1]. Из них можно составить всего одну безразмерную комбинацию

$$K = \mathrm{M}_1\theta, \tag{127.3}$$

которая и является критерием подобия [2]. В качестве масштабов длины для координат yz и масштаба времени надо при этом взять величины соответствующей размерности, составленные из тех же параметров, например, δ и $\delta/(v_1\theta) = l/v_1$; естественным же параметром для координаты x является длина тела l. Тогда можно утверждать, что

$$v_y = v_1\theta v_y', \quad v_z = v_1\theta v_z', \quad p = \rho_1 v_1^2\theta^2 p', \quad \rho = \rho_1\rho', \tag{127.4}$$

где v_y', v_z', p', ρ' — функции безразмерных переменных x/l, y/δ, z/δ и параметра K; при этом в виду (127.1), (127.2) можно утверждать, что эти функции — порядка единицы [3].

---

[1]) Мы имеем в виду, конечно, не только уравнения движения газа, но и граничные условия к ним на поверхности тела и условия, которые должны выполняться на ударных волнах. Газ предполагается политропным, так что его газодинамические свойства зависят только от безразмерного параметра γ; получаемое ниже правило подобия не определяет, однако, характера зависимости течения от этого параметра.

Следует отметить, что при обтекании с $\mathrm{M}_1 \gg 1$ газ сильно нагревается, в результате чего могут существенно измениться его термодинамические свойства. Поэтому количественный смысл формул для политропного газа (т. е. в предположении постоянства его теплоемкости) для гиперзвуковых скоростей фактически ограничен.

[2]) Если не предполагать M_1 большим, то получилось бы правило подобия с параметром $K = \theta\sqrt{\mathrm{M}_1^2 - 1}$. Оно, однако, не представляет интереса, поскольку при небольших M_1 линеаризованная теория в действительности полностью определяет зависимость всех величин от этого параметра.

[3]) Закон подобия для гиперзвукового обтекания сформулирован *Цянь Сюэ-сэнем* (*H.S. Tsien*, 1946). Его связь со «звуковой аналогией», распространенной на нелинейную задачу, указана *Хейзом* (*W.D. Hayes*, 1947); в специальной литературе эту аналогию называют «поршневой».

Сила сопротивления F_x вычисляется как интеграл

$$F_x = \oint p\,dy\,dz,$$

взятый по всей поверхности тела (в силу граничного условия $v_n = 0$, член $v_x(\mathbf{vn})$ в плотности потока импульса обращается в нуль на поверхности тела; $\mathbf{n}$ — нормаль к этой поверхности). Перейдя к безразмерным переменным согласно (127.4), получим коэффициент сопротивления C_x (определенный согласно (123.6)) в виде

$$C_x = 2\theta^4 \oint p'\,dy'\,dz'.$$

Оставшийся интеграл — функция безразмерного параметра K. Таким образом,

$$C_x = \theta^4 f(K). \tag{127.5}$$

Такой же самый закон подобия получается, очевидно, и в плоском случае — для обтекания тонкого крыла бесконечной протяженности. Для коэффициентов сопротивления и подъемной силы получаются при этом формулы вида

$$C_x = \theta^3 f_x(K), \quad C_y = \theta^2 f_y(K). \tag{127.6}$$

При применении законов (127.5), (127.6) следует помнить, что подобие течений предполагает, что форма, размеры и ориентация обтекаемых тел относительно натекающего потока получаются друг из друга только изменением масштаба δ вдоль осей y, z и масштаба l вдоль оси x. Это значит, в частности, что если отличен от нуля угол атаки α, то для подобных конфигураций отношение α/θ должно быть одинаковым.

При $K_1 \to \infty$ функции этого параметра в (127.5), (127.6) стремятся к постоянным пределам. Это утверждение является следствием существования предельного (при $\mathrm{M}_1 \to \infty$) режима обтекания, свойства которого в существенной области течения не зависят от M_1 (*С.В. Валландер*, 1947; *K. Oswatitsch*, 1951). Под «существенной» подразумевается область течения между передней, наиболее интенсивной, частью головной ударной волны и поверхностью обтекаемого тела, не слишком далеко от его передней части (подчеркнем, что именно эта область, с наибольшим давлением, определяет действующие на тело силы). Если описывать течение «приведенными» скоростью v/v_1, давлением $p/(\rho_1 v_1^2)$ и плотностью ρ/ρ_1 как функциями безразмерных координат, то картина обтекания тела заданной формы в указанной области оказывается в пределе независящей от M_1. Дело в том, что, будучи выраженными через эти переменные, оказываются

независящими от M_1 не только гидродинамические уравнения и граничные условия на поверхности обтекаемого тела, но и все условия на поверхности ударной волны. Ограничение области движения «существенной» частью связано с тем, что пренебрегаемые в последних условиях величины — относительного порядка $1/(M_1^2 \sin^2 \varphi)$, где φ — угол между $\mathbf{v}_1$ и поверхностью разрыва; на больших расстояниях, где интенсивность ударной волны мала, этот угол стремится к углу Маха $\arcsin(1/M_1) \approx 1/M_1$, так что параметр разложения перестает быть малым: $1/(M_1^2 \sin^2 \varphi) \sim 1$ [1].

З а д а ч а

Определить подъемную силу, действующую на плоское крыло бесконечного размаха, наклоненное к направлению движения под малым углом атаки α при $M_1 \alpha \gtrsim 1$ (*R.D. Linnell*, 1949).

Р е ш е н и е. Картина обтекания выглядит, как показано на рис. 130: от переднего и от заднего краев пластинки отходят по ударной волне и по волне разрежения, в которых поток поворачивает сначала на угол α, а затем на такой же угол в обратном направлении.

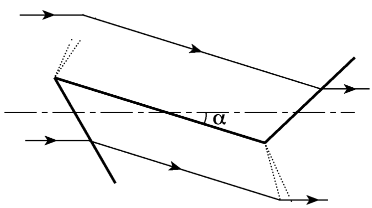


Рис. 130

Согласно акустической аналогии задача о стационарном обтекании такой пластинки эквивалентна задаче о нестационарном одномерном движении газа впереди и позади поршня, движущегося равномерно со скоростью αv_1. Впереди поршня образуется ударная волна, а позади — волна разрежения (см. задачи 1, 2 § 99). Воспользовавшись полученными там результатами, находим искомую подъемную силу как разность давлений, действующих на обе стороны пластинки. Коэффициент подъемной силы:

$$C_y = \alpha^2 \left[\frac{2}{\gamma K^2} + \frac{\gamma+1}{2} + \sqrt{\frac{4}{K^2} + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2} \right] - \frac{2\alpha^2}{\gamma K^2} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} K \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

(где $K = \alpha M_1$). При $K \geqslant 2/(\gamma-1)$ под пластинкой образуется область вакуума и второй член должен быть опущен. В области $1 \ll M_1 \ll 1/\alpha$ эта формула переходит в формулу $C_y = 4\alpha/M_1$, даваемую линеаризованной теорией, в соответствии с тем, что здесь перекрываются области применимости той и другой.

[1]) Детали доказательства можно найти в кн.: *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959, гл. 1, § 4.

ГЛАВА XIV

ГИДРОДИНАМИКА ГОРЕНИЯ

§ 128. Медленное горение

Скорость химической реакции (измеряемая, скажем, числом прореагировавших в единицу времени молекул) зависит от температуры газовой смеси, в которой она происходит, увеличиваясь вместе с ней. Во многих случаях эта зависимость очень сильная [1]. Скорость реакции может при этом оказаться при обычных температурах настолько малой, что реакция практически вовсе не идет, несмотря на то, что состоянию термодинамического (химического) равновесия соответствовала бы газовая смесь, компоненты которой прореагировали друг с другом. При достаточном же повышении температуры реакция протекает со значительной скоростью. Если реакция эндотермична, то для ее протекания необходим непрерывный подвод тепла извне; если ограничиться одним только начальным повышением температуры смеси, то прореагирует лишь незначительное количество вещества, вслед за чем температура газа настолько понизится, что реакция снова прекратится. Совсем иначе будет обстоять дело при сильно экзотермической реакции, сопровождающейся значительным выделением тепла. Здесь достаточно повысить температуру хотя бы в одном каком-нибудь месте смеси; начавшаяся в этом месте реакция в результате выделения тепла сама будет производить нагревание окружающего газа и, таким образом, реакция, раз начавшись, будет сама собой распространяться по газу. В таких случаях говорят о *медленном горении* газовой смеси или о *дефлаграции* [2].

---

[1] Скорость реакции обычно зависит от температуры по экспоненциальному закону, будучи в основном пропорциональной множителю вида $\exp(-U/T)$, где U — характерная для каждой данной реакции постоянная (энергия активации). Чем больше U, тем сильнее зависимость скорости реакции от температуры.

[2] Следует иметь в виду, что в смеси, самой по себе способной к горению, в известных условиях самопроизвольное распространение горения может оказаться невозможным. Соответствующие пределы определяются тепловыми потерями, связанными с такими факторами, как отвод тепла через стенки трубы (при горении газа в трубе), потери на излучение и т. п. Поэтому, например, горение оказывается невозможным в трубках слишком малого радиуса.

Горение газовой смеси непременно сопровождается также и движением газа. Другими словами, процесс горения представляет собой, отвлекаясь от его химической стороны, также и газодинамический процесс. В общем случае для определения режима горения необходимо совместное решение системы уравнений, включающей в себя как уравнения химической кинетики данной реакции, так и уравнения движения газовой смеси.

Положение, однако, существенно упрощается в том весьма важном случае (с которым обычно и приходится иметь дело), когда характерные размеры l, определяющие условия данной конкретной задачи, достаточно велики (по сравнению с чем именно, будет выяснено ниже). Мы увидим, что в таких случаях чисто газодинамическая задача может быть в известном смысле отделена от задачи химической кинетики.

Область сгоревшего газа (т. е. область, в которой реакция уже закончилась и газ представляет собой смесь продуктов горения) отделена от газа, в котором горение еще не началось, некоторым переходным слоем, где как раз и происходит самая реакция (*зона горения* или *пламя*); с течением времени этот слой передвигается вперед со скоростью, которую можно назвать скоростью распространения горения в газе. Величина скорости распространения зависит от интенсивности теплопередачи из зоны горения в ненагретую исходную газовую смесь, причем основной механизм теплопередачи состоит в обычной теплопроводности (*В.А. Михельсон*, 1890).

Порядок величины ширины зоны горения δ определяется средним расстоянием, на которое успевает распространиться выделяющееся в реакции тепло за то время τ, в течение которого длится эта реакция (в данном участке газа). Время τ есть величина, характерная для данной реакции, и зависит лишь от термодинамического состояния горящего газа (но не от характеристических параметров l задачи). Если χ — температуропроводность газа, то имеем см. (51.6) [1]):

$$\delta \sim \sqrt{\chi\tau}\,. \tag{128.1}$$

Уточним теперь сделанное выше предположение: мы будем считать, что характерные размеры задачи велики по сравнению с толщиной зоны горения ($l \gg \delta$). При соблюдении этого условия можно выделить чисто газодинамическую задачу. При определении движения газа можно пренебречь толщиной зоны горения

[1]) Во избежание недоразумений отметим, что при сильной зависимости τ от температуры в формуле (128.1) должен стоять еще довольно большой коэффициент (если для τ брать значение при температуре продуктов горения). Для нас здесь существен в первую очередь тот факт, что δ не зависит от l.

и рассматривать ее просто как поверхность, разделяющую продукты горения и несгоревший газ. На этой поверхности (*фронт пламени*) состояние газа испытывает скачок, т. е. она представляет собой своеобразную поверхность разрыва.

Скорость перемещения v_1 этого разрыва относительно самого газа (в нормальном к фронту направлении) называют *нормальной скоростью пламени*. За время τ горение успевает распространиться на расстояние порядка величины δ; поэтому искомая скорость пламени [1]:

$$v_1 \sim \frac{\delta}{\tau} \sim \left(\frac{\chi}{\tau}\right)^{1/2}. \tag{128.2}$$

Обычная температуропроводность газа — порядка величины произведения длины свободного пробега молекул на их тепловую скорость, или, что то же, произведения времени свободного пробега $\tau_{\text{св}}$ на квадрат скорости. Имея в виду, что тепловая скорость молекул совпадает по порядку величины со скоростью звука, найдем

$$\frac{v_1}{c} \sim \left(\frac{\chi}{\tau c^2}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{\tau_{\text{св}}}{\tau}\right)^{1/2}.$$

Отнюдь не каждое столкновение молекул сопровождается химической реакцией между ними; напротив, в реакцию вступает лишь очень незначительная доля сталкивающихся молекул. Это значит, что $\tau_{\text{св}} \ll \tau$ и потому $v_1 \ll c$. Таким образом, в рассматриваемом режиме скорость распространения пламени мала по сравнению со скоростью звука [2].

На поверхности разрыва, заменяющего собой зону горения, как и на всяком вообще разрыве, должны выполняться условия непрерывности потоков вещества, импульса и энергии. Первое из этих условий, как обычно, определяет отношение нормальных к поверхности разрыва компонент скорости газа относительно разрыва: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, или

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{V_1}{V_2}, \tag{128.3}$$

где V_1, V_2 — удельные объемы несгоревшего газа и продуктов горения. Согласно общим результатам, полученным в § 84 для произвольных разрывов, при наличии скачка нормальной скорости

---

[1]) Для примера укажем, что скорость распространения пламени в смеси 6 % CH_4 и 94 % воздуха составляет всего 5 см/с, а в гремучей смеси ($2H_2 + O_2$) — 1000 см/с; ширина зоны горения в этих двух случаях — соответственно $\sim 5 \cdot 10^{-2}$ и $5 \cdot 10^{-4}$ см.

[2]) Определенную роль в процессе распространения горения играет также и взаимная диффузия различных компонент горящей смеси; это обстоятельство не меняет порядков величины скорости и ширины пламени. Подчеркнем, однако, что здесь везде идет речь о горении предварительно перемешанных горючих газовых смесей, а не о случаях, когда реагирующие вещества пространственно разделены и горение происходит лишь за счет их взаимной диффузии.

касательная компонента скорости должна быть непрерывна. Поэтому линии тока преломляются на поверхности разрыва.

Благодаря малости нормальной скорости распространения пламени по сравнению со скоростью звука условие непрерывности потока импульса сводится к непрерывности давления, а потока энергии — к непрерывности тепловой функции:

$$p_1 = p_2, \quad w_1 = w_2. \tag{128.4}$$

При использовании этих условий следует помнить, что газы по обе стороны рассматриваемого разрыва химически различны, а потому их термодинамические величины не являются одинаковыми функциями друг от друга.

Считая газ политропным, имеем

$$w_1 = w_{01} + c_{p1}T_1, \;\; w_2 = w_{02} + c_{p2}T_2;$$

аддитивные постоянные нельзя полагать здесь равными нулю, как мы это делали в случае одного газа (выбирая соответствующим образом начало отсчета энергии), поскольку здесь w_{01} и w_{02} различны. Введем обозначение $w_{01} - w_{02} = q$; q есть не что иное, как теплота, выделяющаяся при реакции (отнесенная к единице массы), если бы эта реакция происходила при абсолютном нуле температуры. Тогда получаем следующие соотношения между термодинамическими величинами исходного (газ *1*) и сгоревшего (газ *2*) газов:

$$p_1 = p_2, \;\; T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}}T_1, \;\; V_2 = V_1\frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)}\left(\frac{q}{c_{p1}T_1} + 1\right). \tag{128.5}$$

Наличие определенной нормальной скорости распространения пламени, не зависящей от скоростей движения газа, приводит к установлению определенной формы фронта пламени при стационарном горении и в движущемся потоке газа. Примером является горение газа, вытекающего из конца трубки (отверстия горелки). Если v есть средняя (по сечению трубки) скорость газа, то очевидно, что $v_1S_1 = vS$, где S — площадь поперечного сечения трубки, а S_1 — полная площадь поверхности фронта пламени.

Возникает вопрос о границах устойчивости описанного режима по отношению к малым возмущениям — условиях реального его существования. Благодаря малости скорости движения газа по сравнению со скоростью звука, при исследовании устойчивости фронта пламени можно рассматривать газ как несжимаемую идеальную (невязкую) среду, причем нормальная скорость распространения пламени предполагается заданной постоянной величиной. Такое исследование приводит к результату о неустойчивости фронта (*Л.Д. Ландау*, 1944; см. задачу 1 к этому параграфу). В таком виде это исследование относится лишь к достаточно большим значениям чисел Рейнольдса lv_1/ν_1 и lv_2/ν_2. Учет

вязкости газа, однако, в данных условиях сам по себе не может привести к очень большому критическому значению этих чисел.

Такая неустойчивость должна была бы приводить к самопроизвольной турбулизации пламени. Между тем экспериментальные данные свидетельствуют о том, что самопроизвольная турбулизация пламени фактически не происходит, — во всяком случае вплоть до очень больших значений числа Рейнольдса. Это связано с наличием в реальных условиях ряда факторов (гидродинамических и диффузионно-тепловых), стабилизирующих пламя. Изложение этих сложных вопросов выходит за рамки этой книги, и мы ограничимся здесь лишь краткими замечаниями о некоторых из возможных источников стабилизации.

Существенную роль в качестве такого источника может играть влияние искривления фронта на скорость горения. Если учитывать только теплопроводность, то на вогнутых (по отношению к исходной горючей смеси) участках фронта скорость v_1 повышается (благодаря улучшению условий теплопередачи в охватываемую вогнутостью свежую смесь), а на выпуклых местах v_1 уменьшается; этот эффект стремится выровнять фронт, т. е. влияет в стабилизирующем направлении. Изменение же диффузионного режима, как это следует из аналогичных соображений, оказывает дестабилизирующее действие. Таким образом, общий знак эффекта зависит от соотношения между коэффициентами температуропроводности и диффузии (*И.П. Дроздов*, *Я.Б. Зельдович*, 1943). Для феноменологического описания влияния искривления фронта на скорость горения v_1 можно ввести в нее слагаемое, пропорциональное кривизне фронта (*G.H. Markstein*, 1951); при надлежащем знаке этого члена его введение в граничные условия на фронте горения приводит к устранению неустойчивости возмущений с малыми длинами волн [1]. Развитие неустойчивых (в линейном приближении) возмущений может стабилизироваться на определенном стационарном (по их амплитуде) пределе за счет нелинейных эффектов (*R.E. Petersen*, *N.W. Emmons*, 1956; *Я.Б. Зельдович*, 1966); этот механизм может привести к «ячеистой» структуре пламени [2].

Распространяющееся по горючей смеси пламя приводит в движение окружающий газ на значительном протяжении. Неизбежность возникновения сопутствующего горению движения вид-

---

[1]) В обозначениях, введенных в задаче 1, выражение для v_1 с учетом этого эффекта надо писать в виде $v_1 = v_1^{(0)}(1 - \mu\partial^2\zeta/\partial y^2)$, где $v_1^{(0)}$ — скорость горения при плоском фронте, а $v_1^{(0)}$ — эмпирическая константа (размерности длины), положительная в условиях стабилизации.

[2]) Подробное изложение этих вопросов дано в кн.: *Зельдович Я.Б.*, *Баренблатт Г.И.*, *Либрович В.Б.*, *Махвиладзе Г.М.* Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980, гл. 4, 6.

на уже из того, что ввиду различия между скоростями v_1 и v_2 продукты горения должны двигаться относительно несгоревшего газа со скоростью $v_1 - v_2$. В ряде случаев это движение приводит также и к возникновению ударных волн. Они не имеют непосредственного отношения к процессу горения, и их возникновение связано с невозможностью удовлетворить иным образом необходимым граничным условиям. Рассмотрим, например, горение, распространяющееся от закрытого конца трубы. На рис. 131 ab есть зона горения. Газ в областях *1* и *3* — исходная несгоревшая газовая смесь, а в области *2* — продукты горения. Скорость v_1 передвижения зоны горения относительно находящегося перед ним газа *1* есть величина, определяющаяся свойствами реакции и условиями теплопередачи, и должна рассматриваться как заданная. Скорость v_2 движения пламени относительно газа *2* определится после этого непосредственно условием (128.3). На закрытом конце трубы скорость газа должна обращаться в нуль; поэтому во всей области *2* газ будет неподвижным. Газ же *1* должен, следовательно, двигаться относительно трубы с постоянной скоростью, равной $v_2 - v_1$. В передней части трубы вдали от пламени газ тоже должен быть неподвижным. Удовлетворить этому условию можно, только вводя ударную волну (cd на рис. 131), в которой скорость газа испытывает скачок, так что газ *3* оказывается неподвижным. По заданному скачку скорости определяются также и скачки остальных величин, и скорость распространения самой волны. Таким образом мы видим, что распространяющийся фронт пламени действует как поршень, толкающий находящийся перед ним газ. Ударная волна движется быстрее пламени, так что количество вовлекаемого в движение газа с течением времени возрастает [1].

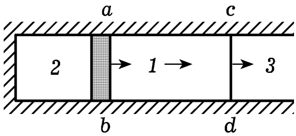


Рис. 131

При достаточно больших значениях числа Рейнольдса сопутствующее горению движение газа в трубе становится турбулентным, что в свою очередь оказывает обратное турбулизирующее действие на пламя. В вопросах о турбулентном горении еще много неясного, и они здесь не будут рассматриваться.

[1]) В реальных условиях фронт горения в трубе обычно выпуклый по отношению к находящейся перед ним исходной газовой смеси. Это приводит к возникновению специфического механизма стабилизации пламени по отношению к мелкомасштабным возмущениям. Распространение горения по нормалям к фронту «растягивает» последний, причем возникающие в каких-либо его точках возмущения сносятся по направлению к стенкам трубы и, достигнув стенки, гасятся (стационарность же формы фронта поддерживается при этом движением газа перед фронтом). См. *Зельдович Я.Б., Истратов А.Г., Кидин Н.И., Либрович В.Б.* Combustion Science and Technology. 1980. V. 24. P. 113.

З а д а ч и

1. Исследовать устойчивость плоского фронта пламени при медленном горении по отношению к малым возмущениям.

Р е ш е н и е. Рассматриваем плоскость разрыва (фронт пламени) в системе координат, в которой он покоится (и совпадает с плоскостью yz); невозмущенная скорость газа направлена в положительном направлении оси x. На движение с постоянными скоростями v_1, v_2 (по обе стороны разрыва) накладываем возмущение, периодическое по времени и по координате y. Из уравнений движения

$$\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho}\nabla p' \tag{1}$$

(под $\mathbf{v}$ и ρ подразумеваются $\mathbf{v}_1$, ρ_1 или $\mathbf{v}_2$, ρ_2) получаем, как и в § 29, уравнение

$$\Delta p' = 0. \tag{2}$$

На поверхности разрыва (т. е. при $x \approx 0$) должны выполняться следующие условия: условие непрерывности давления

$$p_1' = p_2', \tag{3}$$

условие непрерыаности касательной к поверхности компоненты скорости

$$v_{1y}' + v_1\frac{\partial \zeta}{\partial y} = v_{2y}' + v_2\frac{\partial \zeta}{\partial y} \tag{4}$$

(где $\zeta(y, t)$ — малое смещение поверхности разрыва вдоль оси x при возмущении) и условие неизменности нормальной скорости газа относительно разрыва

$$v_{1x}' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_{2x}' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

В области $x < 0$ (исходный газ *1*) решение уравнений (1) и (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} v_{1x}' &= Ae^{iky+kx-i\omega t}, \quad v_{1y}' = iAe^{iky+kx-i\omega t}, \\ p_1' &= A\rho_1\left(\frac{i\omega}{k} - v_1\right)e^{iky+kx-i\omega t}. \end{aligned} \tag{6}$$

В области же $x > 0$ (газ *2*, продукты горения) наряду с решением вида $\mathrm{const}\cdot e^{iky-kx-i\omega t}$ должно быть учтено еще и другое частное решение уравнений (1) и (2), в котором зависимость величин от y и t определяется тем же множителем $e^{iky-i\omega t}$. Это решение получится, если положить $p' = 0$; тогда в уравнении Эйлера правая часть исчезает, а остающееся однородное уравнение имеет решение, в котором

$$v_x',\ v_y' \propto \exp\left(iky - i\omega t + \frac{i\omega}{v}x\right).$$

Причина, по которой это решение должно быть учтено только для газа *2*, а не для газа *1*, заключается в том, что нашей конечной целью является определение возможности существования таких частот ω, у которых мнимая часть положительна; но для таких ω множитель $e^{i\omega x/v}$ неограниченно возрастал бы с $|x|$ при $x < 0$, и потому в области газа *1* такое решение должно быть отброшено. Подбирая опять соответствующим образом постоянные

коэффициенты, ищем решение при $x > 0$ в виде

$$v'_{2x} = Be^{iky-kx-i\omega t} + Ce^{iky-i\omega t+i\omega x/v_2},$$
$$v'_{2y} = -iBe^{iky-kx-i\omega t} - \frac{\omega}{kv_2}Ce^{iky-i\omega t+i\omega x/v_2}, \quad (7)$$
$$p'_2 = -B\rho_2\left(v_2 + \frac{i\omega}{k}\right)e^{iky-kx-i\omega t}.$$

Положив также

$$\zeta = e^{iky-i\omega t} \quad (8)$$

и подставив все полученные выражения в условия (3)–(5), получим четыре однородных уравнения для коэффициентов A, B, C, D [1]). Простое вычисление приводит к следующему условию совместности этих уравнений (при вычислении следует помнить, что $j \equiv \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$):

$$\Omega^2(v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + k^2 v_1 v_2(v_1 - v_2) = 0, \quad (9)$$

где $\Omega = -i\omega$. Если $v_1 > v_2$, то это уравнение имеет либо два отрицательных вещественных корня, либо два комплексно сопряженных корня с $\operatorname{Re}\Omega < 0$; в этом случае движение устойчиво. Если же $v_1 < v_2$ (и соответственно $\rho_1 > \rho_2$), то оба корня уравнения (9) вещественны, причем один из них положителен:

$$\Omega = kv_1\frac{\mu}{1+\mu}\left[\sqrt{1 + \mu - \frac{1}{\mu}} - 1\right]$$

(где $\mu = \rho_1/\rho_2$), так что движение неустойчиво; именно этот случай имеет место для фронта горения, поскольку плотность ρ_2 его продуктов всегда меньше плотности ρ_1 исходного газа в связи со значительным нагреванием.

Отметим, что $\operatorname{Im}\Omega = 0$; это значит, что возмущения не распространяются вдоль фронта и усиливаются как стоячие волны. Неустойчивость имеет место для возмущений со всеми длинами волн, причем инкремент усиления растет с k (следует, однако, помнить, что исследование в котором фронт рассматривается как геометрическая поверхность, относится лишь к возмущениям, длина волны которых велика по сравнению с δ: $k\delta \ll 1$). При заданном k инкремент возрастает с увеличением μ.

2. На поверхности жидкости происходит горение, причем сама реакция происходит в испаряющемся с поверхности паре [2]). Определить условие устойчивости такого режима горения с учетом влияния поля тяжести и капиллярных сил (*Л.Д. Ландау*, 1944).

Р е ш е н и е. Рассматриваем зону горения в паре вблизи поверхности жидкости как поверхность разрыва, но приписываем теперь этой поверхности поверхностное натяжение α. Дальнейшие вычисления полностью аналогичны произведенным в задаче 1 с той лишь разницей, что вместо

---

[1]) Движение, описываемое формулами (6), потенциально; для движения же, описываемого формулами (7), $\operatorname{rot}\mathbf{v}'_2 \neq 0$. Таким образом, движение продуктов горения за возмущенным фронтом оказывается завихренным.

[2]) Речь идет о реакции, происходящей в самом веществе пара, без участия каких-либо посторонних компонент (например, кислорода воздуха), т. е. о реакции самопроизвольного разложения.

граничного условия (3) имеем теперь

$$p_1' - p_2' = -\alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (\rho_1 - \rho_2) g \zeta$$

(средой *1* является жидкость, а средой *2* — сгоревший газ). Условия же (4) и (5) не меняются. Вместо уравнения (9) получаем теперь

$$\Omega^2 (v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + \left[k^2 (v_1 - v_2) + \frac{gk(\rho_1 - \rho_2) + \alpha k^3}{j} \right] v_1 v_2 = 0.$$

Условие устойчивости рассматриваемого режима заключается в требовании, чтобы корни этого уравнения имели отрицательную вещественную часть, т. е. свободный член уравнения должен быть положительным при произвольном k. Это требование приводит к условию устойчивости:

$$j^4 < \frac{4\alpha g \rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Поскольку плотность газообразных продуктов горения мала по сравнению с плотностью жидкости ($\rho_1 \gg \rho_2$), то это условие фактически сводится к неравенству

$$j^4 < 4\alpha g \rho_1 \rho_2^2.$$

3. Определить распределение температуры в газе перед плоским фронтом пламени.

Р е ш е н и е. В системе координат, движущейся вместе с фронтом, распределение температуры стационарно, а газ движется со скоростью $-v_1$. Уравнение теплопроводности

$$\mathbf{v}\nabla T = -v_1 \frac{dT}{dx} = \chi \frac{d^2 T}{dx^2}$$

имеет решение

$$T = T_0 e^{-v_1 x/\chi},$$

где T_0 — температура на фронте пламени, отсчитываемая от температуры вдали от него.

§ 129. Детонация

В описанном выше режиме медленного горения его распространение по газу обусловливается нагреванием, происходящим путем непосредственной передачи тепла от горящего к еще не воспламенившемуся газу. Наряду с таким возможен и совсем иной механизм распространения горения, связанный с ударными волнами. Ударная волна вызывает при своем прохождении нагревание газа — температура газа позади волны выше, чем впереди нее. Если интенсивность ударной волны достаточно велика, то вызываемое ею повышение температуры может оказаться достаточным для того, чтобы в газе могло начаться горение. Ударная волна при своем движении будет тогда как бы поджигать газовую смесь, т. е. горение будет распространяться со скоростью, равной скорости волны, — гораздо быстрее, чем при обычном горении. Такой механизм распространения горения называют *детонацией*.

Когда через некоторое место газа проходит ударная волна, в этом месте начинается реакция, после чего она будет продолжаться здесь до тех пор, пока не сгорит весь газ в этом месте, т. е. в течение некоторого характерного для кинетики данной реакции времени τ [1]). Поэтому ясно, что за ударной волной будет следовать передвигающийся вместе с нею слой, в котором и происходит горение, причем толщина этого слоя равна произведению скорости распространения волны на время τ. Существенно, что она не зависит от размеров тел, фигурирующих в данной конкретной задаче. Поэтому при достаточно больших характерных размерах задачи можно рассматривать ударную волну вместе со следующей за ней областью горения как одну поверхность разрыва, отделяющую сгоревший газ от несгоревшего. О такой «поверхности разрыва» мы будем говорить как о *детонационной волне.*

На детонационной волне должны выполняться условия непрерывности плотностей потоков массы, энергии и импульса и остаются справедливыми все выведенные ранее для ударных волн соотношения (85.1)–(85.10), являющиеся следствием одних только этих условий. Остается, в частности, справедливым уравнение

$$w_1 - w_2 + \frac{V_1 + V_2}{2}(p_2 - p_1) = 0 \qquad (129.1)$$

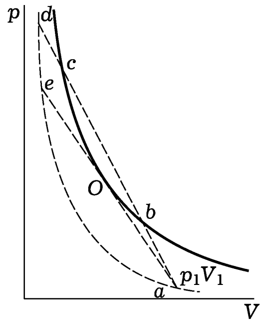


Рис. 132

(буквы с индексом 1 будут везде относиться к исходному, несгоревшему, газу, а с индексом 2 — к продуктам горения). Кривую зависимости p_2 от V_2, определяемую этим уравнением, будем называть *детонационной адиабатой.* В противоположность рассматривавшейся ранее ударной адиабате эта кривая не проходит через исходную заданную точку p_1, V_1. Свойство ударной адиабаты проходить через эту точку было связано с тем, что w_1 и w_2 были одинаковыми функциями соответственно от p_1, V_1 и p_2, V_2, что теперь ввиду химического различия обоих газов не имеет места. На рис. 132 сплошной линией изображена детонационная адиабата. Через точку p_1, V_1 в качестве вспомогательной кривой проведена обычная ударная адиабата для исходной горючей смеси (штриховая кривая). Детонационная адиабата всегда расположена над ударной в связи с тем, что при горении развивается высокая температура и давление газа увеличивается по сравнению с тем, которое имел бы несгоревший газ при том же удельном объеме.

[1]) Это время, однако, само зависит от интенсивности ударной волны; оно быстро убывает с ростом интенсивности волны в связи с увеличением скорости протекания реакции при повышении температуры.

Для плотности потока вещества имеет место прежняя формула (85.6)

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}, \tag{129.2}$$

так что графически — j^2 есть по-прежнему тангенс угла наклона к оси абсцисс хорды, проведенной из точки p_1, V_1 в произвольную точку p_2, V_2 детонационной адиабаты (например, хорда ac на рис. 132). Из чертежа сразу видно, что j^2 не может быть меньше значения, соответствующего наклону касательной aO. Поток j представляет собой не что иное, как количество сгорающего в единицу времени вещества (отнесенное к 1 см^2 поверхности детонационной волны); мы видим, что при детонации это количество не может быть меньше определенного предела $j_{\min}$ (зависящего от начального состояния исходного газа).

Формула (129.2) является следствием одних лишь условий непрерывности потоков массы и импульса. Поэтому уравнение (129.2) справедливо (при заданном исходном состоянии газа) не только для окончательного состояния продуктов горения, но и для всех промежуточных состояний, в которых выделилась еще лишь часть энергии реакции [1]. Другими словами, давление p и удельный объем V вещества во всех этих состояниях связаны друг с другом линейным соотношением

$$p = p_1 + j^2(V_1 - V), \tag{129.3}$$

которое графически изображается точками хорды ad (*В.А. Михельсон*, 1890).

Проследим теперь (следуя *Я.Б. Зельдовичу*, 1940) за ходом изменения состояния вещества вдоль слоя конечной ширины, которым в действительности является детонационная волна. Передний фронт детонационной волны представляет собой истинную ударную волну в газе *1* (исходной горючей смеси). В ней вещество подвергается сжатию и нагреванию, приводящему его в состояние, изображающееся точкой d (рис. 132) на ударной адиабате газа *1*. В сжатом веществе начинается химическая реакция, по мере протекания которой состояние вещества изображается точкой, передвигающейся вниз по хорде da; при этом выделяется тепло, вещество расширяется, а его давление падает. Так продолжается до тех пор, пока не закончится горение и не выделится все тепло реакции. Этому моменту соответствует точка c, лежащая на детонационной адиабате, изображающей конечные состояния продуктов горения. Что же касается нижней точки b

[1]) Здесь предполагается, что диффузией и вязкостью в зоне горения можно пренебречь, так что перенос массы и импульса осуществляется только за счет гидродинамического движения.

пересечения хорды ad с детонационной адиабатой, то она оказывается недостижимой для вещества, в котором горение вызвано его сжатием и разогреванием в ударной волне [1]).

Таким образом, мы приходим к важному результату, что детонации отвечает не вся кривая детонационной адиабаты, а лишь ее верхняя часть, лежащая над точкой O, в которой адиабата касается прямой, проведенной из начальной точки a.

В § 87 было показано, что в точке, где $d(j^2)/dp_2 = 0$ (т. е. хорда *12* касается ударной адиабаты), скорость v_2 совпадает с соответствующим значением скорости звука c_2. Этот результат был получен, исходя из одних только законов сохранения на поверхности разрыва, и потому в полной мере применим и к детонационной волне. На обычной ударной адиабате для одного газа таких точек нет (как это было показано там же). На детонационной же адиабате такая точка имеется — точка O. Одновременно с равенством $v_2 = c_2$ в такой точке имеет место также и неравенство (87.10) $d(v_2/c_2)/dp_2 < 0$, а потому при бóльших p_2, т. е. над точкой O, скорость $v_2 < c_2$. Поскольку детонации соответствует именно верхняя часть адиабаты над точкой O, то мы приходим к результату, что

$$v_2 \ll c_2, \tag{129.4}$$

т. е. детонационная волна движется относительно остающегося непосредственно за нею газа со скоростью, равной или меньшей скорости звука, равенство $v_2 = c_2$ имеет место для детонации, соответствующей точке O (точка *Чепмена–Жуге*) [2]).

Что касается скорости волны относительно газа *1*, то она всегда (в том числе и для точки O) является сверхзвуковой:

$$v_1 > c_1. \tag{129.5}$$

В этом проще всего можно убедиться непосредственно из рис. 132. Скорость звука c_1 графически определяется наклоном касательной к ударной адиабате газа *1* (штриховая кривая) в точке a. Скорость же v_1 определяется наклоном хорды ac. Поскольку все рассматриваемые хорды идут круче указанной касательной, то всегда $v_1 > c_1$. Перемещаясь со сверхзвуковой скоростью, детонационная волна, как и ударная волна, никак не влияет на состояние находящегося перед нею газа. Скорость v_1 перемещения волны относительно исходного неподвижного газа и есть та скорость, о которой надо говорить как о скорости распространения детонации в горючей смеси.

---

[1]) Для полноты рассуждений следует также указать, что скачкообразный переход из состояния c в состояние b в еще одной ударной волне тоже невозможен, так как газ пересекал бы такую волну в направлении от большего давления к меньшему, что невозможно.

[2]) Напомним, что под скоростями v_1, v_2 везде подразумеваются скорости в нормальном к поверхности разрыва направлении.

Поскольку $v_1/V_1 = v_2/V_2 \equiv j$, а $V_1 > V_2$, то $v_1 > v_2$. Разность же $v_1 - v_2$ есть скорость движения продуктов горения относительно несгоревшего газа. Эта разность положительна, т. е. продукты горения движутся в сторону распространения детонационной волны.

Отметим еще следующее обстоятельство. В том же § 87 было показано, что $\dfrac{ds_2}{d(j^2)} > 0$. Поэтому в точке, где j^2 имеет минимум, минимально также и s_2. Такой точкой является как раз точка O, и мы заключаем, что она соответствует наименьшему значению энтропии s_2 на детонационной адиабате. Энтропия s_2 имеет экстремум в точке O также и если следить за изменением состояния вдоль прямой ae (поскольку наклоны кривой и касательной в точке O совпадают). Этот экстремум, однако, является максимумом (*В.А. Михельсон*). Действительно, перемещению от точки e к O соответствует изменение состояния по мере протекания в сжатой смеси реакции горения, сопровождающейся выделением тепла и ростом энтропии; переход же из O в a соответствовал бы эндотермическому превращению продуктов горения в исходное вещество, обладающее меньшей энтропией.

Если детонация вызывается ударной волной, возникшей от какого-либо постороннего источника и падающей на горючую смесь, то такой детонации может соответствовать любая точка, лежащая на верхней части детонационной адиабаты. В особенности интересна, однако, детонация, возникающая самопроизвольно, в результате самого процесса горения. В следующем параграфе мы увидим, что в ряде важных случаев такая детонация непременно должна соответствовать точке Чепмена–Жуге, так что скорость детонационной волны относительно остающихся непосредственно за ней продуктов горения равна как раз скорости звука, а скорость относительно исходного газа $v_1 = jV_1$ имеет наименьшее возможное значение [1].

Выведем теперь соотношения между различными величинами в детонационной волне в политропном газе. Подставляя в общее уравнение (129.1) тепловую функцию в виде

$$w = w_0 + c_pT = w_0 + \frac{\gamma pV}{\gamma - 1},$$

получаем

$$\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1}p_2V_2 - \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}p_1V_1 - V_1p_2 + V_2p_1 = 2q, \tag{129.6}$$

где через $q = w_{01} - w_{02}$ опять обозначена теплота реакции (приведенная к абсолютному нулю температуры). Определяемая этим

[1] Это утверждение было высказано гипотетически *Чепменом* (*D.L. Chapman*, 1899) и *Жуге* (*E. Jouguet*, 1905), а его теоретическое обоснование дано *Я.Б. Зельдовичем* (1940) и затем независимо *Нейманом* (*J. von Neumann*, 1942) и *Дерингом* (*W. Döring*, 1943).

уравнением кривая $p_2(V_2)$ является равнобочной гиперболой. При $p_2/p_1 \to \infty$ отношение плотностей стремится к конечному пределу

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1};$$

это — наибольшее сжатие вещества, которое может быть достигнуто в детонационной волне.

Формулы сильно упрощаются в важном случае сильных детонационных волн, получающихся, когда выделяющаяся теплота реакции велика по сравнению с внутренней тепловой энергией исходного газа, т. е. $q \gg c_{v1}T_1$. В этом случае можно пренебречь в (129.6) членами, содержащими p_1, и получается

$$p_2\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}V_2 - V_1\right) = 2q. \tag{129.7}$$

Рассмотрим более подробно детонацию, соответствующую точке Чепмена–Жуге, представляющую согласно сказанному выше особый интерес. В этой точке имеем

$$j^2 = \frac{c_2^2}{V_2^2} = \frac{\gamma_2 p_2}{V_2}.$$

Из этого соотношения и соотношения (129.2) можно выразить p_2 и V_2 в виде

$$p_2 = \frac{p_1 + j^2V_1}{\gamma_2+1}, \quad V_2 = \frac{\gamma_2(p_1+j^2V_1)}{j^2(\gamma_2+1)}. \tag{129.8}$$

Подставляя теперь эти выражения в уравнение (129.6) и вводя вместо потока j скорость $v_1 = jV_1$, получаем после простого приведения следующее биквадратное уравнение для v_1:

$$v_1^4 - 2v_1^2\left[\left(\gamma_2^2-1\right)q + \left(\gamma_2^2-\gamma_1\right)c_{v1}T_1\right] + \gamma_2^2\left(\gamma_1-1\right)^2 c_{v1}^2T_1^2 = 0$$

(температура введена здесь согласно $T = pV/(c_p - c_v) = pV/(c_v(\gamma-1))$. Отсюда имеем [1])

$$v_1 = \left\{\frac{\gamma_2-1}{2}[(\gamma_2+1)q + (\gamma_1+\gamma_2)c_{v1}T_1]\right\}^{1/2} + \left\{\frac{\gamma_2+1}{2}[(\gamma_2-1)q + (\gamma_2-\gamma_1)c_{v1}T_1]\right\}^{1/2}. \tag{129.9}$$

[1]) Если $x^4 - 2px^2 + q = 0$, то

$$x = \sqrt{p \pm \sqrt{p^2-q}} = \sqrt{\frac{p+\sqrt{q}}{2}} \pm \sqrt{\frac{p-\sqrt{q}}{2}}.$$

Два знака перед корнем соответствуют в данном случае тому, что из точки a можно провести две касательные к детонационной адиабате — одну вверх, как это изображено на рисунке, а другую вниз. Интересующая нас верхняя касательная является более крутой и соответственно этому мы выбираем знак плюс перед корнем.

Эта формула определяет скорость распространения детонации по температуре T_1 исходной газовой смеси.

Перепишем формулы (129.8) в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1^2 + (\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1}{(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2\left[v_1^2 + (\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1\right]}{(\gamma_2 + 1)v_1^2}. \qquad (129.10)$$

Вместе с (129.9) они определят отношения давлений и плотностей продуктов горения и исходного вещества по температуре T_1.

Скорость v_2 вычисляется как $v_2 = v_1 V_2/V_1$ с помощью формул (129.9) и (129.10). В результате вычисления получается

$$v_2 = \left\{\frac{\gamma_2 - 1}{2}[(\gamma_2 + 1)q + (\gamma_1 + \gamma_2)c_{v1}T_1]\right\}^{1/2} + \\ + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1}\left\{\frac{\gamma_2 + 1}{2}[(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1)c_{v1}T_1]\right\}^{1/2}. \qquad (129.11)$$

Разность же $v_1 - v_2$, т. е. скорость сгоревшего газа относительно несгоревшего, равна

$$v_1 - v_2 = \left\{\frac{2[(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1)c_{v1}T_1]}{\gamma_2 + 1}\right\}^{1/2}. \qquad (129.12)$$

Температура продуктов горения вычисляется по формуле

$$c_{v2}T_2 = \frac{v_2^2}{\gamma_2(\gamma_2 - 1)} \qquad (129.13)$$

(напомним, что $v_2 = c_2$).

Все эти довольно сложные формулы очень упрощаются для сильных детонационных волн. В этом случае получаем для скоростей следующие простые формулы:

$$v_1 = \sqrt{2(\gamma_2^2 - 1)q}, \quad v_1 - v_2 = \frac{v_1}{\gamma_2 + 1}. \qquad (129.14)$$

Термодинамическое же состояние продуктов горения определяется формулами

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2(\gamma_2 - 1)}{\gamma_1 - 1}\frac{q}{c_{v1}T_1} = \frac{\gamma_1 v_1^2}{(\gamma_2 + 1)c_1^2}, \\ T_2 = \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + 1}\frac{q}{c_{v2}}. \qquad (129.15)$$

Сравнив формулы (129.15) с аналогичными формулами (128.5) для медленного горения, можно отметить, что в предельном случае $q \gg c_{v1}T_1$ отношение температур продуктов горения,

которые они приняли бы соответственно после медленного горения и после детонации, равно

$$\frac{T_2^{\text{дет}}}{T_2^{\text{гор}}} = \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_2 + 1}.$$

Это отношение всегда больше единицы (так как всегда $\gamma_2 > 1$).

Задача

Определить термодинамические величины газа непосредственно за ударной волной, являющейся передним фронтом сильной детонационной волны, соответствующей точке Чепмена–Жуге.

Решение. Непосредственно за ударной волной имеется еще несгоревшая газовая смесь, и ее состояние изображается точкой e пересечения продолжения касательной aO (рис. 132) с ударной адиабатой (штриховая кривая) газа *1*. Обозначая координаты этой точки через p_1', V_1', имеем, с одной стороны, согласно уравнению (89.1) ударной адиабаты газа *1*:

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{(\gamma_1 + 1)p_1 + (\gamma_1 - 1)p_1'}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_1'}$$

и, с другой стороны,

$$\frac{p_1' - p_1}{V_1 - V_1'} = j^2 = \frac{v_1^2}{V_1^2}.$$

Взяв для v_1 значение из (129.14), получим

$$p_1' = p_1 \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1^2 - 1} \frac{q}{c_{v1}T_1}, \quad V_1' = V_1 \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}, \quad T_1' = \frac{q}{c_{v1}} \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)^2}.$$

Отношение давления p_1' к давлению p_2 позади детонационной волны равно

$$\frac{p_1'}{p_2} = 2\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1 + 1}.$$

§ 130. Распространение детонационной волны

Рассмотрим теперь несколько конкретных случаев распространения детонационных волн в газе, который первоначально покоился. Начнем с детонации в газе, находящемся в трубе, один из концов которой ($x = 0$) закрыт. Граничные условия в этом случае требуют равенства нулю скорости газа как впереди детонационной волны (детонационная волна не влияет на состояние газа, находящегося перед нею), так и на закрытом конце трубы. Поскольку при прохождении детонационной волны газ приобретает отличную от нуля скорость, то в пространстве между волной и закрытым концом трубы должно происходить падение его скорости. Для того чтобы определить возникающую при этом картину движения газа, замечаем, что в рассматриваемой задаче нет никаких параметров длины, которые бы характеризовали условия движения вдоль длины трубы (оси x). Мы видели

в § 99, что в таком случае изменение скорости газа может произойти либо в ударной волне (разделяющей две области постоянной скорости), либо в автомодельной волне разрежения.

Предположим сначала, что детонационная волна не соответствует точке Чепмена–Жуге. Тогда скорость ее распространения относительно остающегося за нею газа $v_2 < c_2$. Легко видеть, что в таком случае за детонационной волной не могут следовать ни ударная волна, ни слабый разрыв (передний фронт волны разрежения). Действительно первая должна перемещаться относительно находящегося перед нею газа со скоростью, превышающей c_2, а второй — со скоростью, равной c_2; в обоих случаях они перегоняли бы детонационную волну. Таким образом, при сделанном предположении оказывается невозможным уменьшить скорость движущегося за детонационной волной газа, т. е. невозможно удовлетворить граничному условию при $x = 0$.

Удовлетворить этому условию можно лишь с детонационной волной, соответствующей точке Чепмена–Жуге. В этом случае $v_2 = c_2$, и за детонационной волной может следовать волна разрежения. Возникнув в точке $x = 0$ одновременно с началом детонации, волна разрежения будет иметь передний фронт совпадающим с детонационной волной.

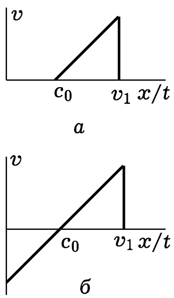


Рис. 133

Таким образом, мы приходим к существенному результату, что детонационная волна, распространяющаяся по трубе в подожженном у ее закрытого конца газе, должна соответствовать точке Чепмена–Жуге. Она движется относительно находящегося непосредственно за нею газа со скоростью, равной местной скорости звука. От самой детонационной волны начинается область волны разрежения, в которой, скорость газа (относительно трубы) монотонно падает до нуля. Точка, в которой скорость впервые обращается в нуль, является слабым разрывом. Позади слабого разрыва газ неподвижен (рис. 133 *а*).

Рассмотрим теперь детонационную волну, распространяющуюся по трубе от открытого ее конца. Давление газа, находящегося перед детонационной волной, должно быть равно первоначальному давлению исходного газа, совпадающему, очевидно, с внешним давлением. Ясно, что и в этом случае где-то позади детонационной волны должно происходить падение скорости. Если бы на всем протяжении от начала трубы до волны скорость газа была постоянной, то это значило бы, что на открытом конце трубы происходит засасывание газа извне; между тем давление газа в трубе было бы выше внешнего (так как за детонационной волной давление выше, чем перед нею), и потому такое засасывание невозможно. По таким же причинам, как и в предыду-

щем случае, детонационная волна должна соответствовать точке Чепмена–Жуге. В результате получается картина движения, схематически изображенная на рис. 133 *б*. Непосредственно за детонационной волной начинается область автомодельной волны разрежения, в которой скорость монотонно падает по направлению к началу трубы, причем меняет в некоторой точке знак. Это значит, что в некотором начальном участке трубы газ будет двигаться в направлении к открытому концу трубы, из которого и будет вытекать наружу; выходная скорость этого вытекания равна местному значению скорости звука, а выходное давление превышает внешнее (мы видели в § 97, что такой режим вытекания возможен) [1].

Рассмотрим, далее, важный случай сферической детонационной волны, расходящейся от точки начального воспламенения газа как из центра (*Я.Б. Зельдович*, 1942). Поскольку газ должен быть неподвижным как впереди детонационной волны, так и вблизи центра, то и здесь скорость газа должна падать по направлению от волны к центру. Как и в случае движения в трубе, здесь также нет никаких заданных характерных параметров размерности длины. Поэтому возникающее движение газа должно быть автомодельным, с той разницей, что роль координаты x играет теперь расстояние r от центра; таким образом, все величины должны быть функциями только отношения r/t [2].

Для центрально-симметричного движения ($v_r = v(r, t)$, $v_\varphi = v_\theta = 0$) уравнения движения имеют следующий вид. Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial r} + \frac{2v\rho}{r} = 0;$$

уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

и уравнение сохранения энтропии:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v\frac{\partial s}{\partial r} = 0.$$

Вводя переменную $\xi = r/t\,(\xi > 0)$ и считая, что все величины являются функциями только ξ, получим следующую систему

---

[1]) Мы везде полностью отвлекаемся от тепловых потерь, которыми может сопровождаться распространение детонационной волны. Как и в случае медленного горения, эти потери могут сделать распространение детонации невозможным. При детонации в трубе источником потерь являются в первую очередь отвод тепла через стенки трубы и замедление газа благодаря трению.

[2]) Безразмерную автомодельную переменную в этой задаче можно определить как $r/(t\sqrt{q})$, где характерный постоянный параметр q — теплота реакции на единицу массы.

уравнений:

$$(\xi - v)\frac{\rho'}{\rho} = v' + \frac{2v}{\xi}, \tag{130.1}$$

$$(\xi - v)v' = \frac{p'}{\rho}, \tag{130.2}$$

$$(\xi - v)s' = 0 \tag{130.3}$$

(штрих означает дифференцирование по ξ). Положить здесь $v = \xi$ нельзя, так как это противоречит первому уравнению. Поэтому из третьего сразу имеем $s' = 0$, т. е.

$$s = \text{const}.$$

Имея в виду постоянство энтропии, можем написать $p' = c^2\rho'$, и уравнение (130.2) приобретает вид

$$(\xi - v)v' = c^2\frac{\rho'}{\rho}. \tag{130.4}$$

Подставив сюда ρ'/ρ из (130.1), получаем следующее соотношение:

$$\left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1\right]v' = \frac{2v}{\xi}. \tag{130.5}$$

Уравнения (130.4) и (130.5) не могут быть проинтегрированы в аналитическом виде, но свойства их решения могут быть исследованы.

Область, в которой газ совершает движение рассматриваемого типа, ограничена, как мы увидим ниже, двумя сферами, из которых наружная представляет собой поверхность самой детонационной волны, а внутренняя является поверхностью слабого разрыва, причем скорость обращается на ней в нуль.

Изучим прежде всего свойства решения вблизи точки, где v обращается в нуль. Легко видеть, что в точке, где $v = 0$, непременно должно быть одновременно $\xi = c$:

$$v = 0, \quad \xi = c. \tag{130.6}$$

Действительно, при стремлении v к нулю $\ln v$ стремится к $-\infty$; поэтому, когда ξ, уменьшаясь, стремится к значению, соответствующему внутренней границе рассматриваемой области, производная $d\ln v/d\xi$ должна стремиться к $+\infty$. Между тем из (130.5) имеем при $v = 0$

$$\frac{d\ln v}{d\xi} = \frac{2}{\xi(\xi^2/c^2 - 1)}.$$

Это выражение может стремиться к $+\infty$ лишь при $\xi \to c$.

В самом начале координат радиальная скорость должна обратиться в нуль уже непосредственно в силу симметрии. Таким

образом, вокруг начала координат будет находиться область неподвижного газа (область внутри сферы $\xi = c_0$, где c_0 — значение скорости звука при $v = 0$).

Выясним свойства функции $v(\xi)$ вблизи точки (130.6). Из (130.5) имеем

$$v\frac{d\xi}{dv} = \frac{\xi}{2}\left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1\right].$$

С точностью до величин первого порядка малости (каковыми являются v, $\xi - c_0$, $c - c_0$) получаем после простого вычисления:

$$v\frac{d(\xi - c_0)}{dv} = (\xi - c_0) - (v + c - c_0).$$

Согласно (102.1) имеем $v + c - c_0 = \alpha_0 v$, где α_0 — положительная постоянная (значение величины (102.2) при $v = 0$), и мы получаем для $\xi - c_0$ как функции v следующее линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$v\frac{d(\xi - c_0)}{dv} - (\xi - c_0) = -\alpha_0 v.$$

Решение этого уравнения есть

$$\xi - c_0 = \alpha_0 v \ln\frac{\text{const}}{v}. \tag{130.7}$$

Этим определяется в неявном виде функция $v(\xi)$ вблизи точки, где $v = 0$.

Мы видим, что внутренняя граница является поверхностью слабого разрыва; скорость обращается на ней в нуль, не испытывая скачка. Кривая зависимости $v(\xi)$ имеет на этой границе горизонтальную касательную ($dv/d\xi = 0$). Мы имеем здесь дело со слабым разрывом весьма своеобразного типа: первая производная на нем непрерывна, а все производные высших порядков обращаются в бесконечность (в чем легко убедиться на основании (130.7)). Отношение r/t при $v = 0$ есть, очевидно, не что иное, как скорость перемещения границы области относительно газа; согласно (130.6) она равна местному значению скорости звука, как и должно быть для слабого разрыва.

Далее имеем при малых v согласно (130.7):

$$\xi - v - c = (\xi - c_0) - (v + c - c_0) = \alpha_0 v\left(\ln\frac{\text{const}}{v} - 1\right).$$

Эта величина при малых v положительна:

$$\xi - v - c > 0.$$

Покажем, что нигде внутри области рассматриваемого движения разность $(\xi - v) - c$ не может изменить знак. Рассмотрим точку, в которой было бы

$$\xi - v = c, \quad v \neq 0. \tag{130.8}$$

Из (130.5) видно, что в такой точке производная v' должна обратиться в бесконечность, т. е.

$$\frac{d\xi}{dv} = 0. \tag{130.9}$$

Что касается второй производной $d^2\xi/dv^2$, то простое вычисление дает для нее (при условиях (130.8) и (130.9)) значение

$$\frac{d^2\xi}{dv^2} = -\frac{\alpha_0}{c_0}\frac{\xi}{v},$$

отличное от нуля. Но это значит, что в рассматриваемой точке ξ как функция v имеет максимум. Иначе можно сказать, что функция $v(\xi)$ существует лишь при ξ, лежащих только по нижнюю сторону от значения, соответствующего условиям (130.8); это значение является второй границей, за которую не может простираться рассматриваемая область. Из того, что $\xi - v - c$ может обратиться в нуль только на границе области, а при малых v во всяком случае $\xi - v - c > 0$, мы заключаем, что

$$\xi - v > c \tag{130.10}$$

везде внутри этой области.

Теперь уже легко видеть, что реальная передняя граница области рассматриваемого движения должна совпадать с точкой, где выполняются условия (130.8). Для этого замечаем, что разность $r/t - v$, где r — координата границы, есть не что иное, как скорость перемещения этой границы относительно остающегося за ней газа. Но поверхность, на которой $r/t - v > c$, не может быть поверхностью детонационной волны (на которой должно быть $r/t - v \leqslant c$). Поэтому мы приходим к результату, что передней границей рассматриваемой области может быть только точка, в которой имеет место (130.8). На этой границе v падает скачком до нуля, а скорость ее распространения относительно остающегося непосредственно за нею газа равна местной скорости звука. Это значит, что детонационная волна должна соответствовать точке Чепмена–Жуге детонационной адиабаты [1].

Мы приходим к следующей картине движения газа при сферическом распространении детонации. Детонационная волна, как и при детонации в трубе, соответствует точке Чепмена–Жуге. Непосредственно за нею начинается область сферической автомодельной волны разрежения, в которой скорость газа падает до нуля. Падение происходит монотонно, так как согласно (130.5) производная $dv/d\xi$ может обратиться в нуль лишь в той точке, где одновременно $v = 0$. Вместе со скоростью монотонно

[1]) Отметим для полноты рассуждений, что $v = \text{const}$ не является решением уравнений центрально-симметрического движения. Поэтому за детонационной волной не может следовать область постоянной скорости.

убывают также и давление и плотность газа (согласно (130.4) и (130.10) производная p' имеет везде тот же знак, что и v'). Кривая зависимости v от r/t имеет на передней границе вертикальную (согласно (130.9)), а на внутренней — горизонтальную касательную (рис. 134). Внутренняя граница является слабым разрывом, вблизи которого зависимость v от r/t определяется уравнением (130.7). Внутри сферы, ограниченной поверхностью слабого разрыва, газ неподвижен. Общее количество (по массе) неподвижного вещества, однако, весьма незначительно (ср. соображения, приведенные в конце § 106).

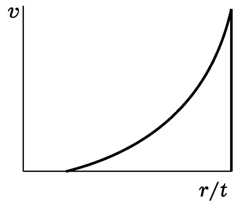


Рис. 134

Таким образом, во всех рассмотренных типичных случаях самопроизвольного одномерного и сферического распространения детонации граничные условия в области позади детонационной волны приводят к однозначному отбору скорости последней, соответствующему точке Чепмена–Жуге (после того, как вся область детонационной адиабаты ниже этой точки была исключена по соображениям, изложенным в § 129). Осуществление в трубе постоянного сечения детонации, соответствующей расположенной выше этой точки части адиабаты, требовало бы искусственного поджатия продуктов горения движущимся со сверхзвуковой скоростью поршнем (см. задачу 3 к этому параграфу); о таких детонационных волнах говорят как о *пережатых.*

Подчеркнем, однако, что эти выводы не имеют универсального характера, и можно представить себе случаи самопроизвольного возникновения пересжатой детонационной волны. Так, пересжатая волна возникает при переходе детонации из широкой трубки в узкую; это явление связано с тем, что когда детонационная волна доходит до места сужения, происходит ее частичное отражение, в результате чего давление продуктов горения, втекающих из широкой в узкую часть трубы, резко возрастает — ср. задачу 4 (*Б.В. Айвазов*, *Я.Б. Зельдович*, 1947) [1]).

По поводу изложенной в этом и предыдущем параграфах теории необходимо сделать следующее общее замечание. Структура детонационной волны предполагается в ней стационарной и однородной по ее площади; она одномерна в том смысле, что распределение всех величин в зоне горения предполагается зависящим только от одной координаты — вдоль ее ширины. Накопленные к настоящему времени экспериментальные данные свидетельствуют, однако, о том, что такая картина представляет

[1]) Пересжатость возникает также при распространении сходящейся цилиндрической или сферической детонационной волны — см. *Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 782.

собой далеко идущую идеализацию, которая могла бы служить лишь для некоторого усредненного описания процесса; реально наблюдаемая картина обычно существенно от нее отличается. Фактически структура детонационной волны существенно нестационарна и существенно трехмерна; волна имеет вдоль своей площади мелкомасштабную, быстро меняющуюся со временем сложную структуру. Ее возникновение представляет собой результат неустойчивости, связанной прежде всего с сильной (экспоненциальной) температурной зависимостью скорости реакции — уже небольшие изменения температуры при искажении формы ударного фронта сильно отражаются на ходе реакции; эта неустойчивость выражена тем сильнее, чем больше отношение активационной энергии реакции к температуре газа (за ударной волной). В особенности наглядно неоднородность и нестационарность структуры детонационной волны проявляется в условиях, близких к пределу распространения детонации в трубе: воспламенение горючей смеси происходит в основном лишь за одиночными эксцентрично расположенными (и движущимися по спирали) резко деформированными участками ударного фронта (в таких случаях говорят о *спиновой детонации*). Разбор возможных механизмов всех этих сложных явлений не входит в задачу этой книги [1]).

Задачи

1. Определить движение газа при распространении детонационной волны по трубе от закрытого ее конца.

Решение. Скорости детонационной волны относительно находящегося перед нею неподвижного газа v_1 и относительно остающегося непосредственно за нею сгоревшего газа v_2 определяются по температуре T_1 по формулам (129.11), (129.12); v_1 есть в то же время скорость перемещения волны относительно трубы, так что ее координата определяется как $x = v_1 t$. Скорость (относительно трубы) продуктов горения на детонационной волне равна $v_1 - v_2$. Скорость же v_2 совпадает с местной скоростью звука. Поскольку в автомодельной волне разрежения скорость звука связана со скоростью газа v через $c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}v$, то имеем

$$v_2 = c_0 + \frac{\gamma_2 - 1}{2}(v_1 - v_2),$$

откуда

$$c_0 = \frac{\gamma_2 + 1}{2}v_2 - \frac{\gamma_2 - 1}{2}v_1.$$

Для сильной детонационной волны с помощью (129.14) получаем просто $c_0 = v_1/2$. Величина c_0 и есть скорость перемещения задней границы вол-

[1]) Дадим лишь ссылки на некоторые книги и обзорные статьи: *Щелкин К.И.*, *Трошин Я.Г.* Газодинамика горения. — М.: Наука, 1963; *Солоухин Р.И.* Ударные волны и детонация. — М.: Наука, 1963; *Солоухин Р.И.* // УФН. 1963. Т. 80. С. 526; *Oppenheim A.K.*, *Soloukhin R.I.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1973. V. 6. P. 31.

ны разрежения. Между обеими границами скорость меняется по линейному закону (рис. 133 *а*).

2. То же для трубы с открытым концом.

Р е ш е н и е. Скорости v_1 и v_2 определяют так же, как и в предыдущем случае; поэтому той же оказывается и скорость c_0. Область волны разрежения простирается, однако, теперь не до точки, где $v = 0$, а до самого начала трубы ($x = 0$, рис. 133 *б*). Из формулы $x/t = v + c$ (99.5) видим, что газ вытекает из отверстия трубы со скоростью $v = -c$, равной местной скорости звука. Написав

$$-v = c = c_0 + \frac{\gamma_2 - 1}{2}v,$$

получим поэтому для скорости вытекания газа следующее значение:

$$-v\Big|_{x=0} = \frac{2c_0}{\gamma_2 + 1}.$$

Для сильной детонационной волны эта скорость равна $v_1/(\gamma_2 + 1)$ и по величине совпадает со скоростью газа непосредственно за волной.

3. То же при распространении детонационной волны от конца трубы, закрытого поршнем, начинающим в начальный момент времени двигаться вперед с постоянной скоростью U.

Р е ш е н и е. Если $U < v_1$, то распределение скорости в газе имеет вид, изображенный на рис. 135 *а*. Скорость газа падает от значения $v_1 - v_2$ при $x/t = v_1$ до значения U при

$$\frac{x}{t} = c_0 + \frac{\gamma_2 + 1}{2}U$$

с прежним значением c_0. Дальше следует область газа, движущегося с постоянной скоростью U.

Если же $U > v_1$, то детонационная волна уже не может соответствовать точке Жуге (поршень «обгонял» бы ее). В этом случае возникает «пересжатая» детонационная волна, соответствующая точке на адиабате, расположенной выше точки Жуге. Она определяется тем, что скачок скорости в ней должен быть равен как раз скорости поршня: $v_1 - v_2 = U$. Во всей области между детонационной волной и поршнем газ движется с постоянной скоростью U (рис. 135 *б*).

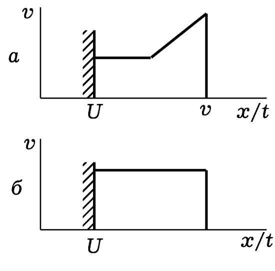


Рис. 135

4. Определить давление, возникающее у абсолютно твердой стенки при отражении падающей на нее в нормальном направлении плоской сильной детонационной волны (*К.П. Станюкович*, 1946).

Р е ш е н и е. При падении детонационной волны на стенку возникает отраженная ударная волна, распространяющаяся в обратном направлении по продуктам горения. Вычисления в точности аналогичны произведенным в задаче 1 § 100. С теми же обозначениями, что и там, имеем в данном случае три соотношения:

$$p_2(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3),$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}, \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma_2 + 1)p_2 + (\gamma_2 - 1)p_3}{(\gamma_2 - 1)p_2 + (\gamma_2 + 1)p_3}$$

(мы пренебрегаем p_1 по сравнению с p_2, но p_2 и p_3 — одного порядка величины). Исключая объемы, получим для p_3 квадратное уравнение, причем

должен быть выбран тот из его корней, для которого $p_3 > p_2$;

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{5\gamma_2 + 1 + \sqrt{17\gamma_2^2 + 2\gamma_2 + 1}}{4\gamma_2}.$$

Отметим, что это отношение почти не зависит от значения γ_2, меняясь всего в пределах от 2,6 до 2,3 при изменении γ_2 от 1 до ∞.

§ 131. Соотношение между различными режимами горения

В § 129 было показано, что детонации соответствуют точки на верхней части детонационной адиабаты для данного процесса горения. Поскольку уравнение этой адиабаты есть следствие одних лишь необходимых законов сохранения массы, импульса и энергии (примененных к начальному и конечному состояниям горящего газа), то ясно, что на эту же кривую должны лечь точки, изображающие состояние продуктов реакции также и при всяком другом режиме горения, в котором зону горения можно рассматривать как некоторую «поверхность разрыва». Выясним теперь, каков именно физический смысл остальных участков этой кривой.

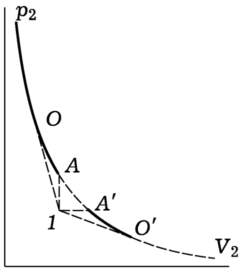


Рис. 136

Проведем через точку p_1, V_1 (точка *1* на рис. 136) вертикальную и горизонтальную прямые *1A* и *1A′* и две касательные *1O* и *1O′* к адиабате. Точки A, A', O, O' касания или пересечения этих прямых с кривой разделят адиабату на пять частей. Часть кривой, лежащая над точкой O, соответствует, как указано, детонации. Рассмотрим теперь другие участки кривой.

Прежде всего легко видеть, что участок AA' вовсе не имеет никакого физического смысла. Действительно, на этом участке имеем $p_2 > p_1$, $V_2 > V_1$, и поэтому поток вещества j оказался бы мнимым (ср. (129.2)).

В точках касания O и O' производная $d(j^2)/dp_2$ обращается в нуль; уже было указано в § 129 (со ссылкой на § 87), что в таких точках имеют одновременно место равенство $v_2 = c_2$ и неравенство $d(v_2/c_2)/dp_2 < 0$. Отсюда следует, что над точками касания $v_2 < c_2$, а под ними $v_2 > c_2$. Что касается взаимоотношения между скоростями v_1 и c_1, то его всегда легко установить из рассмотрения наклона соответствующих хорд и касательных, подобно тому как это было сделано в § 129 для участка кривой над точкой O. В результате такого рассмотрения найдем, что на отдельных участках адиабаты имеют место следующие

неравенства:

$$\begin{aligned} &\text{над точкой } O: && v_1 > c_1, && v_2 < c_2;\\ &\text{на отрезке } AO: && v_1 > c_1, && v_2 > c_2;\\ &\text{на отрезке } A'O': && v_1 < c_1, && v_2 < c_2;\\ &\text{под точкой } O': && v_1 < c_1, && v_2 > c_2. \end{aligned} \tag{131.1}$$

В точках O и O' имеем $v_2 = c_2$. При приближении к точке A поток j, а вместе с ним и скорости v_1, v_2 стремятся к бесконечности. При приближении же к точке A' поток j и скорости v_1, v_2 стремятся к нулю.

В § 88 было введено понятие об эволюционности ударных волн как о необходимом условии возможности их осуществления. Мы видели, что этот критерий устанавливается сравнением числа параметров, определяющих возмущение, и числом граничных условий, которым оно должно удовлетворять на самой поверхности разрыва.

Все эти соображения можно применить и к рассматриваемым здесь «поверхностям разрыва». В частности, остается в силе и произведенный в § 88 подсчет числа параметров возмущения для каждого из четырех случаев (131.1), представленный на рис. 57. Для детонационного режима (адиабата над точкой O) число граничных условий такое же, как и для обычной ударной волны, и условие эволюционности остается прежним. Для недетонационного режима (адиабата под точкой O) ситуация меняется ввиду изменения числа граничных условий. Дело в том, что в таком режиме горения скорость его распространения целиком определяется свойствами самой химической реакции и условиями теплопередачи из зоны горения в находящуюся перед ней ненагретую газовую смесь. Это значит, что поток вещества j через зону горения равен определенной заданной величине (точнее, определенной функции состояния исходного газа *1*), между тем как в ударной или детонационной волне j может иметь произвольное значение. Отсюда следует, что на разрыве, представляющем зону недетонационного горения, число граничных условий на единицу больше, чем на ударной волне, — добавляется условие определенного значения j. Всего, таким образом, оказывается четыре условия, и тем же образом, как это было сделано в § 87, заключаем теперь, что абсолютная неустойчивость разрыва имеет место лишь в случае $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$, изображающемся точками на участке адиабаты под точкой O'. Мы приходим к выводу, что этот участок кривой не соответствует каким бы то ни было реально осуществляющимся режимам горения.

Участок $A'O'$ адиабаты, на котором обе скорости v_1 и v_2 — дозвуковые, соответствует обычному режиму медленного горения. Увеличению скорости горения j соответствует на участке

$A'O'$ адиабаты перемещение от точки A' (в которой $j = 0$) к O'. Написанные в § 128 формулы (128.5) соответствуют точке A' (в которой $p_1 = p_2$) и применимы постольку, поскольку j достаточно мало, т. е. поскольку скорость распространения горения мала по сравнению со скоростью звука. Точка же O' отвечает предельному «наиболее быстрому» режиму рассматриваемого типа. Выпишем здесь формулы, относящиеся к этому предельному случаю.

Точка O', как и точка O, есть точка касания кривой с проведенной из точки *1* касательной. Поэтому формулы, относящиеся к точке O', можно получить непосредственно из формул (129.8)–(129.11), относящихся к точке O, сделав в них лишь соответствующую перемену знака (см. сноску на с. 673). Именно, в формулах (129.9) и (129.11) для v_1 и v_2 надо изменить знак перед вторым корнем, в связи с чем меняет знак также и выражение (129.12) для $v_1 - v_2$. Формулы (129.10) остаются неизменными, если понимать в них под v_1 новое значение. Все эти формулы сильно упрощаются в том случае, когда теплота реакции велика ($q \gg c_{v1}T_1$). Тогда получим

$$v_1 = \frac{\gamma_2 p_1 V_1}{\sqrt{2(\gamma_2^2 - 1)q}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2(\gamma_2 - 1)q}{\gamma_2 + 1}},$$
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma_2 + 1}, \quad c_{v2}T_2 = \frac{2q}{\gamma_2(\gamma_2 + 1)}. \tag{131.2}$$

Необходимо сделать здесь следующую оговорку. Мы видели, что при медленном горении в закрытой трубе впереди зоны горения непременно возникает ударная волна. При больших скоростях горения интенсивность этой волны велика и она существенным образом меняет состояние подходящей к зоне горения газовой смеси. Поэтому не имеет, собственно говоря, смысла следить за изменением режима горения при увеличении его скорости для заданного состояния p_1, V_1 исходной горючей смеси. Для того чтобы достигнуть точки O', необходимо создать такие условия горения, при которых бы не возникала ударная волна. Это можно, например, осуществить при горении в открытой с обеих сторон трубе, причем с заднего конца производится непрерывный отсос продуктов горения. Скорость отсоса должна быть подобрана так, чтобы зона горения оставалась неподвижной, и потому не возникала бы ударная волна [1]).

[1]) Обычное медленное горение в трубе может самопроизвольно перейти в детонацию. Этому предшествует самопроизвольное ускорение распространения пламени, а детонационная волна возникает впереди последнего. Обсуждение возможных механизмов этих процессов можно найти в указанных на с. 664, 682 книгах.

Участок AO адиабаты отвечает недетонационному режиму горения, распространяющемуся со сверхзвуковой скоростью. Оно может, в принципе, возникнуть при наличии очень хороших условий теплопередачи (например, путем лучистой теплопроводности), приводящих к скоростям горения j, превышающим значение, соответствующее точке O'.

В заключение обратим внимание на следующие общие отличия (помимо отличий, заключенных в неравенствах (131.1)) между режимами, изображающимися соответственно верхней и нижней частями адиабаты. Выше точки A имеем

$$p_2 > p_1, \quad V_2 < V_1, \quad v_2 < v_1.$$

Другими словами, продукты реакции сжаты до более высоких давления и плотности, чем исходное вещество, и движутся вслед за фронтом горения (со скоростью $v_1 - v_2$). В области же ниже точки A имеем обратные неравенства:

$$p_2 < p_1, \quad V_2 > V_1, \quad v_2 > v_1;$$

продукты горения разрежены по сравнению с исходным веществом.

§ 132. Конденсационные скачки

Формальным сходством с детонационными волнами обладают *конденсационные скачки*, возникающие при движении газа, содержащего, например, пересыщенный водяной пар [1]). Эти скачки представляют собой результат внезапной конденсации паров, причем процесс конденсации происходит очень быстро в узкой зоне, которую можно рассматривать как некоторую поверхность разрыва, отделяющую исходный газ от «тумана» — газа, содержащего конденсированные пары. Подчеркнем, что конденсационные скачки представляют собой самостоятельное физическое явление, а не результат сжатия газа в обычной ударной волне; последнее вообще не может привести к конденсации паров, так как эффект увеличения давления в ударной волне перекрывается в смысле его влияния на степень пересыщения обратным эффектом повышения температуры.

Как и реакция горения, конденсация пара представляет собой экзотермический процесс. Роль теплоты реакции q играет при этом количество тепла, выделяющегося при конденсации пара, заключенного в единице массы газа [2]). Конденсационная

---

[1]) Их теоретическое изучение начато *Осватичем* (*K. Oswatitsch*, 1942) и *С.З. Беленьким* (1945).

[2]) Теплота q не совпадает, строго говоря, с обычной скрытой теплотой конденсации, так как совершающийся в зоне конденсации процесс включает в себя не только изотермическую конденсацию пара, но и некоторое общее изменение температуры газа. Однако если степень пересыщения пара не слишком мала (как это обычно и имеет место), то эта разница несущественна.

адиабата, определяющая зависимость p_2 от V_2 при заданном состоянии p_1, V_1 исходного газа с неконденсированными парами, выглядит так же, как и изображенная на рис. 136 адиабата для реакции горения. Взаимоотношение между скоростями распространения скачка v_1, v_2 и скоростями звука c_1, c_2 на различных участках конденсационной адиабаты определяется неравенствами (131.1). Однако не все из перечисленных в (131.1) четырех случаев могут реально осуществиться.

Прежде всего возникает вопрос об эволюционности конденсационных скачков. В этом отношении их свойства полностью аналогичны свойствам разрывов, представляющих зону горения. Мы видели (§ 131), что отличие устойчивости последних от устойчивости обычных ударных волн связано с наличием одного дополнительного условия (заданное значение потока j), которое должно выполняться на их поверхности. В данном случае тоже имеется одно дополнительное условие — термодинамическое состояние газа *1* перед скачком должно быть как раз тем, которое соответствует началу быстрой конденсации пара (это условие представляет собой определенное соотношение между давлением и температурой газа *1*). Поэтому сразу можно заключить, что весь участок адиабаты под точкой O', на котором $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$ исключается как не соответствующий устойчивым скачкам.

Легко видеть, что не могут реально осуществляться также и скачки, соответствующие участку над точкой O ($v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$). Такой скачок перемещался бы относительно находящегося перед ним газа со сверхзвуковой скоростью, а потому его возникновение никак не отражалось бы на состоянии этого газа. Это значит, что скачок должен был бы возникнуть вдоль поверхности, заранее определяемой условиями обтекания (поверхность, на которой при непрерывном течении достигались бы необходимые условия начала быстрой конденсации). С другой стороны, скорость скачка относительно остающегося позади него газа в данном случае была бы дозвуковой. Но уравнения дозвукового движения не имеют, вообще говоря, решений, в которых все величины принимают заранее определенные значения на произвольно заданной поверхности [1]).

Таким образом, оказываются возможными конденсационные скачки всего двух типов: 1) сверхзвуковые скачки (отрезок AO

[1]) Аналогичные соображения остаются в силе и в том случае, когда полная скорость $\mathbf{v}_2$ (от которой $v_2 < c_2$ есть нормальная к скачку компонента) является сверхзвуковой.

Во избежание недоразумений отметим, что конденсационный скачок с $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$ может на практике (в определенных условиях влажности и формы обтекаемой поверхности) имитироваться истинным конденсационным скачком с $v_1 > c_1$, $v_2 > c_2$ и следующей близко за ним ударной волной, переводящей течение в дозвуковое.

адиабаты), на которых

$$v_1 > c_1, \quad v_2 > c_2, \quad p_2 > p_1, \quad V_2 < V_1 \tag{132.1}$$

и конденсация сопровождается в них сжатием вещества; 2) дозвуковые скачки (отрезок $A'O'$ адиабаты), на которых

$$v_1 < c_1, \quad v_2 < c_2, \quad p_2 < p_1, \quad V_2 > V_1 \tag{132.2}$$

и конденсация сопровождается разрежением газа.

Значение потока j (скорости конденсации) монотонно возрастает вдоль отрезка $A'O'$ от точки A' (в которой $j = 0$) к точке O', а вдоль отрезка AO — монотонно падает от A (где $j = \infty$) к O. Интервал же значений j (а с ним и соответствующий интервал значений скорости $v_1 = jV_1$) между теми, которые j принимает в точках O и O', является «запрещенным» и не может быть осуществлен в конденсационных скачках. Общее количество (масса) конденсирующегося пара обычно весьма мало по сравнению с количеством основного газа. Поэтому можно с одинаковым правом рассматривать оба газа *1* и *2* как идеальные; по этой же причине можно считать одинаковыми теплоемкости обоих газов. Тогда значение v_1 в точке O определится формулой (129.9), а в точке O' — такой же формулой с обратным знаком перед вторым корнем; положив в этих формулах $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ и введя скорость звука c_1 согласно $c_1^2 = \gamma(\gamma - 1)c_v T_1$, найдем следующий запрещенный интервал значений v_1:

$$\sqrt{c_1^2 + \frac{\gamma^2 - 1}{2}q} - \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{2}q} < v_1 < \\ < \sqrt{c_1^2 + \frac{\gamma^2 - 1}{2}q} + \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{2}q}. \tag{132.3}$$

З а д а ч а

Определить предельные значения отношения давлений p_2/p_1 в конденсационном скачке, считая, что $q/c_1^2 \ll 1$.

Р е ш е н и е. На участке $A'O'$ конденсационной адиабаты (рис. 136) отношение p_2/p_1 монотонно возрастает по направлению от O' к A', пробегая значения в интервале

$$1 - \gamma\sqrt{\frac{2(\gamma - 1)q}{(\gamma + 1)c_1^2}} \leqslant \frac{p_2}{p_1} \leqslant 1.$$

На участке же AO это отношение возрастает по направлению от A к O, пробегая значения в интервале

$$1 + \frac{\gamma(\gamma - 1)q}{c_1^2} \leqslant \frac{p_2}{p_1} \leqslant 1 + \gamma\sqrt{\frac{2(\gamma - 1)q}{(\gamma + 1)c_1^2}}.$$

Г Л А В А XV

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

§ 133. Тензор энергии-импульса жидкости

Необходимость в учете релятивистских эффектов в гидродинамике может быть связана не только с большой (сравнимой со скоростью света) скоростью макроскопического движения жидкости. Гидродинамические уравнения существенно меняются и в том случае, когда эта скорость не велика, но велики скорости микроскопического движения составляющих жидкость частиц.

Для вывода релятивистских уравнений гидродинамики необходимо прежде всего установить вид 4-тензора энергии-импульса движущейся жидкости T^{ik} [1]). Напомним, что $T^{00} = T_{00}$ есть плотность энергии, $T^{0\alpha}/c = -T_{0\alpha}/c$ — плотность компонент импульса, величины $T^{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ составляют тензор плотности потока импульса, плотность же потока энергии $cT^{0\alpha}$ отличается от плотности импульса лишь множителем c^2.

Поток импульса через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности тела [2]) есть не что иное, как действующая на этот элемент сила. Поэтому $T^{\alpha\beta}df_\beta$ есть α-я компонента силы, действующей на элемент поверхности. Рассмотрим некоторый элемент объема жидкости и воспользуемся системой отсчета, в которой он покоится (*локальная собственная система отсчета*, или *локальная система покоя*; значения величин в ней называют *собственными*). В такой системе отсчета справедлив закон Паскаля, т. е. давление, оказываемое данным участком жидкости одинаково по всем направ-

---

[1]) Содержание этого параграфа в значительной степени повторяет содержание § 35 т. II и приводится здесь для связности изложения.

Принятые в этой главе обозначения соответствуют обозначениям в т. II. Латинские индексы $i, k, l, \ldots$ пробегают значения 0, 1, 2, 3, причем $x^0 = ct$ — временная координата (в этой главе c — скорость света). Первые буквы греческого алфавита $\alpha, \beta, \ldots$ в индексах пробегают значения 1, 2, 3, отвечающие пространственным координатам. Галилеевой метрике (специальная теория относительности) отвечает метрический тензор с компонентами $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$.

[2]) Для трехмерного вектора $d\mathbf{f}$ (и вектора скорости $\mathbf{v}$ ниже) в декартовых координатах нет необходимости различать контра- и ковариантные компоненты, и мы пишем их везде с индексами внизу. То же самое относится к трехмерному единичному тензору $\delta_{\alpha\beta}$.

лениям и везде перпендикулярно к площадке, на которую оно производится. Поэтому можно написать $T^{\alpha\beta} df_\beta = p\, df_\alpha$, откуда

$$T_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}.$$

Что касается компонент $T^{0\alpha}$, представляющих плотность импульса, то в локальной собственной системе отсчета они равны нулю. Компонента же T^{00} равна собственной плотности внутренней энергии жидкости, которую мы будем обозначать в этой главе буквой e.

Таким образом, в локальной системе покоя тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \qquad (133.1)$$

Легко найти теперь выражение T^{ik} в любой системе отсчета. Для этого введем 4-скорость u^i движения жидкости. В локальной системе покоя ее компоненты: $u^0 = 1$, $u^\alpha = 0$. Выражение для T^{ik}, обращающееся в (133.1) при этих значениях u^i, есть

$$T^{ik} = wu^iu^k - pg^{ik}, \qquad (133.2)$$

гдо $w = e + p$ — тепловая функция единицы объема. Это и есть искомое выражение тензора энергии-импульса [1]).

Компоненты T^{ik}, написанные в трехмерном виде, равны

$$T^{\alpha\beta} = \frac{wv_\alpha v_\beta}{c^2(1 - v^2/c^2)} + p\delta_{\alpha\beta},$$
$$T^{0\alpha} = \frac{wv_\alpha}{c(1 - v^2/c^2)}, \quad T^{00} = \frac{w}{1 - v^2/c^2} - p = \frac{e + pv^2/c^2}{1 - v^2/c^2}. \qquad (133.3)$$

Нерелятивистскому случаю соответствуют малые скорости $v \ll c$ и малые скорости внутреннего (микроскопического) движения частиц в жидкости. При совершении предельного перехода следует иметь в виду, что релятивистская внутренняя энергия e содержит в себе также и энергию покоя nmc^2 составляющих жидкость частиц (m — масса покоя отдельной частицы). Кроме того, надо учесть, что плотность числа частиц n отнесена к единице собственного объема; в нерелятивистских же выражениях плотность энергии относится к единице объема в «лабораторной» системе отсчета, в который данный элемент жидкости движется.

[1]) Во всех формулах в этой главе под термодинамическими величинами понимаются их собственные значения. Такие величины, как e, w (и плотность энтропии σ ниже) отнесены к единице объема в локальной системе покоя.

Поэтому при предельном переходе надо заменить

$$mn \to \rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \rho - \frac{\rho v^2}{2c^2},$$

где ρ — обычная нерелятивистская плотность массы. По сравнению с ρc^2 мала как нерелятивистская плотность энергии (обозначим ее через $\rho\varepsilon$), так и давление.

Имея все это в виду, найдем, что предельное значение

$$T_{00} = \rho c^2 + \rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2},$$

т. е. совпадает, за вычетом ρc^2, с нерелятивистской плотностью энергии. Соответствующее предельное значение тензора $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + p\delta_{\alpha\beta},$$

т. е. совпадает, как и следовало, с обычным выражением для плотности потока импульса, который мы обозначали в § 7 символом $\Pi_{\alpha\beta}$.

Простая связь между плотностью импульса и плотностью потока энергии (отличие в множителе c^2) теряется в нерелятивистском пределе благодаря тому, что в нерелятивистскую энергию не включается энергия покоя. Действительно, компоненты $T^{0\alpha}/c$ образуют трехмерный вектор, приближенно равный

$$\rho\mathbf{v} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\left(\rho\varepsilon + p + \frac{\rho v^2}{2}\right).$$

Отсюда видно, что предельное значение плотности импульса есть, как и следовало, просто $\rho\mathbf{v}$; для плотности же потока энергии находим, опустив член $\rho c^2\mathbf{v}$, выражение $\mathbf{v}(\rho\varepsilon + p + \rho v^2/2)$, совпадающее с найденным в § 6.

§ 134. Релятивистские гидродинамические уравнения

Уравнения движения содержатся, как известно, в уравнениях

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \tag{134.1}$$

выражающих собой законы сохранения энергии и импульса той физической системы, к которой относится тензор T^{ik}. Воспользовавшись выражением (133.2) для T^{ik}, мы получим отсюда уравнения движения жидкости; при этом, однако, необходимо дополнительно учесть сохранение числа частиц, не содержащееся в уравнениях (134.1). Подчеркнем, что тензор энергии-импульса

(133.2) не учитывает никаких диссипативных процессов (в том числе вязкости и теплопроводности); поэтому речь идет об уравнениях движения идеальной жидкости.

Для формулирования уравнения, выражающего сохранение числа частиц в жидкости (уравнения непрерывности), введем 4-вектор тока частиц n^i. Его временная компонента есть плотность числа частиц, а пространственные компоненты составляют трехмерный вектор тока частиц. Очевидно, что 4-вектор n^i должен быть пропорционален 4-скорости u^i, т. е. иметь вид

$$n^i = nu^i, \tag{134.2}$$

где n — скаляр; из его определения ясно, что n — собственная плотность числа частиц [1]). Уравнение непрерывности выражается просто равенством нулю 4-дивергенции вектора тока:

$$\frac{\partial(nu^i)}{\partial x^i} = 0. \tag{134.3}$$

Возвратимся к уравнениям (134.1). Дифференцируя выражение (133.2), получим

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} + wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0. \tag{134.4}$$

Умножим это уравнение на u^i, т. е. спроецируем его на направление 4-скорости. Помня, что $u_i u^i = 1$, а потому $u_i \partial u^i/\partial x^k = 0$, находим

$$\frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} - u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0. \tag{134.5}$$

Заменив тождественно $wu^k = nu^k(w/n)$ и воспользовавшись уравнением непрерывности (134.3), переписываем это уравнение в виде

$$nu^k \left[\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{w}{n} - \frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x^k}\right] = 0.$$

[1]) При очень высоких температурах в веществе может происходить возникновение новых частиц, так что полное число частиц каждого рода меняется. В таких случаях под n надо понимать сохраняющуюся макроскопическую величину, характеризующую число частиц. Так, если речь идет об образовании электронных пар, под n можно понимать число электронов, которое осталось бы после аннигиляции всех пар. Удобным определением n может служить плотность числа барионов (число антибарионов — если они имеются — считается при этом отрицательным). К области применений ультрарелятивистской гидродинамики могут относиться, однако, и задачи, в которых вообще нельзя ввести какой-либо сохраняющейся макроскопической характеристики числа частиц в системе, и последнее само определяется условиями термодинамического равновесия (таковы задачи, связанные с множественным образованием частиц при столкновениях быстрых нуклонов); вывод гидродинамических уравнений для таких случаев — см. задачу 2.

Согласно известному термодинамическому соотношению для тепловой функции имеем

$$d\frac{w}{n} = Td\frac{\sigma}{n} + \frac{1}{n}dp \tag{134.6}$$

(T — температура, σ — энтропия отнесенная к единице собственного объема) [1]). Отсюда видно, что выражение в квадратных скобках есть производная $T\partial(\sigma/n)/\partial x^k$. Опустив множитель nT, приходим, таким образом, к уравнению

$$u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\sigma}{n} \equiv \frac{d}{ds}\frac{\sigma}{n} = 0, \tag{134.7}$$

выражающему адиабатичность движения жидкости (d/ds означает дифференцирование вдоль мировой линии движения данного элемента жидкости). С помощью уравнения непрерывности (134.3) его можно представить в эквивалентном виде

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\sigma u^i = 0, \tag{134.8}$$

т. е. как равенство нулю 4-дивергенции потока энтропии σu^i.

Спроецируем теперь уравнение (134.1) на направление, нормальное к u^i. Другими словами, составим их комбинацию [2])

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} - u_i u^k \frac{\partial T_k^l}{\partial x^l} = 0$$

(выражение в левой части тождественно обращается в нуль при скалярном умножении на u^i). Простое вычисление приводит к уравнению

$$wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}. \tag{134.9}$$

Три пространственные компоненты этого уравнения представляют собой релятивистское обобщение уравнения Эйлера (временна́я же компонента есть следствие первых трех).

Уравнение (134.9) может быть представлено в другом виде в случае изэнтропического движения (подобно преобразованию

---

[1]) Напомним, что такое соотношение имеет место для определенного количества вещества (а не для определенного объема, в котором может находиться переменное число частиц). В (134.6) оно написано для тепловой функции, отнесенной к одной частице, а $1/n$ есть объем, приходящийся на одну частицу.

[2]) Для удобства напомним, что компоненты 4-скорости (см. II, § 4):

$$u^i = (\gamma,\, \gamma\mathbf{v}/c),\ \ u_i = (\gamma,\, -\gamma\mathbf{v}/c),$$

где для краткости введено (в этой главе!) обозначение $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

от (2.3) к (2.9) для нерелятивистского уравнения Эйлера). При $\sigma/n = \text{const}$ имеем, согласно (134.6),

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} = n\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{w}{n}$$

и уравнение (134.9) принимает вид

$$u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}u_i\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{w}{n}. \qquad (134.10)$$

Если движение к тому же еще и стационарно (все величины не зависят от времени), то пространственные компоненты (134.10) дают

$$\gamma(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{\gamma w}{n}\mathbf{v}\right) + c^2\nabla\frac{w}{n} = 0.$$

Умножив это уравнение скалярно на $\mathbf{v}$, после простых преобразований получим $(\mathbf{v}\nabla)(\gamma w/n) = 0$. Отсюда следует, что вдоль каждой из линий тока постоянна величина

$$\gamma w/n = \text{const}. \qquad (134.11)$$

Это — релятивистское обобщение уравнения Бернулли [1]).

Не предполагая изэнтропическое течение стационарным, легко видеть, что уравнения (134.10) имеют решения вида

$$\frac{w}{n}u_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \qquad (134.12)$$

где φ — функция координат и времени; эти решения — релятивистский аналог потенциальных течений нерелятивистской гидродинамики (*И.М. Халатников*, 1954). Для проверки сказанного замечаем, что в виду симметрии производных $\partial^2\varphi/\partial x^i\,\partial x^k$ по индексам i и k, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}u_i\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{w}{n}u_k\right);$$

умножив это равенство скалярно на u^k и раскрыв производную в правой части, действительно вернемся к уравнению (134.10). Пространственные и временная компоненты равенства (134.12) дают:

$$\gamma\frac{w}{nc}\mathbf{v} = \nabla\varphi, \quad c\gamma\frac{w}{n} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Первое из них в нерелятивистском пределе дает обычное условие потенциальности, а второе — уравнение (9.3) (с соответствующим переобозначением $\varphi/(cm) \to \varphi$).

[1]) При $v \ll c$ имеем $w/n = mc^2 + mw_{\text{нер}}$ (где $w_{\text{нер}}$ — нерелятивистская тепловая функция единицы массы, обозначавшаяся в § 5 как w) и (134.11) переходит в уравнение (5.3).

Рассмотрим распространение звука в среде с релятивистским уравнением состояния (т. е. в котором давление сравнимо с плотностью внутренней энергии, включающей в себя энергию покоя). Гидродинамические уравнения звуковых волн могут быть линеаризованы; при этом удобнее исходить непосредственно из записи уравнений движения в исходном виде (134.1), а не из эквивалентных им уравнений (134.8), (134.9). Подставив выражения (133.3) компонент тензора энергии-импульса и сохранив везде лишь величины первого порядка малости по амплитуде волны, получим систему уравнений

$$\frac{\partial e'}{\partial t} = -w \operatorname{div} \mathbf{v}, \qquad \frac{w}{c^2}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p', \tag{134.13}$$

где штрихом отмечены переменные части величин в волне. Исключив отсюда $\mathbf{v}$, найдем

$$\frac{\partial^2 e'}{\partial t^2} = c^2 \Delta p'.$$

Наконец, написав $e' = (\partial e/\partial p)_{\text{ад}} p'$, получим для p' волновое уравнение со скоростью звука, которая в этой главе будет обозначаться буквой u:

$$u = c\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)^{1/2}_{\text{ад}} \tag{134.14}$$

(индекс «ад» указывает, что производная должна быть взята для адиабатического процесса, т. е. при постоянном σ/n). Эта формула отличается от соответствующего нерелятивистского выражения тем, что вместо обычной плотности массы здесь стоит e/c^2. Для ультрарелятивистского уравнения состояния $p = e/3$ скорость звука $u = c/\sqrt{3}$.

Наконец, скажем несколько слов о гидродинамических уравнениях при наличии существенных гравитационных полей, т. е. в общей теории относительности. Они получаются из уравнений (134.8), (134.9) просто путем замены обычных производных ковариантными [1])

$$wu^k u_{i;k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}, \qquad (\sigma u^i)_{;i} = 0. \tag{134.15}$$

[1]) В общем случае эти уравнения довольно сложны. Их подробная запись в раскрытом виде (выраженном с помощью трехмерного тензора пространственной метрики — $\gamma_{\alpha\beta}$ из II, § 84) дана в статье *Nelson R.A.* // Gen. Rel. Grav. 1981. V. 13. P. 569. Гидродинамические уравнения в первом посленьютоновском приближении даны в статье *Chandrasekhar S.* // Astroph. J. 1965. V. 142. P. 1488; они приведены также в кн.: *Мизнер Ч.*, *Торн К.*, *Уилер Дж.* Гравитация. — М.: Мир, 1977, § 39, 11 [*Misner C.W.*, *Thorne K.S.*, *Wheeler J.A.* Gravitation. — Freeman, 1973].

Выведем из этих уравнений условие механического равновесия в гравитационном поле. При равновесии гравитационное поле статично; можно выбрать такую систему отсчета, в которой вещество неподвижно ($u^\alpha = 0$, $u^0 = g_{00}^{-1/2}$), все величины не зависят от времени, а смешанные компоненты метрического тензора равны нулю ($g_{0\alpha} = 0$). Пространственные компоненты уравнения (134.15) дают тогда

$$w\Gamma^0_{\alpha 0}u^0 u_0 = \frac{1}{2}\frac{w}{g_{00}}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha},$$

или

$$\frac{1}{w}\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln g_{00}. \tag{134.16}$$

Это и есть искомое уравнение равновесия. В нерелятивистском предельном случае $w = \rho c^2$, $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ (φ — ньютоновский гравитационный потенциал), и уравнение (134.16) переходит в

$$\nabla p = -\rho\nabla\varphi,$$

т. е. в обычное гидростатическое уравнение.

Задачи

1. Найти решение гидродинамических уравнений, описывающее одномерную нестационарную простую волну.

Решение. В простой волне все величины могут быть выражены в виде функции любой одной из них (см. § 101). Написав уравнения движения в виде

$$\frac{\partial T_{00}}{c\,\partial t} - \frac{\partial T_{01}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_{01}}{c\,\partial t} - \frac{\partial T_{11}}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

и считая T_{00}, T_{01}, T_{11} функциями друг от друга, получим соотношение $dT_{00}\,dT_{11} = (dT_{01})^2$. В него надо подставить

$$T_{00} = eu_0^2 + pu_1^2, \quad T_{01} = wu_0u_1, \quad T_{11} = eu_1^2 + pu_0^2,$$

учитывая при этом, что $u_0^2 - u_1^2 = 1$ (при вычислении удобно ввести параметр η согласно $u_0 = \operatorname{ch}\eta$, $u_1 = -\operatorname{sh}\eta$). В результате вычисления получается:

$$\operatorname{Arth}\frac{v}{c} = \pm\frac{1}{c}\int\frac{u}{w}de \tag{2}$$

(u — скорость звука). Далее, из (1) находим

$$\frac{\partial x}{\partial t} = c\,\frac{dT_{01}}{dT_{00}},$$

и, вычисляя эту производную, получим

$$x = t\frac{v \pm u}{1 \pm uv/c^2} + f(v). \tag{3}$$

Формулы (2), (3) и определяют искомое решение.

2. Написать гидродинамические уравнения для ультрарелятивистской среды с неопределенным числом частиц (которое само определяется условиями термодинамического равновесия).

Р е ш е н и е. Условие термодинамического равновесия, определяющее число частиц в такой среде состоит в равенстве нулю всех химических потенциалов. Тогда $e - T\sigma + p = 0$, т. е. $w = T\sigma$, а согласно термодинамическому выражению дифференциала тепловой функции (при заданном — единичном — объеме и нулевых химических потенциалах) $dw = T\,d\sigma + dp$; комбинируя обе формулы, получим: $dp = \sigma\,dT$ [1]. Уравнение (134.5) (в котором еще не использовалось уравнение непрерывности) приводит к уравнению адиабатичности в форме (134.8). Уравнение же (134.9) принимает вид

$$u^k \frac{\partial T u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

§ 135. Ударные волны в релятивистской гидродинамике

Теория ударных волн в релятивистской гидродинамике строится аналогично нерелятивистской теории (*A.H. Taub*, 1948).

Как и в § 85, рассматриваем поверхность разрыва в системе координат, в которой она покоится, а газ движется перпендикулярно ей (вдоль оси $x^1 \equiv x$) со стороны *1* на сторону *2*. Условия непрерывности плотностей потока частиц, потока импульса и потока энергии гласят:

$$[n^x] = [nu^x] = 0, \quad [T^{xx}] = [w(u^x)^2 + p] = 0,$$
$$c[T^{0x}] = c[wu^0u^x] = 0,$$

или, после подстановки значений компонент 4-скорости:

$$v_1\gamma_1/V_1 = v_2\gamma_2/V_2 \equiv j, \tag{135.1}$$

$$\frac{1}{c^2}w_1v_1^2\gamma_1^2 + p_1 = \frac{1}{c^2}w_2v_2^2\gamma_2^2 + p_2, \tag{135.2}$$

$$w_1v_1\gamma_1^2 = w_2v_2\gamma_2^2, \tag{135.3}$$

где $\gamma_1 = \left(1 - v_1^2/c^2\right)^{-1/2}$, $\gamma_2 = \left(1 - v_2^2/c^2\right)^{-1/2}$, а $V_1 = 1/n_1$ и $V_2 = 1/n_2$ — объемы, отнесенные к одной частице [2].

Из (135.1) и (135.2) находим

$$j^2 = (p_2 - p_1)c^2/\left(w_1V_1^2 - w_2V_2^2\right). \tag{135.4}$$

Далее, переписываем условие (135.3) с учетом (135.1) в виде

$$w_1^2V_1^2\gamma_1^2 = w_2^2V_2^2\gamma_2^2.$$

[1]) При ультрарелятивистском уравнении состояния $p = e/3$ из написанных формул легко найти, что $e \propto T^4$, $\sigma \propto T^3$, т. е. те же законы, которые справедливы для черного излучения (см. V, § 63), — как и следовало ожидать.

[2]) В нерелятивистском пределе определенный согласно (135.1) поток числа частиц отличается множителем $1/m$ от плотности потока массы, обозначавшейся через j в § 85. Множителем m отличаются также определенные здесь и в § 85 объемы V.

Путем простых алгебраических преобразований (из (135.1) выражаем γ_1^2 и γ_2^2 через j^2, а затем подставляем j^2 из (135.4)), получим следующее релятивистское уравнение ударной адиабаты (*адиабата Тауба*):

$$w_1^2V_1^2 - w_2^2V_2^2 + (p_2 - p_1)(w_1V_1^2 + w_2V_2^2) = 0. \tag{135.5}$$

Приведем также выражения для скоростей газа по обе стороны поверхности разрыва, которые можно получить путем элементарных преобразований из условий (135.2), (135.3) [1]:

$$\frac{v_1}{c} = \left[\frac{(p_2-p_1)(e_2+p_1)}{(e_2-e_1)(e_1+p_2)}\right]^{1/2}, \qquad \frac{v_2}{c} = \left[\frac{(p_2-p_1)(e_1+p_2)}{(e_2-e_1)(e_2+p_1)}\right]^{1/2}. \tag{135.6}$$

Относительная же скорость газов по обе стороны разрыва согласно релятивистскому правилу сложения скоростей равна

$$v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1v_2/c^2} = c\left[\frac{(p_2-p_1)(e_2-e_1)}{(e_1+p_2)(e_2+p_1)}\right]^{1/2}. \tag{135.7}$$

В нерелятивистском пределе, если положить $e \approx mc^2n = mc^2/V$ и пренебречь p по сравнению с e, формулы (135.4), (135.6), (135.7) переходят в формулы (85.4), (85.6), (85.7) (с учетом указанной в примечании разницы в определениях j и V здесь и в § 85) [2]. Для ультрарелятивистского же уравнения состояния $p = e/3$ из (135.6) имеем

$$\frac{v_1}{c} = \left[\frac{3e_2+e_1}{3(3e_1+e_2)}\right]^{1/2}, \quad \frac{v_2}{c} = \left[\frac{3e_1+e_2}{3(3e_2+e_1)}\right]^{1/2} \tag{135.8}$$

(отметим, что $v_1v_2 = c^2/3$). При увеличении интенсивности ударной волны ($e_2 \to \infty$) v_1 стремится к скорости света, а v_2 — к $c/3$.

Подобно тому, как в гл. IX мы изображали ударную адиабату графиком в плоскости Vp, так естественными переменными для изображения релятивистской ударной адиабаты являются wV^2, pc^2; в этих координатах j^2 определяет наклон хорды, проведенной из начальной точки адиабаты *1* в произвольную точку *2*.

Релятивистские ударные волны слабой интенсивности могут быть рассмотрены вполне аналогично тому, как это было сделано в § 86 в нерелятивистском случае (*И.М. Халатников*, 1954).

---

[1]) При преобразованиях удобно сделать подстановку $v/c = \operatorname{th}\varphi$, $\gamma = \operatorname{ch}\varphi$.

[2]) Для предельного перехода от уравнения адиабаты (135.5) к нерелятивистскому уравнению (85.10) такое приближение недостаточно; надо положить $w = nmc^2 + nm\varepsilon + p$ (ε — нерелятивистская внутренняя энергия, отнесенная к единице массы) и, разделив уравнение (135.5) на c^2, перейти к пределу $c \to \infty$.

Не повторяя заново всех вычислений, приведем результат для скачка энтропии, который снова оказывается малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{wV^2T}\left(\frac{\partial^2(wV^2)}{\partial p^2}\right)_{\text{ад}}\right]_1 (p_2 - p_1)^3. \qquad (135.9)$$

Поскольку должно быть $\sigma_2 > \sigma_1$, то мы видим, что ударная волна является волной сжатия, если

$$\left(\frac{\partial^2(wV^2)}{\partial p^2}\right)_{\sigma V} > 0. \qquad (135.10)$$

Это условие представляет собой релятивистское обобщение условия (86.2) нерелятивистской гидродинамики [1]. При $p_2 > p_1$ из (135.4) и (135.5) следует, что

$$w_2V_2^2 < w_1V_1^2, \quad w_2V_2 > w_1V_1;$$

отсюда, в свою очередь, следует, что во всяком случае $V_2 < V_1$, — объем V должен уменьшиться даже сильнее, чем wV возрастает. Скорости v_1 и v_2 ударной волны слабой интенсивности в первом приближении совпадают, естественно, со скоростью звука: поскольку изменение энтропии — величина третьего порядка, то выражения (135.6) при $p_2 \to p_1$, $e_2 \to e_1$ переходят в производную (134.14) [2]. Рассуждения, вполне аналогичные произведенным в § 86, показывают, что в следующем приближении $v_1 > u_1$, $v_2 < u_2$.

Таким образом, направление изменения величин в релятивистской ударной волне слабой интенсивности подчиняется (при условии (135.10)) тем же неравенствам, что и в нерелятивистском случае. Обобщение этого результата на ударные волны произвольной интенсивности оказывается возможным произвести способом, вполне аналогичным примененному в § 87 [3].

Подчеркнем в то же время, что неравенства $v_1 > u_1$, $v_2 < u_2$ справедливы для релятивистских (как и для нерелятивистских)

---

[1]) Используя термодинамическое соотношение для тепловой функции, отнесенной к одной частице, $d(wV) = V\,dp$ (при $\sigma V = \text{const}$), найдем, что условие (135.10) эквивалентно неравенству

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_{\text{ад}} > \frac{3}{w}\left|\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\text{ад}}\right|.$$

В нерелятивистском пределе правая часть заменяется нулем.

[2]) Выражение же (135.4) переходит в производную $-c^2[dp/d(wV^2)]_1$. С помощью термодинамических выражений $d(eV) = -p\,dV$, $d(wV) = V\,dp$ (при $\sigma V = \text{const}$) легко убедиться, что эта производная, умноженная на V_1^2, равна, как и следовало, $u_1^2/\left(1 - u_1^2\right)$.

[3]) См. *Thorne K.S.* // Astroph. J. 1973. V. 179. P. 897.

ударных волн вне зависимости от каких бы то ни было термодинамических условий — как следствие требования эволюционности. Напомним, что при выводе этих условий (§ 88) был существен только знак скоростей $u \pm v$ распространения звуковых возмущений в движущейся жидкости по отношению к неподвижной поверхности разрыва. Согласно релятивистскому правилу сложения скоростей эти скорости даются выражениями $(u \pm v)/(1 \pm vu/c^2)$, знак которых определяется только их числителями, так что все проведенные в § 88 рассуждения остаются в силе.

§ 136. Релятивистские уравнения движения вязкой и теплопроводной среды

Установление релятивистских гидродинамических уравнений при наличии диссипативных процессов (вязкости и теплопроводности) сводится к вопросу об определении вида соответствующих дополнительных членов в тензоре энергии-импульса и в векторе плотности потока вещества. Обозначая эти члены соответственно как τ_{ik} и ν_i, напишем:

$$T_{ik} = pg_{ik} + wu_iu_k + \tau_{ik}, \tag{136.1}$$

$$n_i = nu_i + \nu_i. \tag{136.2}$$

Уравнения движения по-прежнему содержатся в

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \qquad \frac{\partial n^i}{\partial x^i} = 0.$$

Прежде всего, однако, возникает вопрос о более точном определении самого понятия скорости u^i. В релятивистской механике всякий поток энергии неизбежно связан также и с потоком массы. Поэтому при наличии, например, теплового потока определение скорости по потоку массы (как в нерелятивистской гидродинамике) теряет непосредственный смысл. Мы определим здесь скорость условием, чтобы в собственной системе отсчета каждого данного элемента жидкости его импульс был равен нулю, а его энергия выражалась через другие термодинамические величины теми же формулами, как и при отсутствии диссипативных процессов. Это значит, что в указанной системе отсчета должны обращаться в нуль компоненты τ_{00} и $\tau_{0\alpha}$ тензора τ_{ik}; поскольку в этой системе и $u^\alpha = 0$, то имеем в ней (а потому и в любой другой системе) тензорное соотношение

$$\tau_{ik}u^k = 0. \tag{136.3}$$

Аналогичное соотношение

$$\nu_iu^i = 0 \tag{136.4}$$

должно выполняться и для вектора ν_i, поскольку в собственной системе отсчета компонента n^0 4-вектора потока частиц n^i должна, по определению, совпадать с плотностью числа частиц n.

Искомый вид тензора τ_{ik} и вектора ν_i можно установить, исходя из требований, налагаемых законом возрастания энтропии. Этот закон должен содержаться в уравнениях движения (подобно тому как в § 134 из этих уравнений получалось для идеальной жидкости условие постоянства энтропии). Путем простых преобразований с использованием уравнения непрерывности легко получить следующее уравнение:

$$u^i \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = T \frac{\partial}{\partial x^i}(\sigma u^i) - \mu \frac{\partial \nu^i}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0,$$

где μ — релятивистский химический потенциал вещества: $n\mu = w - T\sigma$, и использовано термодинамическое соотношение для его дифференциала:

$$d\mu = \frac{1}{n}\,dp - \frac{\sigma}{n}\,dT. \tag{136.5}$$

Наконец, используя (136.3), перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i\right) = -\nu^i \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\mu}{T} + \frac{\tau_i^k}{T}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}. \tag{136.6}$$

Стоящее слева выражение должно представлять собой 4-дивергенцию потока энтропии, а выражение справа — возрастание энтропии вследствие диссипативных процессов. Таким образом, 4-вектор плотности потока энтропии есть

$$\sigma^i = \sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i, \tag{136.7}$$

а τ_{ik} и ν^i должны выражаться линейно через градиенты скорости и термодинамических величин так, чтобы обеспечить существенную положительность правой части уравнения (136.6). Это условие вместе с условиями (136.3), (136.4) однозначно определяет вид симметричного 4-тензора τ_{ik} и 4-вектора ν_i:

$$\tau_{ik} = -c\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - u_k u^l \frac{\partial u_i}{\partial x^l} - u_i u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l}\right) - \\ - c\left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial u^l}{\partial x^l}(g_{ik} - u_i u_k), \tag{136.8}$$

$$\nu_i = \frac{\varkappa}{c}\left(\frac{nT}{w}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\mu}{T} - u_i u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\mu}{T}\right]. \tag{136.9}$$

Здесь η, ζ — два коэффициента вязкости, а $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, выбранные в соответствии с их нерелятивистским определением. В нерелятивистском пределе компоненты $\tau_{\alpha\beta}$ сводятся к компонентам трехмерного тензора вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$ (15.3).

Чистой теплопроводности соответствует поток энергии при отсутствии потока вещества. Условие последнего есть $nu^\alpha+\nu^\alpha = 0$. При этом пространственные компоненты 4-скорости $u^\alpha = -\nu^\alpha/n$ — величины первого порядка по градиентам; поскольку выражения (136.8), (136.9) написаны лишь с точностью до величин этого порядка, компоненту u^0 4-скорости надо положить равной единице: $u_0^2 = 1+u_\alpha u^\alpha = 1+\nu_\alpha\nu^\alpha/n^2\approx 1$. С этой же точностью надо опустить второй член в квадратных скобках в (136.9). Тогда для плотности потока энергии $cT^{0\alpha} = -cT^0_\alpha$ находим

$$-cT^0_\alpha = -cwu_\alpha u^0 = \frac{cw}{n}\nu_\alpha = \frac{\varkappa nT^2}{w^2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\mu}{T}.$$

Используя термодинамическое соотношение (136.5), переписанное в виде

$$d\frac{\mu}{T} = -\frac{w}{nT^2}\,dT + \frac{dp}{nT},$$

получим поток энергии:

$$-\varkappa\left(\nabla T - \frac{T}{w}\nabla p\right). \qquad (136.10)$$

Мы видим, что в релятивистском случае теплопроводностный поток тепла пропорционален не просто градиенту температуры, а определенной комбинации градиентов температуры и давления (в нерелятивистском пределе $w\approx nmc^2$ и член с ∇p должен быть опущен).

Г Л А В А XVI

ГИДРОДИНАМИКА СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

§ 137. Основные свойства сверхтекучей жидкости

При температурах, близких к абсолютному нулю, в свойствах жидкости на первый план выдвигаются квантовые эффекты; в таких случаях говорят о *квантовых жидкостях*. Фактически лишь гелий остается жидким вплоть до абсолютного нуля; все другие жидкости затвердевают значительно раньше, чем в них становятся заметными квантовые эффекты. Существуют, однако, два изотопа гелия — ^{4}He и ^{3}He, отличающиеся статистикой, которой подчиняются их атомы. Ядро ^{4}He не имеет спина, и вместе с ним равен нулю и спин атома в целом; эти атомы подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна. Атомы же ^{3}He обладают (за счет своего ядра) спином $1/2$ и подчиняются статистике Ферми–Дирака. Это различие имеет фундаментальное значение для свойств образуемых этими веществами квантовых жидкостей; в первом случае говорят о квантовой *бозе-жидкости*, а во втором — о *ферми-жидкости*. В этой главе будет идти речь только о первой из них.

При температуре 2,19 К жидкий гелий (изотоп ^{4}He) имеет так называемую λ-точку (фазовый переход второго рода) [1]. Ниже этой точки жидкий гелий (в этой фазе его называют He II) обладает рядом замечательных свойств, из которых наиболее существенным является открытая *П.Л. Капицей* в 1938 г. *сверхтекучесть* — свойство протекать по узким капиллярам или щелям, не обнаруживая никакой вязкости.

Теория сверхтекучести была развита *Л.Д. Ландау* (1941). Ее микроскопическая часть изложена в другом томе этого Курса (см. IX, гл. III). Здесь же мы остановимся лишь на макроскопической гидродинамике сверхтекучей жидкости, которая может быть построена на базе представлений микроскопической теории [2].

---

[1]) λ-точки образуют линию на фазовой диаграмме гелия в плоскости pT. Температура 2,19 К отвечает точке пересечения этой линии с линией равновесия жидкости с паром.

[2]) Ферми-жидкость изотопа ^{3}He тоже становится сверхтекучей, но при гораздо более низких температурах $\sim 10^{-3}$ К. Гидродинамика этой сверхтекучей жидкости более сложна ввиду более сложного характера описывающего ее состояние «параметра порядка» (ср. IX, § 54).

Отправным пунктом гидродинамики гелия II является следующий основной результат микроскопической теории. При отличных от нуля температурах гелий II ведет себя так, как если бы он представлял собой смесь двух различных жидкостей. Одна из них сверхтекуча и при движении вдоль твердой поверхности не обнаруживает никакой вязкости. Другая же ведет себя, как обычная нормальная вязкая жидкость. При этом весьма существенно, что между обеими этими движущимися «друг через друга» частями массы жидкости нет трения, т. е. не происходит передачи импульса от одной из них к другой.

Следует, однако, самым решительным образом подчеркнуть, что рассмотрение жидкости как смеси нормальной и сверхтекучей ее частей является не более чем способом наглядного описания явлений, происходящих в квантовой жидкости. Как и всякое описание квантовых явлений в классических терминах, оно не вполне адекватно. В действительности надо говорить, что в квантовой жидкости — гелии II — может существовать одновременно два движения, каждое из которых связано со своей эффективной массой (так что сумма обеих этих масс равна полной истинной массе жидкости). Одно из этих движений нормально, т. е. обладает теми же свойствами, что и движение обычной вязкой жидкости; другое же — сверхтекуче. Оба эти движения происходят без передачи импульса от одного к другому. В определенном смысле можно говорить о сверхтекучей и нормальной частях массы жидкости, но это отнюдь не означает возможности реального разделения жидкости на две части [1].

Лишь имея в виду все эти оговорки относительно истинного характера происходящих в гелии II явлений, можно пользоваться терминами *сверхтекучая часть* и *нормальная часть* жидкости как наглядным способом краткого описания этих явлений. Мы, однако, будем предпочитать пользоваться более точными терминами *сверхтекучее движение* и *нормальное движение*, не ассоциируя их с компонентами «смеси» двух «частей» жидкости.

Представление о двух видах движения дает простое объяснение наблюдающимся на опыте основным свойствам течения гелия II. Отсутствие вязкости при протекании гелия II по узкой щели объясняется тем, что в щели имеет место сверхтекучее движение жидкости, не обнаруживающее трения; можно сказать, что нормальная часть, задерживается в сосуде, протекая через щель несравненно медленнее, со скоростью, соответствующей ее вязко-

[1]) Независимо от Ландау, качественная идея о макроскопическом описании гелия II с помощью разделения его плотности на две части и введения двух полей скоростей была высказана *Л. Тиссой* (*L. Tisza*, 1940); эта идея позволила ему также предсказать существование двух видов звуковых волн в гелии II (см. ниже § 141). Однако, ввиду ошибочности исходных микроскопических представлений последовательная теория сверхтекучести (в том числе ее гидродинамика) в работах Тиссы не была построена.

сти и ширине щели. Напротив, измерение вязкости гелия II по затуханию крутильных колебаний погруженного в жидкость диска должно давать отличные от нуля значения: вращение диска создает вокруг него нормальное движение жидкости, останавливающее диск благодаря свойственной этому движению вязкости. Таким образом, в опытах с протеканием по капилляру или щели обнаруживается сверхтекучее движение жидкости, а в опытах с вращением диска в гелии II обнаруживается ее нормальное движение.

Помимо отсутствия вязкости, сверхтекучее движение жидкости обладает еще и следующими двумя важнейшими свойствами: оно не сопровождается переносом тепла и всегда потенциально. Оба эти свойства тоже следуют из микроскопической теории, согласно которой нормальное движение жидкости представляет собой в действительности движение «газа возбуждений»; напомним, что коллективное тепловое движение атомов квантовой жидкости можно рассматривать как совокупность отдельных элементарных возбуждений, ведущих себя как некоторые квазичастицы, движущиеся в занимаемом жидкостью объеме и обладающие определенными импульсами и энергиями.

Энтропия гелия II определяется статистическим распределением элементарных возбуждений. Поэтому при всяком движении жидкости, при котором газ квантов возбуждения остается неподвижным, не возникает никакого макроскопического переноса энтропии. Это и значит, что сверхтекучее движение не сопровождается переносом энтропии, или, другими словами, не переносит тепла. Отсюда в свою очередь следует, что течение гелия II, при котором имеет место лишь сверхтекучее движение, является термодинамически обратимым.

Перенос тепла нормальным движением жидкости представляет собой механизм теплопередачи в гелии II. Он имеет, таким образом, своеобразный конвективный характер, принципиально отличный от обычной теплопроводности. Всякая разность температур в гелии II приводит к возникновению в нем внутренних нормальных и сверхтекучих движений; при этом оба потока (сверхтекучий и нормальный) могут компенсировать друг друга по количеству переносимой ими массы, так что никакого реального макроскопического переноса массы в жидкости может и не быть.

В дальнейшем мы будем обозначать скорости сверхтекучего и нормального движений соответственно как $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$. Описанный механизм переноса тепла означает, что плотность потока энтропии равна произведению $\mathbf{v}_n \rho s$ скорости $\mathbf{v}_n$ на энтропию единицы объема жидкости (s — энтропия, отнесенная к единице ее массы). Плотность потока тепла получается соответственно умножением потока энтропии на T, т. е. равна

$$\mathbf{q} = \rho T s \mathbf{v}_n. \tag{137.1}$$

Свойство потенциальности сверхтекучего движения выражается равенством

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0, \tag{137.2}$$

которое должно иметь место в любой момент времени во всем объеме жидкости. Это свойство является макроскопическим выражением той особенности энергетического спектра гелия II, которая лежит в основе микроскопической теории сверхтекучести: элементарные возбуждения, обладающие большой длиной волны (т. е. малыми импульсами и энергиями), являются звуковыми квантами — фононами. Поэтому макроскопическая гидродинамика сверхтекучего движения не должна допускать никаких других колебаний, кроме звуковых, что и обеспечивается условием (137.2) [1]).

В силу потенциальности сверхтекучее движение жидкости не оказывает никакой силы на стационарно обтекаемое твердое тело (парадокс Даламбера; см. § 11). Напротив, нормальное движение приводит к возникновению действующей на обтекаемое тело силы сопротивления. Если движение жидкости таково, что сверхтекучий и нормальный потоки массы взаимно компенсируются, то мы получим весьма своеобразную картину: на погруженное в гелий II тело будет действовать сила, в то время как никакого суммарного переноса массы жидкости нет.

Задача

Между концами капилляра с гелием II поддерживается малая разность температур ΔT. Определить тепловой поток, распространяющийся вдоль капилляра.

Решение. Согласно формуле (138.3) перепад давления между обоими концами капилляра $\Delta p = \rho s \Delta T$. Этот перепад создает в капилляре нормальное движение, средняя (по сечению) скорость которого равна

$$\overline{v}_n = R^2\, \Delta p/(8\eta l)$$

(R — радиус, l — длина капилляра, η — вязкость нормального движения; ср. (17.10)). Полный тепловой поток равен

$$T\rho s \overline{v}_n \pi R^2 = \frac{T\pi R^4 \rho^2 s^2 \Delta T}{8\eta l}.$$

В обратном направлении возникает сверхтекучее движение, скорость которого определяется условием отсутствия суммарного переноса массы: $v_s = -\overline{v}_n \rho_n/\rho_s$.

§ 138. Термомеханический эффект

Так называемый термомеханический эффект в гелии II заключается в том, что при вытекании гелия из сосуда через тонкий капилляр в сосуде наблюдается нагревание; наоборот, в

[1]) Более полное микроскопическое обоснование этого утверждения — см. IX, § 26.

месте втекания гелия из капилляра в другой сосуд наблюдается охлаждение [1]). Это явление естественным образом объясняется тем, что движение вытекающей через капилляр жидкости в основном сверхтекуче и потому не уносит с собой тепла, так что имеющееся в сосуде тепло распределяется на меньшее количество гелия II. При втекании гелия в сосуд имеет место обратное явление.

Легко найти количество тепла Q, поглощающееся при втекании в сосуд через капилляр 1 г гелия. Втекающая жидкость не приносит с собой энтропии. Для того чтобы находящийся в сосуде гелий остался при своей температуре T, надо было бы сообщить ему количество тепла Ts так, чтобы скомпенсировать уменьшение приходящейся на единицу массы энтропии благодаря введению 1 г гелия с равной нулю энтропией. Это значит, что при втекании 1 г гелия в сосуд с гелием при температуре T поглощается количество тепла

$$Q = Ts. \tag{138.1}$$

Наоборот, при вытекании 1 г гелия из сосуда с гелием при температуре T выделяется количество тепла Ts.

Рассмотрим теперь два сосуда с гелием II при температурах T_1 и T_2, причем сосуды соединены друг с другом тонким капилляром. Благодаря возможности свободного сверхтекучего перетекания по капилляру быстро установится механическое равновесие жидкости в обоих сосудах. Поскольку, однако, сверхтекучее движение не переносит тепла, тепловое равновесие (при котором температуры гелия в обоих сосудах сравниваются) установится лишь значительно позднее.

Условие механического равновесия легко написать, воспользовавшись тем, что установление этого равновесия происходит согласно предыдущему при постоянных энтропиях s_1 и s_2 гелия в обоих сосудах.

Если ε_1 и ε_2 — внутренние энергии единицы массы гелия при температурах T_1 и T_2, то условие механического равновесия (условие минимума энергии), осуществляемого сверхтекучим перетеканием жидкости, будет

$$\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial N}\right)_{s_1} = \left(\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial N}\right)_{s_2},$$

[1]) Весьма слабый термомеханический эффект должен, строго говоря, иметь место и в обычных жидкостях; аномальным у гелия II является большая величина этого эффекта. Термомеханический эффект в обычных жидкостях представляет собой необратимое явление типа термоэлектрического эффекта Пельтье (фактически такой эффект наблюдается в разреженных газах; см. X, задача 1 к § 14). Такого рода эффект должен существовать и в гелии II, но в этом случае он перекрывается значительно превосходящим его описанным ниже другим эффектом, специфическим для гелия II и не имеющим ничего общего с необратимыми явлениями типа эффекта Пельтье.

где N — число атомов в 1 г гелия. Но производная $(\partial\varepsilon/\partial N)_s$ есть химический потенциал μ. Поэтому мы получаем условие равновесия в виде

$$\mu(p_1, T_1) = \mu(p_2, T_2) \tag{138.2}$$

(p_1, p_2 — давления в обоих сосудах).

В дальнейшем мы будем понимать под химическим потенциалом μ не термодинамический потенциал, отнесенный к одной частице (атому), как это обычно принято, а термодинамический потенциал, отнесенный к единице массы гелия; оба определения отличаются лишь постоянным множителем — массой атома гелия.

Если давления p_1, p_2 малы, то, разлагая по их степеням и помня, что $(\partial\mu/\partial p)_T$ есть удельный объем (слабо зависящий от температуры), получаем

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \mu(0, T_1) - \mu(0, T_2) = \int\limits_{T_1}^{T_2} s\,dT,$$

где $\Delta p = p_2 - p_1$. Если мала также и разность температур $\Delta T = T_2 - T_1$, то, разлагая по степеням ΔT и замечая, что $(\partial\mu/\partial T)_p = -s$, получим следующее соотношение:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \rho s \tag{138.3}$$

(*H. London*, 1939). Поскольку $s > 0$, то и $\Delta p/\Delta T > 0$.

§ 139. Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

Перейдем теперь к выводу полной системы гидродинамических уравнений, которые описывают движение гелия II макроскопическим (феноменологическим) образом. Согласно изложенным выше представлениям речь идет о составлении уравнений движения, описывающегося в каждой точке не одной, как в обычной гидродинамике, а двумя скоростями $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$. Оказывается, что искомая система уравнений может быть получена вполне однозначным образом, исходя из одних только требований, налагаемых принципом относительности Галилея и необходимыми законами сохранения (причем используются также свойства движения, выражаемые уравнениями (137.1) и (137.2)).

Следует иметь в виду, что фактически гелий II теряет свойство сверхтекучести при достаточно больших скоростях движения. Ввиду этого явления *критических скоростей* уравнения гидродинамики сверхтекучего гелия обладают реальным физическим

смыслом лишь для не слишком больших скоростей $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$ [1]). Тем не менее мы проведем сначала вывод этих уравнений, не делая никаких предположений о скоростях $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$, так как при пренебрежении высшими степенями скоростей теряется возможность последовательного вывода уравнений, исходя из законов сохранения. Переход к физически интересному случаю малых скоростей будет произведен в получающихся окончательных уравнениях.

Обозначим буквой $\mathbf{j}$ плотность потока массы жидкости; эта величина является в то же время импульсом единицы ее объема (ср. примеч. на с. 275). Напишем $\mathbf{j}$ в виде суммы

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \tag{139.1}$$

потоков, связанных соответственно с сверхтекучим и нормальным движениями. Коэффициенты ρ_s и ρ_n можно назвать сверхтекучей и нормальной плотностями жидкости. Их сумма равна истинной плотности ρ гелия II:

$$\rho = \rho_s + \rho_n. \tag{139.2}$$

Величины ρ_s и ρ_n являются, разумеется, функциями температуры; ρ_n обращается в нуль при абсолютном нуле, когда гелий II «целиком сверхтекуч» [2]), а ρ_s обращается в нуль в λ-точке, когда жидкость становится «целиком нормальной».

Плотность ρ и поток $\mathbf{j}$ должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{139.3}$$

выражающему закон сохранения массы. Закон сохранения импульса представляется уравнением вида

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{139.4}$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса.

---

[1]) Существование предельной скорости сверхтекучего движения следует уже из микроскопической теории — конкретная форма энергетического спектра элементарных возбуждении в гелии II приводит к нарушению условия сверхтекучести Ландау при больших скоростях (см. IX, § 23). Фактически наблюдающиеся критические скорости, однако, гораздо меньше этого предельного значения, причем зависят от конкретных условий течения (так, для течения по тонким капиллярам или щелям они больше, чем для движений в больших объемах). Физическая природа этих явлений состоит в возникновении квантованных вихревых колец; такого же рода вихревые нити (но прямолинейные) возникают при вращении жидкого гелия в цилиндрическом сосуде (см. IX, § 29). В этой главе эти явления не рассматриваются.

[2]) Если гелий II содержит примесь постороннего вещества (таковым фактически может являться изотоп ^{3}He), то ρ_n остается отличным от нуля и при абсолютном нуле.

Мы не будем рассматривать пока диссипативных процессов в жидкости; тогда движение обратимо и должна сохраняться также и энтропия жидкости. Имея в виду, что поток энтропии равен $\rho s\mathbf{v}_n$, напишем уравнение сохранения энтропии в виде

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s\mathbf{v}_n) = 0. \tag{139.5}$$

К уравнениям (139.3)–(139.6) должно еще быть добавлено уравнение, определяющее производную по времени от скорости $\mathbf{v}_s$. Это уравнение должно быть составлено таким образом, чтобы обеспечить сохранение со временем потенциальности движения: это значит, что производная $\mathbf{v}_s$ должна выражаться в виде градиента некоторого скаляра. Мы напишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v_s^2}{2} + \mu\right) = 0, \tag{139.6}$$

где μ — некоторый скаляр.

Уравнения (139.4) и (139.6) приобретут реальный смысл, разумеется, лишь после того, как будет установлен вид пока не определенных величин Π_{ik} и μ. Для этой цели надо использовать закон сохранения энергии и соображения, основанные на принципе относительности Галилея. Именно, необходимо, чтобы гидродинамические уравнения (139.3)–(139.6) автоматически приводили к выполнению закона сохранения энергии, выражающегося уравнением вида

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0, \tag{139.7}$$

где E — энергия единицы объема жидкости и $\mathbf{Q}$ — плотность потока энергии. Принцип же относительности Галилея дает возможность определить зависимость всех величин от одной из скоростей ($\mathbf{v}_s$) при заданном значении относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ обоих одновременно происходящих в жидкости движений.

Введем наряду с исходной системой координат K еще и другую систему, K_0, в которой скорость сверхтекучего движения данного элемента жидкости равна нулю. Система K_0 движется относительно системы K со скоростью, равной скорости $\mathbf{v}_s$ сверхтекучего движения в исходной системе. Значения всех величин в системе K связаны с их значениями в системе K_0 (которые мы отличаем индексом нуль) следующими известными из механики

формулами преобразования [1]:

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0, \qquad E = \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_0\mathbf{v}_s + E_0,$$
$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_0\mathbf{v}_s + E_0\right)\mathbf{v}_s + \frac{v_s^2}{2}\mathbf{j}_0 + (\Pi_0\mathbf{v}_s) + \mathbf{Q}_0, \tag{139.8}$$
$$\Pi_{ik} = \rho v_{si}v_{sk} + v_{si}j_{0k} + v_{sk}j_{0i} + \Pi_{0ik}$$

(здесь $(\Pi_0\mathbf{v}_s)$ обозначает вектор с компонентами $\Pi_{0ik}v_{sk}$).

В системе K_0 данный элемент жидкости совершает лишь одно движение — нормальное движение со скоростью $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Поэтому все относящиеся к этой системе величины $\mathbf{j}_0$, E_0, $\mathbf{Q}_0$, Π_{0ik} могут зависеть лишь от разности $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, а не от каждой из скоростей $\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_s$ в отдельности; в частности, векторы $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{Q}_0$ должны быть направлены вдоль вектора $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Таким образом, формулы (139.8) определяют зависимость искомых величин от $\mathbf{v}_s$ при заданном $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$.

Энергия E_0, рассматриваемая как функция от ρ, s и импульса $\mathbf{j}_0$ единицы объема жидкости, удовлетворяет термодинамическому соотношению

$$dE_0 = \mu\, d\rho + T\, d(\rho s) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)\, d\mathbf{j}_0, \tag{139.9}$$

где μ — химический потенциал (термодинамический потенциал единицы массы). Первые два члена соответствуют обычному термодинамическому соотношению для дифференциала энергии неподвижной жидкости при постоянном (здесь — равном единице) объеме, а последний член выражает тот факт, что производная от энергии по импульсу есть скорость движения. Импульс $\mathbf{j}_0$ (плотность потока массы в системе K_0) есть, очевидно, просто

$$\mathbf{j}_0 = \rho_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$$

(первая из формул (139.8) при этом совпадает с (139.1)).

Ход дальнейших вычислений состоит в следующем. В уравнение сохранения энергии (139.7) подставляем E и $\mathbf{Q}$ из (139.8),

---

[1]) Эти формулы являются непосредственным следствием принципа относительности Галилея и потому справедливы вне зависимости от того, о какой именно конкретной системе идет речь. Их можно вывести, рассмотрев, например, обычную жидкость. Так в обычной гидродинамике тензор плотности потока импульса есть $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik}$. Скорость жидкости $\mathbf{v}$ в системе K связана со скоростью $\mathbf{v}_0$ в системе K_0 через $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — скорость системы K_0 относительно системы K. Подстановка в Π_{ik} дает

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_{0i}v_{0k} + \rho v_{0i}u_k + \rho u_i v_{0k} + \rho u_i u_k.$$

Введя $\Pi_{0ik} = p\delta_{ik} + \rho v_{0i}v_{0k}$ и $\mathbf{j}_0 = \rho\mathbf{v}_0$, получим указанную в тексте формулу преобразования для тензора Π_{ik}. Остальные формулы получаются аналогичным образом.

причем производная $\partial E_0/\partial t$ выражается через производные от ρ, ρs и $\mathbf{j}_0$ согласно (139.9). После этого все производные по времени ($\dot\rho$, $\dot{\mathbf{v}}_s$ и др.) исключаем с помощью гидродинамических уравнений (139.3)–(139.6). Довольно громоздкие вычисления приводят, после значительных сокращений, к следующему результату:

$$-\Pi_{0ik}\frac{\partial v_{si}}{\partial x_k} + w_i\frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{0ik} + p\operatorname{div}\mathbf{v}_s - \mathbf{w}\nabla p + \rho_n\mathbf{w}(\mathbf{w}\nabla)\mathbf{v}_n + \\ + \operatorname{div}\left(\mathbf{w}(T\rho s + \rho_n\mu)\right) + (\rho_n - \rho s)\mathbf{w}\nabla(\varphi - \mu) = \operatorname{div}\mathbf{Q}_0;$$

здесь фигурирующий в (139.6) скаляр временно обозначен через φ (вместо μ), и для сокращения записи обозначено $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$; кроме того, введено обозначение

$$p = -E_0 + T\rho s + \mu\rho + \rho_n(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \tag{139.10}$$

смысл которого выяснится ниже. Это уравнение сохранения энергии должно удовлетворяться тождественно. При этом $\mathbf{Q}_0$, Π_0, φ должны зависеть лишь от термодинамических переменных и от скорости $\mathbf{w}$, но не от каких-либо градиентов этих величин (поскольку мы не рассматриваем диссипативных процессов). Эти условия определяют выбор выражений для $\mathbf{Q}_0$, Π_0, φ однозначным образом.

Прежде всего, надо положить $\varphi = \mu$, т. е. фигурирующий в уравнении (139.6) скаляр совпадает с химическим потенциалом жидкости, определенным согласно (139.9) (именно поэтому мы заранее обозначили его буквой μ). Для остальных же величин надо положить:

$$\mathbf{Q}_0 = (T\rho s + \rho_n\mu)\mathbf{w} + \rho_n w^2\mathbf{w},$$
$$\Pi_{0ik} = p\delta_{ik} + \rho_n w_i w_k.$$

Подставив теперь эти выражения в формулы (139.8), получим следующие окончательные выражения для плотности потока энергии и тензора плотности потока импульса:

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2}\right)\mathbf{j} + T\rho s\mathbf{v}_n + \rho_n\mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n,\, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \tag{139.11}$$

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni}v_{nk} + \rho_s v_{si}v_{sk} + p\delta_{ik}. \tag{139.12}$$

Выражение (139.12) имеет вид, являющийся естественным обобщением формулы $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik}$ обычной гидродинамики. При этом величину p, определенную согласно (139.10), естественно рассматривать как давление жидкости; в полностью покоящейся жидкости выражение (139.10) совпадает, разумеется, с обычным определением, так как $\Phi = \mu\rho$ становится обыч-

ным термодинамическим потенциалом единицы объема жидкости [1]).

Уравнения (139.3)–(139.6) с определениями $\mathbf{j}$ и Π_{ik} согласно (139.1), (139.12) представляют собой искомую полную систему гидродинамических уравнений. Эта система очень сложна прежде всего тем, что входящие в уравнения величины ρ_s, ρ_n, μ, s являются функциями не только термодинамических переменных p и T, но и квадрата относительной скорости обоих движений $w^2 = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$. Последний представляет собой скаляр, инвариантный относительно галилеевых преобразований системы отсчета и относительно вращения жидкости как целого; эта величина специфична для сверхтекучей жидкости, отнюдь не должна обращаться в нуль в термодинамическом равновесии, и должна фигурировать в уравнении состояния жидкости наряду с p и T.

Уравнения, однако, сильно упрощаются в физически интересном случае не слишком больших скоростей (малой величиной предполагается отношение скоростей к скорости второго звука — § 141).

Прежде всего, в этом случае можно пренебречь зависимостью ρ_s и ρ_n от $\mathbf{w}$; выражение (139.1) для потока $\mathbf{j}$ представляет собой при этом по существу первые члены разложения этой величины по степеням $\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}_s$. Разложение по степеням скоростей надо произвести и для остальных термодинамических величин, входящих в уравнения.

Дифференцируя выражение (139.10) и используя (139.9), получим следующее выражение для дифференциала химического потенциала:

$$d\mu = -s\,dT + \frac{1}{\rho}\,dp - \frac{\rho_n}{\rho}\mathbf{w}\,d\mathbf{w}. \tag{139.13}$$

Отсюда видно, что первые два члена разложения μ по степеням $\mathbf{w}$ имеют вид

$$\mu(p,\,T,\,\mathbf{w}) \approx \mu(p,\,T) - \frac{\rho_n}{2\rho}w^2, \tag{139.14}$$

где в правой части равенства стоят обычные химический потен-

[1]) Обычное термодинамическое определение давления как средней силы, действующей на единичную площадку, относится к неподвижной среде. В обычной гидродинамике тем не менее не возникает вопроса об определении понятия давления (если не учитываются диссипативные процессы), так как всегда можно перейти к системе координат, в которой данный элемент объема жидкости покоится. В гидродинамике же сверхтекучей жидкости надлежащим выбором системы координат можно исключить лишь одно из двух одновременно происходящих движений, и потому обычное определение давления вообще не может быть применено,

Отметим также, что выражение (139.10) соответствует и определению давления как производной $p = -\partial(E_0V)/\partial V$ от полной энергии жидкости при заданных ее полной массе ρV, полной энтропии ρsV и полном импульсе относительного движения $\rho\mathbf{w}V$.

циал $\mu(p,T)$ и плотность $\rho(p,T)$ неподвижной жидкости. Дифференцируя это выражение по температуре и давлению, найдем соответствующие разложения для энтропии и плотности:

$$s(p,\,T,\,\mathbf{w}) \approx s(p,\,T) + \frac{w^2}{2}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\rho_n}{\rho},$$
$$\rho(p,\,T,\,\mathbf{w}) \approx \rho(p,\,T) + \frac{\rho^2 w^2}{2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\rho_n}{\rho}. \tag{139.15}$$

Они должны быть подставлены в гидродинамические уравнения, которые после этого будут справедливы с точностью до членов второго порядка по скоростям включительно (учет же в $\mathbf{j}$ зависимости ρ_s и ρ_n от w^2 привел бы к членам третьего порядка малости) [1].

Введение в гидродинамические уравнения членов, учитывающих диссипативные процессы в сверхтекучей жидкости, будет произведено в следующем параграфе. Но уже здесь сформулируем граничные условия к этим уравнениям.

Прежде всего, на всякой (неподвижной) твердой поверхности должна обращаться в нуль перпендикулярная к этой поверхности компонента потока массы $\mathbf{j}$. Для выяснения граничных условий, налагаемых на $\mathbf{v}_n$, надо вспомнить, что нормальное движение есть в действительности движение «газа» элементарных тепловых возбуждений в нем. При движении вдоль твердой поверхности кванты возбуждения взаимодействуют с ней, что должно быть описано макроскопически как «прилипание» нормальной части массы жидкости к стенке, подобно тому как это имеет место для обычных вязких жидкостей. Другими словами, на твердой поверхности должна обращаться в нуль тангенциальная компонента скорости $\mathbf{v}_n$.

Что касается перпендикулярной к стенке компоненты $\mathbf{v}_n$, то надо иметь в виду, что кванты возбуждения могут поглощаться или испускаться твердым телом — это соответствует просто теплопередаче между жидкостью и твердым телом. Поэтому пер-

[1]) Следует отметить, что система гидродинамических уравнений, в которой ρ_s рассматривается как заданная функция p и T, может стать непригодной вблизи λ-точки. Дело в том, что при приближении к этой точке (как и ко всякой точке фазового перехода второго рода) неограниченно возрастают время релаксации для установления равновесного значения параметра порядка и корреляционный радиус его флуктуаций; в сверхтекучем же ^{4}He роль параметра порядка играет конденсатная волновая функция, квадрат модуля которой определяет ρ_s (см. IV, § 26, 28; о релаксации в сверхтекучей жидкости — см. X, § 103). Гидродинамические уравнения с заданной функцией $\rho_s(p,\,T)$ применимы лишь до тех пор, пока характерные расстояния и времена движения велики по сравнению соответственно с корреляционным радиусом и временем релаксации. В противном случае полная система уравнений движения должна включать в себя также и уравнения, определяющие ρ_s. См. *Гинзбург В.Л., Собянин А.А.* // УФН. 1976. Т. 120. С. 153; J. Low. Temp. Physics. 1982. V. 49. P. 507.

пендикулярная к стенке компонента скорости $\mathbf{v}_n$ не должна непременно обращаться в нуль; граничное условие требует лишь непрерывности перпендикулярной к стенке компоненты потока тепла. Температура же испытывает на границе скачок, пропорциональный тепловому потоку: $\Delta T = Kq$, с коэффициентом пропорциональности, зависящим от свойств как жидкости, так и твердого тела. Появление этого скачка связано с особенностями теплопередачи в гелии II. Все теплосопротивление между твердым телом и жидкостью сконцентрировано в пристеночном слое жидкости, поскольку конвективное распространение тепла в объеме жидкости практически не связано с каким бы то ни было теплосопротивлением; в результате весь перепад температуры, вызывающий появление теплового потока, происходит практически у самой поверхности.

Интересным свойством описанных граничных условий является то, что теплообмен между твердым телом и движущейся жидкостью приводит к появлению тангенциальных сил, действующих на поверхность тела. Если ось x направлена по нормали, а ось y — по касательной к поверхности, то действующая на единицу площади касательная сила равна компоненте Π_{xy} тензора потока импульса. Имея в виду, что на поверхности должно быть $j_x = \rho_n v_{nx} + \rho_s v_{sx} = 0$, находим для этой силы отличное от нуля выражение

$$\Pi_{xy} = \rho_s v_{sx} v_{sy} + \rho_n v_{nx} v_{ny} = \rho_n v_{nx}(v_{ny} - v_{sy}).$$

Вводя тепловой поток $\mathbf{q} = \rho s T \mathbf{v}_n$, можно переписать эту силу в виде

$$\Pi_{xy} = \frac{\rho_n}{\rho s T} q_x (v_{ny} - v_{sy}), \tag{139.16}$$

где q_x — непрерывный на поверхности тепловой поток из твердого тела в жидкость.

При отсутствии теплопередачи между твердой стенкой и жидкостью граничное значение перпендикулярной к стенке компоненты $\mathbf{v}_n$ тоже обращается в нуль. Граничные условия $j_x = 0$ и $\mathbf{v}_n = 0$ (ось x направлена по нормали к поверхности) эквивалентны условиям $v_{sx} = 0$ и $\mathbf{v}_n = 0$. Другими словами, в этом случае мы получим обычные граничные условия идеальной жидкости для $\mathbf{v}_s$ и вязкой жидкости — для $\mathbf{v}_n$.

Наконец, скажем несколько слов о гидродинамике смесей жидкого He^4 с посторонним веществом (фактически — с изотопом He^3). Помимо уравнений, выражающих сохранение массы, импульса, энтропии и потенциальности сверхтекучего движения, полная система гидродинамических уравнений смеси должна содержать еще уравнение, выражающее собой сохранение каждого из двух веществ по отдельности. Оно имеет вид

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0,$$

где c — массовая концентрация He^3 в смеси, а $\mathbf{i}$ — плотность его гидродинамического потока. Однако требования, налагаемые законами сохранения и галилеевой инвариантностью оказываются достаточными для установления вида всех уравнений лишь если известно выражение потока $\mathbf{i}$. Оно дается утверждением о том, что примесь (He^3) принимает участие только в нормальном движении, т. е. $\mathbf{i} = \rho c \mathbf{v}_n$ [1]) .

§ 140. Диссипативные процессы в сверхтекучей жидкости

Для учета диссипативных процессов в уравнениях гидродинамики сверхтекучей жидкости надо (как и в обычной гидродинамике) ввести в них дополнительные члены, линейные по пространственным производным скоростей и температуры. Вид этих членов может быть установлен однозначным образом, исходя из требований, налагаемых законом возрастания энтропии и принципом симметрии кинетических коэффициентов Онсагера (*И. М. Халатников*, 1952).

Как и прежде, ρ и $\mathbf{j}$ — масса и импульс единицы объема жидкости. Уравнение непрерывности сохраняет свой вид (139.3). В уравнения же (139.4), (139.6), (139.7) надо ввести дополнительные члены, которые напишем в их правых частях:

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi'_{ik}}{\partial x_k}, \tag{140.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v_s^2}{2} + \mu\right) = -\nabla\varphi', \tag{140.2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q} = -\operatorname{div}\mathbf{Q}'. \tag{140.3}$$

Энтропийное же уравнение не имеет теперь вида уравнения сохранения (139.5); напротив, величины Π', φ', $\mathbf{Q}'$ должны быть определены так, чтобы обеспечить возрастание энтропии. Для этого снова подставляем в уравнение сохранения энергии (140.3) производную $\partial E_0/\partial t$, выраженную с помощью (139.9), после чего исключаем производные ρ, $\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_s$ с помощью (139.3), (140.1), (140.2). При этом подразумевается, что $\mathbf{Q}$ и Π даются уже известными выражениями (139.11), (139.12); поэтому сокращаются все члены, за исключением связанных с энтропией и с диссипа-

[1]) Полный вывод гидродинамических уравнений для смесей — см. кн.: *Халатников И.М.* Теория сверхтекучести. — М.: Наука, 1971, гл. XIII. Эти уравнения становятся неприменимыми при очень низких температурах, когда возникает квантовое вырождение элементарных возбуждений, связанных с атомами примеси.

тивными величинами Π', $\mathbf{Q}'$, φ'. В результате получим уравнение

$$T\left\{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s\mathbf{v}_n)\right\} = \\ = -\operatorname{div}\{\mathbf{Q}' + \rho_s\mathbf{w}\varphi' - (\Pi'\mathbf{v}_n)\} + \varphi'\operatorname{div}(\rho_s w) - \Pi'_{ik}\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} \quad (140.4)$$

(здесь снова $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$).

Линейные по градиентам выражения величин Π', $\mathbf{Q}'$, φ', обеспечивающие возрастание энтропии, имеют вид [1])

$$\Pi'_{ik} = -\eta\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}_n\right) - \\ - \delta_{ik}\zeta_1\operatorname{div}(\rho_s\mathbf{w}) - \delta_{ik}\zeta_2\operatorname{div}\mathbf{v}_n, \quad (140.5)$$

$$\varphi' = \zeta_3\operatorname{div}(\rho_s\mathbf{w}) + \zeta_4\operatorname{div}\mathbf{v}_n, \quad (140.6)$$

$$\mathbf{Q}' = -\varphi'\rho_s\mathbf{w} + (\Pi'\mathbf{v}_n) - \varkappa\nabla T \quad (140.7)$$

(в Π'_{ik} выделена комбинация производных от $\mathbf{v}_n$ с равным нулю следом — подобно тому, как это делается в обычной гидродинамике). При этом согласно принципу Онсагера должно быть

$$\zeta_1 = \zeta_4, \quad (140.8)$$

так что остается всего 5 независимых кинетических коэффициентов [2]).

Наконец, подставив выражения (140.5)–(140.7) в уравнение (140.4), после простых преобразований приведем его к виду

$$T\left\{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho s\mathbf{v}_n - \frac{\varkappa}{T}\nabla T\right)\right\} = R, \quad (140.9)$$

где

$$R = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}_n\right)^2 + 2\zeta_1\operatorname{div}\mathbf{v}_n\operatorname{div}\rho_s\mathbf{w} + \\ + \zeta_2(\operatorname{div}\mathbf{v}_n)^2 + \zeta_3(\operatorname{div}\rho_s\mathbf{w})^2 + \frac{\varkappa}{T}(\nabla T)^2. \quad (140.10)$$

---

[1]) Здесь учитывается также и условие, что вращение нормальной части жидкости как целого ($\mathbf{v}_n = [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]$) не должно приводить к диссипации (ср. § 15).

[2]) Мы не будем проводить полностью соответствующих рассуждений (вполне аналогичных, например, излагавшимся в § 59). Обратим лишь внимание на то, что ζ_1 — коэффициент при $\operatorname{div}(\rho_s\mathbf{w})$ в Π', а в правую часть уравнения (140.4) этот член в Π' входит умноженным на $\operatorname{div}\mathbf{v}_n$; наоборот, ζ_4 — коэффициент при $\operatorname{div}\mathbf{v}_n$ в φ', которое входит в правую часть (140.4) умноженным на $\operatorname{div}(\rho_s\mathbf{w})$.

Это уравнение — аналог общего уравнения переноса тепла обычной гидродинамики (49.5) [1]. Так как правая часть уравнения определяет скорость возрастания энтропии жидкости, то она должна быть существенно положительной величиной. Отсюда следует, что все коэффициенты η, ζ_1, ζ_2, ζ_3, $\varkappa$ положительны, причем сверх того $\zeta_1^2 \leqslant \zeta_2\zeta_3$. Коэффициент η «первой вязкости», связанный с нормальным движением, аналогичен вязкости обычной жидкости, а коэффициент $\varkappa$ формально аналогичен теплопроводности обычной жидкости; коэффициентов же «второй вязкости» имеется теперь три (ζ_1, ζ_2, ζ_3) вместо одного в обычной гидродинамике.

По поводу изложенных результатов необходимо, однако, сделать еще следующее замечание. Диссипируемая в жидкости энергия, разумеется, инвариантна относительно галилеева преобразования системы отсчета. Производные от скорости этому требованию конечно удовлетворяют, но в сверхтекучей жидкости галилеевски инвариантна также и разность скоростей $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Поэтому и диссипативные потоки в сверхтекучей жидкости могут зависеть не только от градиентов термодинамических величин и скоростей, но и от самой $\mathbf{w}$. Как уже было отмечено в § 139, эта разность фактически должна рассматриваться как малая величина, и в этом смысле выражения (140.5), (140.6) содержат в себе не все в принципе возможные члены, но лишь наибольшие из них [2].

Задача

Разделить уравнения для нормального и сверхтекучего движений в несжимаемой сверхтекучей жидкости (принимаются постоянными не только полная плотность ρ, но и ρ_s и ρ_n по отдельности).

Р е ш е н и е. Диссипативные члены в энтропийном уравнении являются малыми величинами второго порядка и могут быть в данном случае опущены; тогда и $s = \text{const}$, а из уравнений (139.3) и (139.5) имеем $\operatorname{div}\mathbf{v}_s = \operatorname{div}\mathbf{v}_n = 0$. В тензоре же плотности потока импульса сохраняем линей-

---

[1]) Все сказанное в конце § 49 об определении энтропии в термодинамически слабо неравновесном состоянии остается в силе и здесь.

[2]) Если отказаться от этого условия, разнообразие допустимых членов в диссипативных потоках существенно возрастет (не говоря уже о том, что и сами кинетические коэффициенты будут, вообще говоря, функциями от w); например, в φ' появятся члены вида $\mathbf{w}\nabla T$ и $w_i w_k\, \partial v_{ni}/\partial x_k$. Полное число независимых кинетических коэффициентов, описывающих диссипацию в гелии II, оказывается при этом равным 13 (*A. Clark*, 1963). См. об этом в кн.: *С. Путтерман*. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. Приложение VI. — М.: Мир, 1978 (*S.J. Putterman*, Superfluid hydrodynamics, North Holland Publishing Co., 1974).

Отметим в этой связи, что в (140.5), (140.6) написаны члены с $\operatorname{div}\rho_s\mathbf{w}$, поскольку именно эта комбинация производных возникает естественным образом в точном уравнении (140.5), (140.6). С принятой точностью было бы правильнее писать в (140.5), (140.6) $\rho_s \operatorname{div}\mathbf{w}$.

ный по градиентам скорости член, связанный с вязкостью нормального движения:

$$\Pi'_{ik} = -\eta\Big(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i}\Big).$$

Подставив это выражение (вместе с Π_{ik} из (139.12)), получим уравнение

$$\rho_s\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_n\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_s(\mathbf{v}_s\nabla)\mathbf{v}_s + \rho_n(\mathbf{v}_n\nabla)\mathbf{v}_n = -\nabla p + \eta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_n,$$

или

$$\rho_n\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n(\mathbf{v}_n\nabla)\mathbf{v}_n + \rho_s\nabla\frac{v_s^2}{2} + \rho_s\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\nabla p + \eta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_n,$$

где введен потенциал сверхтекучего движения согласно $\mathbf{v}_s = \nabla\varphi_s$ и учтено, что $(\mathbf{v}_s\nabla)\mathbf{v}_s = \nabla v_s^2/2$. Поскольку $\mathrm{div}\,\mathbf{v}_s = 0$, то потенциал φ_s удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi_s = 0$. Введем в качестве двух вспомогательных величин «давления» нормального и сверхтекучего движений p_n и p_s согласно равенству $p = p_0 + p_n + p_s$, где p_0 — давление на бесконечности, а p_s определяется обычной для идеальной жидкости формулой

$$p_s = -\rho_s\frac{\partial\varphi_s}{\partial t} - \frac{\rho_s v_s^2}{2}.$$

Уравнение для скорости $\mathbf{v}_n$ принимает тогда вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n\nabla)\mathbf{v}_n = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p_n + \frac{\eta}{\rho_n}\Delta\mathbf{v}_n,$$

формально совпадающий с уравнением Навье–Стокса для жидкости с плотностью ρ_n и вязкостью η.

Таким образом, задача о движении несжимаемого гелия II сводится к двум задачам обычной гидродинамики для идеальной и для вязкой жидкостей. Сверхтекучее движение определяется уравнением Лапласа с граничным условием для нормальной производной $\partial\varphi_s/\partial n$, как в обычной задаче о потенциальном обтекании идеальной жидкостью. Нормальное движение определяется уравнением Навье–Стокса с таким же граничным условием для $\mathbf{v}_n$ (при отсутствии теплообмена между стенкой и жидкостью), как в обычной задаче об обтекании вязкой жидкостью. Распределение давления определяется затем как сумма $p_0 + p_n + p_s$.

Для определения же распределения температуры пишем в уравнении (139.6) (с μ из (139.14)) $\mathbf{v}_s = \nabla\varphi_s$ и интегрируя находим

$$\mu(p,\,T) + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 + \frac{\partial\varphi_s}{\partial t} = \mathrm{const}.$$

Изменения температуры и давления в несжимаемой жидкости малы, и с точностью до членов первого порядка пишем:

$$\mu - \mu_0 = -s(T - T_0) + \frac{1}{\rho}(p - p_0)$$

(T_0, p_0 — температура и давление на бесконечности). Подставляя это выражение в написанный интеграл уравнения и вводя p_n и p_s, получим

$$T - T_0 = \frac{\rho_n}{\rho s}\Big[\frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2}\Big].$$

§ 141. Распространение звука в сверхтекучей жидкости

Применим уравнения гидродинамики гелия II к распространению звука в этой жидкости. Как обычно, в звуковой волне скорости движения предполагаются малыми, а плотность, давление, энтропия — почти равными своим постоянным равновесным значениям. Тогда систему гидродинамических уравнений можно линеаризовать — в (139.12)–(139.14) пренебрегаем квадратичными по скорости членами, а в уравнении (139.5) можно вынести в члене $\operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}_n)$ энтропию ρs из-под знака div (поскольку этот член уже содержит малую величину $\mathbf{v}_n$). Таким образом, система гидродинамических уравнений приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{141.1}$$

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \rho s \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \tag{141.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p = 0, \tag{141.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \mu = 0. \tag{141.4}$$

Дифференцируя (141.1) по времени и подставляя (141.3), получаем

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \tag{141.5}$$

Согласно термодинамическому соотношению $d\mu = -s\,dT + dp/\rho$ имеем

$$\nabla p = \rho s \nabla T + \rho \nabla \mu.$$

Подставляя сюда ∇p из (141.3) и $\nabla \mu$ из (141.4), получим

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho s \nabla T = 0.$$

Применяем к этому уравнению операцию div, а для $\operatorname{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)$ подставляем выражение

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) = \frac{\rho}{\rho_s s} \frac{\partial s}{\partial t},$$

следующее из равенства

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} - \frac{s}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -s \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \frac{s}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{s \rho_s}{\rho} \operatorname{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n).$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} \Delta T. \tag{141.6}$$

Уравнения (141.5) и (141.6) определяют распространение звука в сверхтекучей жидкости. Уже из того факта, что этих уравнений — два, видно, что существуют две скорости распространения звука.

Напишем s, p, ρ, T в виде $s = s_0 + s'$, $p = p_0 + p'$ и т. д., где буквы со штрихом представляют собой малые изменения соответствующих величин в звуковой волне, а величины с индексом нуль (который мы ниже для краткости опускаем) — их постоянные равновесные значения. Тогда можно написать:

$$\rho' = \frac{\partial\rho}{\partial p}p' + \frac{\partial\rho}{\partial T}T', \quad s' = \frac{\partial s}{\partial p}p' + \frac{\partial s}{\partial T}T',$$

и уравнения (141.5) и (141.6) принимают вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial\rho}{\partial T}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial s}{\partial T}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\Delta T' = 0.$$

Ищем решение этих уравнений в виде плоской волны, в которой p' и T' пропорциональны множителю $e^{-i\omega(t-x/u)}$ (скорость звука обозначаем здесь буквой u). В качестве условия совместности обоих уравнений получаем уравнение

$$u^4\frac{\partial(s,\,\rho)}{\partial(T,\,p)} - u^2\left(\frac{\partial s}{\partial T} + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right) + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} = 0$$

(где $\partial(s,\,\rho)/\partial(T,\,p)$ обозначает якобиан преобразования от s, ρ к T, p). Путем простого преобразования с использованием термодинамических соотношений этому уравнению можно придать вид

$$u^4 - u^2\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v}\right] + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T = 0 \qquad (141.7)$$

(c_v — теплоемкость единицы массы). Это квадратное (по u^2) уравнение определяет две скорости распространения звука в гелии II. При $\rho_s = 0$ один из корней этого уравнения обращается в нуль, и мы получаем, как и должно было быть, всего одну обычную скорость звука $u^2 = (\partial p/\partial\rho)_s$.

Фактически теплоемкости c_p и c_v гелия II при температурах, не слишком близких к λ-точке, близки друг к другу (ввиду малости коэффициента теплового расширения). Согласно известной термодинамической формуле в этих условиях близки друг к другу также и изотермическая и адиабатическая сжимаемости:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\frac{c_v}{c_p} \approx \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s.$$

Обозначив общее значение c_p и c_v через c, а общее значение $(\partial p/\partial\rho)_T$ и $(\partial p/\partial\rho)_s$ через $\partial p/\partial\rho$, получим из уравнения (141.7)

следующие выражения для скоростей звука:

$$u_1 = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{Ts^2\rho_s}{c\rho_n}}. \tag{141.8}$$

Одна из них, u_1, почти постоянна, а другая, u_2, сильно зависит от температуры, обращаясь вместе с ρ_s в нуль в λ-точке [1]).

Вблизи λ-точки, однако, коэффициент теплового расширения не мал и пренебрегать разницей между c_p и c_v нельзя. Чтобы получить формулу для u_2 в этом случае, следует опустить второй член в квадратной скобке в (141.7) (содержащий ρ_s) и член u^4, который в этом случае мал (так как u_2 стремится к нулю). Кроме того, можно положить $\rho_n \approx \rho$. В результате получим

$$u_2 = \sqrt{\frac{Ts^2\rho_s}{c_p\rho}}. \tag{141.9}$$

Для скорости же u_1 получается формула (141.8), где под $\partial p/\partial \rho$ следует понимать $(\partial p/\partial \rho)_s$, т. е. обычная формула для скорости звука.

По поводу формулы (141.9) следует заметить, что она применима лишь при достаточно низких частотах — тем более низких, чем ближе жидкость находится к λ-точке. Дело в том, что (как было уже упомянуто в примеч. на с. 715) вблизи λ-точки неограниченно возрастает время релаксации τ параметра порядка; формула (141.9), не учитывающая дисперсии и поглощения звука, справедлива лишь при условии $\omega\tau \ll 1$. Что касается скорости u_1, то вблизи λ-точки появляется дополнительное затухание, связанное с релаксацией параметра порядка — в соответствии с общими утверждениями в § 81.

При самых низких температурах, когда почти все элементарные возбуждения в жидкости являются фононами, величины ρ_n, c, s связаны друг с другом соотношениями [2])

$$c = 3s, \quad \rho_n = \frac{cT}{3u_1^2}\rho,$$

а $\rho_s \approx \rho$. Подставив эти выражения в формулу (141.8) для u_2, найдем

$$u_2 = u_1/\sqrt{3}.$$

Таким образом, при стремлении температуры к нулю скорости u_1 и u_2 стремятся к постоянным пределам, причем так, что их отношение стремится к $\sqrt{3}$.

---

[1]) О распространении звука в смесях жидкого ^{4}He с ^{3}He — см. гл. XIII указанной на с. 717 книги И.М. Халатникова.

[2]) Их легко получить из формул для термодинамических величин гелия II, приведенных в IX, § 22, 23.

Для лучшего выяснения физической природы обоих видов звуковых волн в гелии II рассмотрим плоскую звуковую волну (*Е.М. Лифшиц*, 1944). В такой волне скорости v_s, v_n и переменные части T', p' температуры и давления пропорциональны друг другу. Введем коэффициенты пропорциональности согласно

$$\mathbf{v}_n = a\mathbf{v}_s, \quad p' = bv_s, \quad T' = cv_s. \tag{141.10}$$

Простое вычисление с помощью уравнений (141.1)–(141.6), произведенное с должной степенью точности, дает

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{\beta\rho}{\rho_s s}\frac{u_1^2 u_2^2}{\left(u_1^2 - u_2^2\right)}, \quad b_1 = \rho u_1, \quad c_1 = \frac{\beta T u_1^3}{c\left(u_1^2 - u_2^2\right)}, \\ a_2 &= -\frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\beta\rho}{s\rho_n}\frac{u_1^2 u_2^2}{\left(u_1^2 - u_2^2\right)}, \quad b_2 = \frac{\beta\rho u_1^2 u_2^2}{s\left(u_1^2 - u_2^2\right)}, \quad c_2 = -\frac{u_2}{s}; \end{aligned} \tag{141.11}$$

здесь $\beta = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial T}$ — температурный коэффициент расширения; ввиду его малости величины, содержащие β, малы по сравнению с соответствующими величинами, не содержащими β.

Мы видим, что в звуковой волне первого типа $\mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}_s$, т. е. в такой волне в каждом элементе объема жидкость колеблется в первом приближении как целое; нормальная и сверхтекучая массы движутся вместе. Естественно, что эти волны соответствуют обычным звуковым волнам в обычных жидкостях.

В волне же второго типа имеем $\mathbf{v}_n \approx -\dfrac{\rho_s}{\rho_n}\mathbf{v}_s$, т. е. полная плотность потока вещества

$$\mathbf{j} = \rho_s\mathbf{v}_s + \rho_n\mathbf{v}_n \approx 0.$$

Таким образом, в волне *второго звука* сверхтекучая и нормальная массы жидкости колеблются навстречу друг другу, так что в первом приближении их центр инерции в каждом элементе объема остается неподвижным и суммарный поток вещества отсутствует. Ясно, что этот вид волн специфичен для сверхтекучей жидкости.

Между обоими видами волн имеется и другое существенное отличие, видное из формул (141.11). В звуковой волне обычного звука амплитуда колебаний давления относительно велика, а амплитуда колебаний температуры мала. Напротив, в волне второго звука относительная амплитуда колебаний температуры велика по сравнению с относительной амплитудой колебаний давления. В этом смысле можно сказать, что волны второго звука представляют собой своеобразные незатухающие температурные волны [1]).

[1]) Они не имеют, разумеется, ничего общего с затухающими «температурными волнами» в обычной теплопроводящей среде (§ 52).

В приближении, в котором тепловым расширением пренебрегается вовсе, волны второго звука представляют собой чисто температурные колебания (с $\mathbf{j} = 0$), а волны первого звука — колебания давления (с $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_n$). Соответственно этому их уравнения движения полностью разделяются: в уравнении (141.6) пишем $s' = cT'/T$ и получаем

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = u_2^2 \Delta T', \qquad (141.12)$$

а в уравнении (l41.5) полагаем $\rho' = \dfrac{\partial \rho}{\partial p} p'$ и получаем

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = u_1^2 \Delta p'. \qquad (141.13)$$

С описанными свойствами звуковых волн в гелии II тесно связан и вопрос о различных способах их возбуждения (*Е.М. Лифшиц*, 1944). Обычные механические способы возбуждения звука (колеблющимися твердыми телами) крайне невыгодны для получения второго звука в том смысле, что интенсивность излучаемого второго звука ничтожно мала по сравнению с интенсивностью одновременно излучаемого обычного звука. В гелии II возможны, однако, и другие, специфические для него способы возбуждения звука. Таково излучение твердыми поверхностями с периодически меняющейся температурой; интенсивность излучаемого второго звука оказывается здесь большой по сравнению с интенсивностью первого звука, что естественно ввиду указанного выше различия в характере колебаний температуры в этих волнах (см. задачи 1 и 2).

При распространении волны второго звука большой амплитуды его профиль постепенно деформируется в результате эффектов нелинейности, и это приводит в конце концов к возникновению разрывов — как и для обычного звука в обычной гидродинамике (ср. § 101, 102). Рассмотрим эти явления для одномерной бегущей волны второго звука (*И.М. Халатников*, 1952).

В одномерной бегущей волне все величины (ρ, p, T, v_s, v_n) могут быть выражены в виде функций от одного параметра, в качестве которого может быть выбрана, например, одна из самих этих величин (§ 101). Скорость U перемещения точки профиля волны равна производной dx/dt, взятой при определенном значении этого параметра. Производные по координате и времени от каждой величины связаны друг с другом соотношением $\partial/\partial t = -U\partial/\partial x$.

Вместо скоростей v_s и v_n будет удобнее пользоваться величинами $v = j/\rho$ и $w = v_n - v_s$; выбираем такую систему координат, в которой скорость v в данной точке профиля волны равна нулю. Гидродинамические уравнения (139.3)–(139.6) (с Π, μ, ρ, s из

формул (139.12)–(139.15)) приводят к следующей системе уравнений:

$$-U\frac{\partial\rho}{\partial p}p' - U\rho^2\frac{\partial}{\partial p}\frac{\rho_n}{\rho}ww' + \rho v' = 0, \tag{141.14}$$

$$p' + 2\frac{\rho_s\rho_n}{\rho}ww' - U\rho v' = 0, \tag{141.15}$$

$$\left[-\rho U\frac{\partial s}{\partial T} + w\frac{\partial}{\partial T}(\rho_s s)\right]T' + sw\frac{\partial\rho_s}{\partial p}p' + \left[\rho_s s - Uw\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right]w' = 0, \tag{141.16}$$

$$\left[-\rho s + Uw\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right]T' + \left[1 + Uwp\frac{\partial}{\partial p}\frac{\rho_n}{\rho}\right]p' + \left[\rho_n U - \frac{\rho_n\rho_s}{\rho}w\right]w' - {} - [U\rho + w\rho_n]v' = 0. \tag{141.17}$$

Здесь опущены все члены выше второго порядка малости, а также все члены, содержащие коэффициент теплового расширения; штрих означает везде дифференцирование по параметру [1]).

В волне второго звука относительная амплитуда колебаний p и v мала по сравнению с амплитудами T и w; поэтому можно опустить также и члены, содержащие wp', wv'. Для определения U достаточно рассмотреть уравнение (141.16) и разность уравнений (141.15) и (141.17). Условие совместности получающихся таким образом двух линейных уравнений для T' и w' приводит к квадратному уравнению

$$\rho_n U^2\frac{\partial s}{\partial t} - Uw\left[\frac{4\rho_s\rho_n}{\rho}\frac{\partial s}{\partial T} - 2s\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right] - \rho_s s^2 = 0,$$

откуда

$$U = u_2 + w\left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{sT}{\rho_n c}\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right).$$

Здесь u_2 — местное значение скорости второго звука, меняющееся от точки к точке профиля волны вместе с отклонением δT температуры от ее равновесного значения. Разлагая u_2 по степеням δT, получим

$$u_2 = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T}\delta T = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T}\frac{\rho_n u_2}{\rho s}w,$$

где u_{20} — равновесное значение u_2. Окончательно получим

$$U = u_{20} + w\frac{\rho_s sT}{\rho c}\frac{\partial}{\partial T}\ln\frac{u_{20}^3 c}{T}. \tag{141.18}$$

При достаточно сильном искажении профиля волны в ней возникают разрывы (ср. § 102) — в данном случае температурные

---

[1]) А не переменную часть колеблющихся величин, как это было выше в этом параграфе!

разрывы. Скорость распространения разрыва равна полусумме скоростей U с обеих сторон разрыва, т. е. равна

$$c_{20} + \frac{w_1 + w_2}{2} \frac{\rho_s s T}{\rho c} \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{u_{20}^3 c}{T}, \tag{141.19}$$

где w_1, w_2 — значения w на обеих сторонах разрыва.

Коэффициент при w в выражении (141.18) может быть как положительным, так и отрицательным. В зависимости от этого точки с большими значениями w либо опережают, либо отстают от точек с меньшими значениями w, а разрыв соответственно возникает либо на переднем, либо на заднем фронте волны (в противоположность обычному звуку, где ударная волна возникает всегда на переднем фронте).

Задачи

1. Определить отношение интенсивностей излучения первого и второго звуков плоскостью, совершающей колебания в перпендикулярном к себе направлении.

Решение. Ищем скорости v_s (направленные по нормальной к плоскости оси x) в первой и второй излучаемых волнах соответственно в виде

$$v_{s1} = A_1 \cos [\omega(t - x/u_1)], \quad v_{s2} = A_2 \cos [\omega(t - x/u_2)].$$

На поверхности колеблющейся плоскости скорости v_s и v_n, должны быть равными скорости ее колебаний (которую обозначим через $v_0 \cos \omega t$). Это дает уравнения

$$A_1 + A_2 = v_0, \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 = v_0$$

(коэффициенты a_1, a_2 — из (141.11)). Средняя (по времени) плотность энергии в звуковой волне в гелии II равна

$$\rho_s \overline{v_s^2} + \rho_n \overline{v_n^2} = \frac{1}{2} A^2 (\rho_s + \rho_n a^2);$$

поток энергии (интенсивность) получается последующим умножением на соответствующую скорость звука u. Для отношения интенсивностей излучаемых волн второго и первого звуков получаем

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2 (\rho_s + \rho_n a_2^2) u_2}{A_1^2 (\rho_s + \rho_n a_1^2) u_1} \approx \frac{\beta^2 T u_2^3}{c u_1}$$

(здесь предположено, что $u_2 \ll u_1$, что справедливо вплоть до очень низких температур). Это отношение весьма мало.

2. То же для излучения звука от поверхности с периодически меняющейся температурой.

Решение. Достаточно написать граничное условие $j = 0$, которое должно иметь место на неподвижной поверхности. Оно дает

$$\rho_s (A_1 + A_2) + \rho_n (a_1 A_1 + a_2 A_2) = 0,$$

откуда

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{\rho_n a_1 + \rho_s}{\rho_n a_2 + \rho_s} \approx \frac{s}{\beta u_2^2}.$$

Для отношения интенсивностей находим

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{c}{T \beta^2 u_1 u_2}.$$

Это отношение весьма велико.

3. Определить скорость звука, распространяющегося вдоль капилляра, диаметр которого мал по сравнению с глубиной вязкого проникновения $\delta \sim (\eta/\rho_n\omega)^{1/2}$ (*K.R. Atkins*, 1959) [1].

Р е ш е н и е. В указанных условиях можно считать, что нормальное движение в капилляре полностью задерживается трением о стенки ($\mathbf{v}_n = 0$). Система линеаризованных уравнений (141.1), (141.2), (141.4) принимает вид [2]

$$\dot{\rho}' + \rho_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0, \quad \dot{\mathbf{v}}_s + \nabla\mu' = \dot{\mathbf{v}}_s - s\nabla T' + \frac{1}{\rho}\nabla p' = 0,$$

$$(s\rho)^{\cdot} = \rho\dot{s}' + s\dot{\rho}' = 0$$

(штрих означает переменную часть величин в волне). Снова пренебрегая тепловым расширением жидкости, находим из третьего уравнения

$$p's/u_1^2 = -T'\rho c/T.$$

Исключив теперь v_s из первых двух уравнений, получим волновое уравнение $\ddot{p}' - u^2\Delta p' = 0$, в котором скорость распространения u дается формулой

$$u^2 = \frac{\rho_s}{\rho}u_1^2 + \frac{\rho_n}{\rho}u_2^2.$$

4. Найти коэффициенты поглощения первого и второго звуков в гелии II.

Р е ш е н и е. Вычисление осуществляется аналогично тому, как это было сделано в § 79 для звука в обычных жидкостях; при этом вместо (79.1) используется выражение (140.10). В пренебрежении всеми членами, содержащими температурный коэффициент расширения β (в том числе в (141.10), (141.11)), получим для коэффициентов поглощения

$$\gamma_1 = \frac{\omega^2}{2\rho u_1^3}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2\right), \quad \gamma_2 = \frac{\omega^2\rho_s}{2\rho\rho_n u_2^3}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2 + \rho^2\zeta_3 - 2\rho\zeta_1 + \frac{\rho_n\varkappa}{\rho_s c}\right).$$

---

[1]) Эти волны принято называть *четвертым звуком*. *Третьим звуком* называют волны, распространяющиеся по пленке гелия II на твердой поверхности; существенную роль в них играют силы ван-дер-Ваальсова взаимодействия жидкости в пленке с твердым телом.

[2]) Уравнение же сохранения импульса (141.3) следует опустить: оно не имеет места в рассматриваемых условиях, когда к капилляру должна прилагаться внешняя сила, чтобы удерживать его покоящимся.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Плотность ρ
Давление p
Температура T
Энтропия единицы массы s
Внутренняя энергия единицы массы ε
Тепловая функция $w = \varepsilon + p/\rho$
Отношение теплоемкостей при постоянных объеме и давлении $\gamma = c_p/c_v$
Динамическая вязкость η
Кинематическая вязкость $\nu = \eta/\rho$
Теплопроводность $\varkappa$
Температуропроводность $\chi = \varkappa/\rho c_p$
Число Рейнольдса R
Скорость звука c
Число Маха M

Векторные и тензорные (трехмерные) индексы обозначаются латинскими буквами i, k, l, ... По дважды повторяющимся («немым») индексам везде подразумевается суммирование. Единичный тензор δ_{ik}.

Ссылки на номера параграфов и формул других томов этого курса снабжены римскими цифрами: II — «Теория поля», 1988; V — «Статистическая физика, часть 1», 1995; VIII — «Электродинамика сплошных сред», 1992; IX — «Статистическая физика, часть 2», 2000; X — «Физическая кинетика», 1979.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1]

[1] Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указатель включены термины, понятия и задачи, непосредственно не отраженные в оглавлении. Звездочкой отмечены страницы, относящиеся к задачам.

Учебное издание

ЛАНДАУ Лев Давидович,
ЛИФШИЦ Евгений Михайлович

ГИДРОДИНАМИКА

(Серия: «Теоретическая физика», том VI)

Редакторы *Е. В. Сатарова, Д. А. Миртова*
Оригинал-макет: *В. В. Затекин*

ЛР №071930 от 06.07.99
Подписано в печать 01.11.2001. Формат $60\times90^1/_{16}$
Бумага офсетная №1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 46. Уч.-изд. л. 46,39.
Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

Налоговая льгота — общероссийский
классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953000 — книги, брошюры